ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р4 - 4677

Г.Н.Афанасьев

ОБОБЩЕННЫЕ КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И СВОЙСТВА СИММЕТРИИ ПАРНОГО $S=0$, $T=1$ -ГАМИЛЬТОНИАНА

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1969

P4 - 4677

Г.Н.Афанасьев

ОБОБЩЕННЫЕ КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И СВОЙСТВА СИММЕТРИИ ПАРНОГО S=0, T=1 -ГАМИЛЬТОНИАНА

Направлено в ЯФ

1. Рассмотрим гамильтониан парного взаимодействия в $S=0, T=1$ – состоянии:

$$H = \sum \epsilon_k a^+_{k\tau\sigma} a_{k\tau\sigma} + G_p A^+_p A_p + G_n A^+_n A_n + G_0 A^+_0 A_0 \qquad (1)$$

Здесь G_p, G_n, G_0 – парные константы pp–, nn– , np – парных взаимодействий, ϵ_k – одночастичные уровни энергии

$$\begin{aligned}
&A^+_p = \sum a^+_{kp\uparrow} a^+_{kp\downarrow}, \quad A_p = \sum a_{kp\downarrow} a_{kp\uparrow}, \\
&A^+_n = \sum a^+_{kn\uparrow} a^+_{kn\downarrow}, \quad A_n = \sum a_{kn\downarrow} a_{kn\uparrow}, \\
&A^+_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum (a^+_{kp\uparrow} a^+_{kn\downarrow} + a^+_{kn\uparrow} a^+_{kp\downarrow}), \\
&A_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum (a_{kp\downarrow} a_{kn\uparrow} + a_{kn\downarrow} a_{kp\uparrow}), \\
&\uparrow = +|k|, \quad \downarrow = -|k|.
\end{aligned} \qquad (2.1)$$

Коммутируя выражения (2.1) между собой (см. таблицу) и дополняя их величинами

$$T_0 = \frac{1}{2}(S^0_p - S^0_n), \quad T_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum (a^+_{p\uparrow} a_{n\uparrow} + a^+_{p\downarrow} a_{n\downarrow}),$$

$$T_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum (a^+_{n\uparrow} a_{p\uparrow} + a^+_{n\downarrow} a_{p\downarrow})_k, \quad S_0 = \frac{1}{2} (S^0_p + S^0_n),$$

$$S_p^0 = \sum (a^+_{p\uparrow} a_{p\uparrow} - a_{p\downarrow} a^+_{p\downarrow})_k ,$$

$$S_n^0 = \sum (a^+_{n\uparrow} a_{n\uparrow} - a_{n\downarrow} a^+_{n\downarrow})_k , \tag{2.2}$$

получаем замкнутую систему коммутационных соотношений. Выражения (2) являются инфинитезимальными генераторами группы R_5 /1/.

2. Исходный гамильтониан разобьем на две части

$$H = H_0 + H_1 . \tag{3}$$

Первый член описывает pp – и nn – взаимодействия, H_1 – np – парное взаимодействие. Операторы S_p^0 и S_n^0 являются третьими проекциями нейтронного и протонного векторов квазиспина /2/. Соответствующие квадраты этих векторов равны:

$$S_p^2 = (S_p^0)^2 + A_p^+ A_p + A_p A_p^+ ,$$

$$S_n^2 = (S_n^0)^2 + A_n^+ A_n + A_n A_n^+ . \tag{4}$$

Операторы S_p^0, S_n^0, S_p^2, S_n^2 коммутируют с H_0; поэтому собственные векторы H_0 могут быть классифицированы собственными значениями этих операторов:

$$H_0 \mid S_p S_p^0 S_n S_n^0 > = (E_p + E_n) \mid S_p S_p^0 S_n S_n^0 > .$$

Собственные значения части оператора потенциальной энергии, которая входит в H_0, равны:

$$G_p \frac{S_p(S_p+1)-S_p^0(S_p^0-1)}{2} + G_n \frac{S_n(S_n+1)-S_n^0(S_n^0-1)}{2} . \quad (5)$$

Налицо альтернатива, связанная с отсутствием или наличием в системе дальнейшего вырождения уровней энергии H_0 .

3. Рассмотрим сначала первый случай. Коммутируя H_1 с операторами квазиспиновых подгрупп, убеждаемся, что H_1 является приводимым тензорным оператором:

$$H_1 = \frac{1}{4} G_0 [T^{(11)} + T^{(10)} + T^{(01)} + T^{(00)}]_{(00)} , \quad (6.1)$$

$$T^{(11)}_{(00)} = A_0^+ A_0 + A_0 A_0^+ - T_+ T_- - T_- T_+ \quad (6.2)$$

$$T^{(10)}_{(00)} = S_p^0 \quad (6.3)$$

$$T^{(0,1)}_{(00)} = S_n^0 \quad (6.4)$$

$$T^{(0,0)}_{(00)} = A_0^+ A_0 + A_0 A_0^+ + T_+ T_- + T_- T_+ . \quad (6.5)$$

Подействуем операторами (6) на собственные векторы H_0 :

$$T^{(00)}_{(00)} | S_p S_p^0 S_n S_n^0 > = | S_p S_p^0 S_n S_n^0 > < S_p S_n || T^{(00)} || S_p S_n > ,$$

$$T^{(10)}_{(00)} | S_p S_p^0 S_n S_n^0 > = | S_p S_p^0 S_n S_n^0 > S_p^0 ,$$

$$T^{(01)}_{(00)} | S_p S_p^0 S_n S_n^0 > = | S_p S_p^0 S_n S_n^0 > S_n^0 , \quad (7)$$

$$T^{(11)}_{(00)} | S_p S_p^0 S_n S_n^0 > = \Sigma | S_p + r_p , S_p^0 , S_n + r_n , S_n^0 > \times$$

$$\times < S_p S_p^0 10 | S_p + r_p , S_p^0 > < S_n S_n^0 10 | S_n + r_n , S_n^0 > < S_p + r_p , S_n + r_n || T^{(11)} || S_p S_n >$$

r_p, r_n пробегают значения $(1, 0, -1)$. Подставляя (7) в (6.1), можно в простейших случаях получить массовую формулу. Приведенные матричные элементы, входящие в (7), определяются структурой собственных векторов H_0.

4. Следуя работе/3/, предположим, что H_1 может быть эффективно аппроксимировано линейной и квадратичной комбинациями, составленными из операторов изоспиновых подгрупп и имеющими те же трансформационные свойства, что и H_1:

$$H_1 \approx a S_p^2 + b S_n^2 + c S_p^0 + d S_n^0 + f S_p^0 S_n^0 . \tag{8}$$

Поэтому:

$$\begin{aligned} H \,| S_p S_p^0 S_n S_n^0 > = [\, E_p + E_n + a S_p (S_p + 1) + b S_n (S_n + 1) + \\ + c S_p^0 + d S_n^0 + f S_p^0 S_n^0 \,] \,| S_p S_p^0 S_n S_n^0 > . \end{aligned} \tag{9}$$

5. Рассмотрим теперь случай, когда среди собственных значений H_0 имеется вырождение. При этом существенным является отыскание алгебры операторов, собственные значения которых различают собственные векторы, принадлежащие определенному уровню энергии H_0. Через $\mathcal{E}_0$ обозначим подпространство, натянутое на эти векторы. Примером такой алгебры может служить алгебра операторов

$$X_\tau = \Sigma\, (a^+_{\tau\uparrow} a_{\tau\uparrow} - a^+_{\tau\downarrow} a_{\tau\downarrow})_k , \quad Y_\tau = \Sigma\, (a^+_{\tau\uparrow} a_{\tau\downarrow})_k ,$$

$$Z_\tau = \Sigma\, (a^+_{\tau\downarrow} a_{\tau\uparrow})_k , \quad \tau = p, n . \tag{10}$$

Таким образом, при наличии дополнительного вырождения собственный вектор маркируется (кроме квантовых чисел квазиспина, определяющих энергию уровня) собственными значениями операторов $L_\tau^2 = X_\tau^2 + Y_\tau^2 + Z_\tau^2, X_\tau$. Удобнее, однако, различать векторы подпространства $\mathcal{E}_0$ собственными значениями операторов $L_p^2, L_n^2, L^2 = (L_p + L_n)^2 \quad X = X_p + X_n$. Поступая подобно предыдущему, т.е. коммутируя H_1 с операторами (10), находим, что по отношению к группе, генерируемой этими операторами (назовем ее Γ_0), H_1 является $(0,0)$ – компонентой прямой суммы двух неприводимых тензорных операторов

$$H_1 = [T^{(20)} + T^{(00)}]_{(00)} . \tag{11}$$

Полный гамильтониан H инвариантен относительно более узкой группы преобразований Γ, являющейся подгруппой Γ_0 и генерируемой операторами $X = X_p + X_n$, $Y = Y_p + Y_n$, $Z = Z_p + Z_n$. Следствием этого является частичное снятие вырождения: уровни с одинаковыми значениями ℓ $(L^2 |\phi> = \ell(\ell+1)|\phi>)$ имеют одну и ту же энергию. Используя трансформационные свойства H_1, даваемые соотношением (11), можно получить величину расщепления для каждого уровня H_0.

6. Обсудим ограничения, накладываемые на собственные векторы состояний условиями симметрии относительно группы Γ_0 (при $G_0 = 0$) и ее подгруппы Γ $(G_0 \neq 0)$. Легко видеть, что выбор в качестве пробных функций произведения бардиновских функций (при $G_0 = 0$) и функции

$$|\Phi> = \prod_k \Phi_k |0>$$

$$\Phi_k = [1 + v_p a^+_{p\uparrow} a^+_{p\downarrow} + v_n a^+_{n\uparrow} a^+_{n\downarrow} + + v_0 (a^+_{p\uparrow} a^+_{n\downarrow} + a^+_{n\uparrow} a^+_{p\downarrow}) + w a^+_{p\uparrow} a^+_{p\downarrow} a^+_{n\uparrow} a^+_{n\downarrow}]_k \tag{12}$$

удовлетворяет этим требованиям симметрии. Выясним, при каких условиях существуют операторы α, линейно связанные с a^+, a и обращающие $|\Phi_k> = \Phi_k |0>$ в нуль. α ищем в виде

$$\alpha^{\rho}_{\tau\sigma}(k) = \sum_{rts} <\rho\tau\sigma|\Lambda_k|rts> a^{r}_{ts}(k). \tag{13}$$

Индексы ρ, r различают операторы рождения и уничтожения. Одночастичные индексы k в дальнейшем, ради удобства, опускаются. Требования каноничности ограничивают возможные линейные преобразования (13) унитарными. Условие $\alpha_{\tau\sigma}|\Phi> = 0$ приводит к однородной системе уравнений для элементов матрицы Λ. Эта система имеет нетривиальные решения только при наличии следующего соотношения между параметрами пробной функции (12)

$$w = v_p v_n - v_0^2 . \tag{14}$$

Проанализируем это условие подробнее. Положим $v_p = |v_p| \exp(i\phi_p)$, $v_n = |v_n| \exp(\phi_n)$, $v_0 = |v_0| \exp(i\phi_0)$, $\phi = \frac{1}{2}(\phi_p + \phi_n) - \phi_0$.

Тогда условие (14 эквивалентно следующему:

$$\cos 2\phi = \frac{|v_p v_n|^2 + |v_0|^4 - |w|^2}{2|v_0^2 v_p v_n|} . \tag{15}$$

Таким образом $|w|$ удовлетворяет неравенству

$$||v_p v_n| - |v_0|^2| \le |w| \le |v_p v_n| + |v_0|^2 . \qquad (16)$$

Неравенство (16) является условием существования линейного канонического преобразования. Можно дать несколько 'физических объяснений" этого неравенства. Одно из них состоит в следующем. При достаточно большом по абсолютной величине параметре w пробной функции стновятся существенными четверные корреляции. Каноническое преобразование перестает быть в этом случае линейным. С другой стороны, w не может быть слишком малым, так как при $v_0 = 0$ вектор состояния должен факторизоваться $(w = v_p v_n)$.

7. Пусть теперь неравенство (14) выполнено. Задачу отыскания операторов квазичастиц будем решать в 2 этапа. Найдем сначала унитарное преобразование, приводящее (12) к произведению BCS -функций

$$(1 + v_\pi \beta^+_{\pi\uparrow} \beta^+_{\pi\downarrow})(1 + v_\nu \beta^+_{\nu\uparrow} \beta^+_{\nu\downarrow}) . \qquad (17)$$

К (17) применим стандартное UV - преобразование. Анализ условия факторизуемости приводит к соотношению (14). Параметры v_π, v_ν, входящие в (17), оказываются равными

$$v_{\pi,\nu} = |v_{\pi,\nu}| \exp(i\,\phi_{\pi,\nu}), \qquad (18)$$

$$|v_{\pi,\nu}|^2 = v^2 \pm \sqrt{v^4 - |w|^2},$$

$$\operatorname{tg}\phi_{\pi,\nu} = \sin 2\phi \frac{|v_p v_n|}{|v_p v_n| \cos 2\rho - |v_0|^2 + |v_{\pi,\nu}|^2} .$$

Само преобразование имеет вид

$$
\begin{aligned}
&a^{+}_{\tau\sigma} = \cos\theta\, \beta^{+}_{\tau\sigma} + \tau \sin\theta \exp(i\tau\Phi)\, \beta^{+}_{-\tau,\sigma} , \\
&\operatorname{tg}\Phi = \frac{|v_p| \sin(\phi_0 - \phi_p) - |v_n| \sin(\phi_0 - \phi_n)}{|v_p| \cos(\phi_0 - \phi_p) + |v_n| \cos(\phi_0 - \phi_n)} , \\
&\operatorname{tg}^2\theta = \frac{\sqrt{\nu^4 - |w|^2} - \frac{1}{2}\left(|v_p|^2 - |v_n|^2\right)}{\sqrt{\nu^4 - |w|^2} + \frac{1}{2}\left(|v_p|^2 - |v_n|^2\right)} .
\end{aligned}
\qquad (19)
$$

Наконец, смешивая β^{+} и β, находим операторы квазичастиц.

8. Заметим, что исходный гамильтониан (1) может быть диагонализован преобразованием более простым, чем комбинация (19) и стандартного UV-преобразования. Возникает вопрос: могут ли различные способы диагонализации одного и того же гамильтониана вести к физически неэквивалентным результатам? Ситуация проясняется, если заметить, что преобразование Боголюбова-Валатина есть трансформация части недиагональных элементов энергетической матрицы в диагональные. Доля захватываемых при этом недиагональных элементов существенно зависит от удачного выбора канонического преобразования. Вид такого преобразования определяется, в свою очередь, структурой пробной функции.

9. В связи с этим возникает вопрос: всегда ли промежуточные математические величины, возникающие в процессе приближенной диагонализации гамильтоновой матрицы, имеют ясный физический смысл? К таким величинам мы относим, например, корреляционные функции, химические потенциалы, параметры пробной функции. Для одного сорта частиц, взаимодействующих посредством парных сил, физический смысл корреляционной функции очевиден: она в этом случае является мерой

числа конденсированных пар. В более сложных случаях возможность подобной интерпретации становится сомнительной. В самом деле, в в работе [4] для зарядово-симметричного парного гамильтониана (при $N = Z$) была доказана эквивалентность: а) решения, соответствующего равным по абсолютной величине $pp-$, $nn-$ и np - корреляционным функциям ($pp-$ и nn - корреляционные функции при этом чисто вещественны, np - чисто мнимая); б) решения с равной нулю np - корреляционной функцией. На языке пробных функций это означает эквивалентность решений $|v_p| = |v_n| = |v_0|$, $\phi = \frac{\pi}{2}$ и $|v| = 0$. Важность учёта фаз корреляционных функций очевидна: всякая интерпретация корреляционных функций должна дать разумную интерпретацию их фаз.

10. В работе [4] было показано, что энергетически выгодными являются решения с равной нулю нейтрон-протон-корреляционной функцией. Укажем на физическую причину этого явления. Известно [5,6], что для системы фермионов сверхтекучесть может иметь место только в том случае, если имеется не более одного уровня, на котором может произойти конденсация пар. В нашем же случае, кроме уровней конденсации $pp-$ и $nn-$ пар, расположенных вблизи границ Ферми нейтронной и протонной систем, в промежутке между ними имеется конкурирующий уровень конденсации np - пар [4]. Поэтому при константе нейтрон-протонного взаимодействия, меньшей некоторой критической, имеет место конденсация $pp-$ и nn - пар. Роль np - взаимодействия сводится при этом лишь к перенормировке уровней энергии. При больших значениях G_0 в системе происходит фазовый переход: $pp-$ и nn - пары разрушаются, создаются np - пары. Иными словами, появление уровня конденсации np - пар приводит к уменьшению эффективной корреляционной функции, т.е. к эффективному расталкиванию пар. При $N=Z$, $G_p = G_n = G_0$ это привело бы (если б в системе имелся запрет,

исключающий решения с равной нулю np – корреляционной функцией) к полной компенсации притяжения, т.е. к исчезновению щели.

11. Предположим, что при $t=-\infty$ мы имеем только pp– и nn– парные взаимодействия, т.е. невзаимодействующие между собой системы квазичастиц. Включая между квазичастицами разных сортов np -парное взаимодействие и ограничиваясь в массовом операторе вкладом диаграмм с одной точечной вершиной /7/, получаем следующее уравнение для корреляционной функции

$$M_0 \frac{2}{|G_0|} = M_0 \Sigma\left[\left(\frac{E_p + E_n}{2}\right)^2 + M_0^2\right]_k^{-1/2} \tag{20.1}$$

$$E_\tau^2 = \epsilon_\tau^2 + G_\tau^2 C_\tau^2 \ . \tag{20.2}$$

Заметим, что это уравнение допускает решение $M_0=0$. Вычисляя полную энергию при $M_0=0$ и $M_0\neq 0$, убеждаемся в энергетической выгодности последнего случая. Кажущиеся противоречия с результатами работы /4/ устраняются, если принять во внимание различие частей, ответственных за np – взаимодействие. В самом деле, последний член в (1) описывает np – взаимодействие между протонами и нейтронами, тогда как соотношения (20) отвечают адиабатическому включению взаимодействия между протонными и нейтронными квазичастицами. Неэквивалентность рассмотрения pp– и nn – взаимодействий, с одной стороны, и np – с другой, очевидна.

12. Выше мы отметили, что условие сохранения антикоммутационных соотношений ограничивает возможные линейные преобразования унитарными. Проанализируем это утверждение подробнее. Имеем:

$$a^{r}_{ts}(k) = \langle r\,t\,s \mid A_k \mid \rho\,\tau\,\sigma \rangle\, a^{\rho}_{\tau\sigma}(k) \tag{21}$$

(предполагается суммирование по промежуточным индексам). Условие каноничности преобразования имеет вид:

$$\langle r_1 t_1 s_1 \mid A_{k_1} \mid \rho\,\tau\,\sigma \rangle \langle -r_2 t_2 s_2 \mid A_{k_2} \mid -\rho\,\tau\,\sigma \rangle = \delta_{12} \tag{22}$$

$$(\delta_{12} = \delta_{k_1 k_2}\,\delta_{r_1 r_2}\,\delta_{t_1 t_2}\,\delta_{s_1 s_2}).$$

Поскольку оператор a^+ эрмитово сопряжен оператору b, то:

$$\overline{\langle r\,t\,s \mid A_k \mid \rho\,\tau\,\sigma \rangle} = \langle -r\,t\,s \mid A_k \mid -\rho\,\tau\,\sigma \rangle . \tag{23}$$

Из (22) и (23) следует утверждение об унитарности преобразования:

$$\langle r_1 t_1 s_1 \mid A_{k_1} \mid \rho\,\tau\,\sigma \rangle \langle r_2 t_2 s_2 \mid A_{k_2} \mid \rho\,\tau\,\sigma \rangle = \delta_{2}, \tag{24}$$

т.е. $AA^+ = E$.

Будем считать, что операторы $b = a^+$ и a, не являясь эрмитово сопряженными, удовлетворяют соотношениям

$$[b_\mu, a_\nu] = \delta_{\mu\nu}, \quad [b_\mu, b_\nu] = [a_\mu, a_\nu] = 0. \tag{25}$$

Отказ от соотношения (24) приводит к снятию унитарного ограничения:

$$a = A\alpha, \quad b = B\beta, \quad AB_T = E. \tag{26}$$

Отсутствие унитарности, в свою очередь, приводит к тому, что Φ_k может быть приведено к каноническому виду (т.е. факторизовано) при произвольных значениях параметров v_p, v_n, v_0, w.
В самом деле, пусть

$$b_{ts}(k) = \Sigma \langle t \mid B_k \mid \tau \rangle \, a_{\tau s}(k). \tag{27}$$

Положим $\langle p \mid B_k \mid \pi \rangle = a$, $\langle n \mid B \mid \nu \rangle = b$, $\langle p \mid B \mid \nu \rangle = c$, $\langle n \mid B \mid \pi \rangle = d$.
a, b, c, d удовлетворяют соотношениям

$$a^2 b^2 + c^2 d^2 = 1,$$

$$v_p ac + v_n bd + v_0(ab + cd) = 0,$$

$$v_p a^2 + v_n d^2 + 2v_0 ad = v_\pi, \tag{28}$$

$$v_p c^2 + v_n b^2 + 2v_0 bc = v_\nu,$$

$$v_p^2 + v_n^2 + 2v_0^2 + w^2 = v_\pi^2 + v_\nu^2 + v_\pi^2 v_\nu^2.$$

Эти соотношения определяют коэффициенты преобразования a, b, c, d и эффективные параметры пробной функции v_π, v_ν. Таким образом, четверные корреляции можно учесть путем последовательного применения неунитарного преобразования (27) и стандартного UV -преобразования для частиц π, ν.

13. Резюмируя содержание пунктов 6-12, укажем на возможные причины неприменимости обобщенного UV - преобразования к гамильтониану (1):

а) неудачен выбор пробной функции в виде (12);

б) пробная функция хороша, но само UV - преобразование недостаточно общее: все предыдущие рассмотрения были ограничены унитарными преобразованиями. Как мы видели, это приводит к тому, что параметры пробной функции перестают быть независимыми, происходит изменение симметрии волновой функции, появляется решение с нулевой щелью (при $N = Z$, $G_p = G_n = G_0$);

в) пробная функция выбрана удачно, преобразование унитарно, но не учитывается несохранение при UV -преобразовании достаточного числа инвариантных (т.е. коммутирующих с гамильтонианом) операторов. Соответственно этому в правую часть (1) следует добавить члены, обеспечивающие сохранение средних значений проекций квази- и изоспина, квадрата изоспина (если взаимодействие зарядово симметричное), инвариантных операторов второй и четвертой степеней группы R_5.

14. Во многих работах[8-15] обсуждался вопрос о возможности физической классификации состояний группы R_5 (а, следовательно, и собственных векторов зарядово-симметричного гамильтониана). Кратко суть дела состоит в следующем. Можно найти базис R_5, в котором диагональны S_0, T_0 (картановский базис) или T_0 и T^2 (базис Гельфанда-Цейтлина). Физическим же является базис, в котором диагональны S_0, T_0, T^2. Поскольку в упомянутых базисах каждое состояние маркируется четырьмя квантовыми числами S_0, T_0, T недостаточно для полного построения базиса. Таким образом возникает известная проблема отыскания четвертого квантового числа. Перейдем к построению физического базиса R_5. Начнем с изоспиновой группы. Базис для нее определяется стандартным образом[16]:

$$T_0 \; | \ell m> = m \, | \ell m> ,$$

$$T_+ \, | \ell m> = \sqrt{\frac{1}{2} (\ell - m)(\ell + m + 1)} \; | \ell, m+1> , \tag{29}$$

$$T_- \, | \ell m> = \sqrt{\frac{1}{2} (\ell + m)(\ell - m + 1)} \; | \ell, m-1> .$$

Оператор S_0 коммутирует со всеми операторами (21) и является единицей внутри каждого изомультиплета:

$$S_0 \, | n \, \ell \, m> = n \, | n \, \ell \, m> . \tag{30}$$

Дополняя (21), (2?) оператором $\overset{+}{A}_{0}$, получаем семимерную (неполупростую алгебру):

$$T_0 \, , T_+ \, , T_- , S_0 \, , \overset{+}{A}_0 \, , \overset{+}{A}_p \, , \overset{+}{A}_p \, . \tag{31}$$

$\overset{+}{A}_0$ ищем в виде:

$$\overset{+}{A}_0 | n \, \ell m> = | n_1 \, \ell_1 \, m_1 > < n_1 \ell_1 m_1 | \overset{+}{A}_0 | n \, \ell \, m> . \tag{32}$$

Соотношения коммутации (см. табл.) фиксируют структуру матричных элементов относительно индексов $n \ell m$:

$$\overset{+}{A}_0 | n \, \ell m> = | n+1, \ell m> m \, A(n, \ell) + | n+1, \ell+1, m> \sqrt{(\ell+1)^2 - m^2} \, B(n, \ell) + \tag{33}$$

$$+ | n+1, \ell - 1, m> \sqrt{\ell^2 - m^2} \, C(n, \ell) .$$

Функции A, B, C удовлетворяют уравнениям:

$$\ell A(n-1,\ell) B(n,\ell) = (\ell+2) A(n,\ell+1) B(n-1,\ell),$$

$$(\ell+1) A(n-1,\ell) C(n,\ell) = (\ell-1) A(n,\ell-1) C(n-1,\ell), \tag{34}$$

$$A(n\ell) A(n-1,\ell) + (2\ell-1) B(n,\ell-1) C(n-1,\ell) = (2\ell+3) C(n,\ell+1) B(n-1,\ell).$$

Из них следует, что $\phi(\ell) = \dfrac{B(n-1,\ell-1) C(n,\ell)}{A(n-1,\ell-1) A(n,\ell)}$ не зависит от индекса n и удовлетворяет следующему уравнению:

$$1 + (2\ell-1)\left(\frac{\ell+1}{\ell-1}\right)^2 \phi(\ell) = (2\ell+3)\phi(\ell+1).$$

Следовательно, $\phi(\ell) = \dfrac{\ell^2(\ell-1)^2}{4\ell^2-1}(c-\ell^{-2})$; условие конечномерности представления дает $c = \lambda^{-2}$, где λ – верхняя граница ℓ. Соотношения (34) позволяют выразить B, C через A; удобнее, однако, это сделать позже. Итак, базис алгебры (31) маркируется квантовыми числами $n\ell m$. Если $\lambda_1 \lambda_2$ задают неприводимое представление R_5, то

$$\lambda_2 \le \lambda \le \lambda_1,\ 0 \le \ell \le \lambda,\ -\ell \le n \le \min(\ell,\lambda).$$

A_0 ищем в виде:

$$A_0 |\lambda n \ell m\rangle = |\lambda_1 n_1 \ell_1 m_1\rangle\langle\lambda_1 n_1 \ell_1 m_1|A_0|\lambda n \ell m\rangle.$$

Поступая, как и ранее, получаем:

$$A_0|\lambda n\ell m\rangle = |\lambda_1 n-1\ \ell m\rangle\, m A_{\lambda_1\lambda}(n\ell) +$$

$$+ |\lambda_1, n-1, \ell+1, m\rangle\sqrt{(\ell+1)^2-m^2}\,B_{\lambda_1\lambda}(n\ell) + |\lambda_1, n-1, \ell-1, m\rangle\sqrt{\ell^2-m^2}\,C_{\lambda_1\lambda}(n\ell).$$

A, B, C удовлетворяют системе уравнений, имеющей решения только при $\lambda_1 = \lambda,\ \lambda \pm 1$:

$\underline{\lambda_1 = \lambda}$

$$A_\lambda(n\ell)A_{\lambda\lambda}(n+1,\ \ell) = \frac{\lambda^2}{\ell^2(\ell+1)^2}\left[\ c_0 - \lambda^2 - \frac{1}{2}(\ell-n)(\ell+1+n)\right],$$

$$C_\lambda(n-1,\ell+1)B_{\lambda\lambda}(n\ell) = \frac{1-\left(\frac{\lambda}{\ell+1}\right)^2}{(2\ell+1)(2\ell+3)}\left[c_0 - \lambda^2 - \frac{1}{2}(\ell+1-n)(\ell+2-n)\right],$$

$$B_\lambda(n-1,\ell-1)C_{\lambda\lambda}(n\ell) = \frac{1-\left(\frac{\lambda}{\ell}\right)^2}{4\ell^2-1}\left[c_0 - \lambda^2 - \frac{1}{2}(\ell+n)(\ell-1+n)\right],$$

$$c_0 = \frac{1}{2}[\lambda_1(\lambda_1+1) + \lambda_2(\lambda_2-1)].$$

$\underline{\lambda_1 = \lambda + 1}$

$$B_{\lambda+1\lambda}(n\ell) = -\frac{\ell+\lambda+2}{\lambda+1}\ \frac{\ell^2}{(2\ell+1)(2\ell+3)}\ \frac{A_{\lambda+1}(n-1,\ell)}{C_{\lambda+1}(n-1,\ell+1)}\ A_{\lambda+1\lambda}(n\ell),$$

$$C_{\lambda+1\lambda}(n\ell) = \frac{\ell-\lambda-1}{\lambda+1}\ \frac{(\ell+1)^2}{4\ell^2-1}\ \frac{A_{\lambda+1}(n-1,\ \ell)}{B_{\lambda+1}(n-1,\ell-1)}\ A_{\lambda+1\lambda}(n\ell),$$

$$\frac{A_{\lambda+1\lambda}(n,\ell+1)}{A_{\lambda+1\lambda}(n\ell)} = \frac{\ell-\lambda+1}{\lambda(\lambda+1)}\ \frac{(\ell+\lambda+2)\ell^2}{(2\ell+1)(2\ell+3)}\ \frac{A_\lambda(n,\ell+1)}{B_\lambda(n,\ell)}\ \frac{A_{\lambda+1}(n-1,\ \ell)}{C_{\lambda+1}(n-1,\ell+1)},$$

$$\frac{A_{\lambda+1\lambda}(n+1,\ell)}{A_{\lambda+1\lambda}(n\ell)} = \frac{\lambda}{\lambda+1}\ \frac{A_{\lambda+1}(n-1,\ell)}{A_\lambda(n\ell)}$$

$$\underline{\lambda_1 = \lambda - 1}$$

$$B_{\lambda-1\,\lambda}(n\ell) = \frac{\ell-\lambda+2}{\lambda-1}\,\frac{\ell^2}{(2\ell+1)(2\ell+3)}\,\frac{A_{\lambda-1}(n-1\,\ell)}{C_{\lambda-1}(n-1,\ell+1)}\,A_{\lambda-1\,\lambda}(n\ell),$$

$$C_{\lambda-1\,\lambda}(n\ell) = -\frac{\ell+\lambda-1}{\lambda-1}\,\frac{(\ell+1)^2}{4\ell^2-1}\,\frac{A_{\lambda-1}(n-1,\ell)}{B_{\lambda-1}(n-1,\ell-1)}\,A_{\lambda-1\,\lambda}(n\ell),$$

$$\frac{A_{\lambda-1\lambda}(n,\ell+1)}{A_{\lambda-1\lambda}(n\ell)} = \frac{(\ell-\lambda+2)(\ell+\lambda+1)\ell^2}{\lambda(\lambda-1)(2\ell+1)(2\ell+3)}\,\frac{A_\lambda(n-1,\ell)}{B_\lambda(n-1,\ell)} - \frac{A_{\lambda-1}(n-2,\ell+1)}{C_{\lambda-1}(n-2,\ell+1)},$$

$$\frac{A_{\lambda-1\lambda}(n+1,\ell)}{A_{\lambda-1\lambda}(n\ell)} = \frac{\lambda}{\lambda-1}\,\frac{A_{\lambda-1}(n-1,\ell)}{A_\lambda(n,\ell)}.$$

Между коэффициентами A существует еще одно соотношение:

$$A_\lambda(n-1,\ell)A_{\lambda,\lambda+1}(n\ell)A_{\lambda+1}(n-1,\ell)A_{\lambda+1\,\lambda}(n\ell) =$$
$$= \frac{(\ell-\lambda)(\ell+\lambda+1)\lambda(\lambda+1)(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda+\lambda_1+1)(\lambda+\lambda_2-1)}{2\ell^4(\ell+1)^4}.$$

Соотношения (35) позволяют выразить $A_{\lambda_1\lambda}(n\ell)$ через $A_\lambda(n\ell)$; на коэффициенты A_λ, B_λ, C_λ не накладывается никаких ограничений, кроме (34). Конкретный базис представления получается при частном выборе A_λ. Положим их равными тем значениям, которые они имели бы при отсутствии недиагональности по λ (т.е. при $A_{\lambda_1\lambda}(n\ell) = \delta_{\lambda\lambda_1}A_\lambda(n-1,\ell)$):

$$A_{\lambda\lambda}(n\ell) = \frac{\lambda}{\ell(\ell+1)}\,\frac{c_0-\lambda^2+\frac{1}{2}(\ell+n)(\ell+1-n)}{\sqrt{\frac{1}{2}(\ell+n)(\ell+1-n)}},$$

$$B_{\lambda\lambda}(n\ell) = -\sqrt{\left(\frac{\lambda}{\ell+}-\right)^2 - 1}\ \frac{c_0 - \lambda^2 - \frac{1}{2}(n-\ell-1)(n-\ell-2)}{\sqrt{(2\ell+1)(2\ell+3)}\ \sqrt{\frac{1}{2}(n-\ell-1)(n-\ell-2)}},$$

$$C_{\lambda\lambda}(n\ell) = -\sqrt{-\left(\frac{\lambda}{\ell}\right)^2 - 1}\ \frac{c_0 - \lambda^2 - \frac{1}{2}(\ell+n)(\ell-1+n)}{\sqrt{4\ell^2-1}\ \sqrt{\frac{1}{2}(\ell+n)(\ell-1+n)}},$$

$$A_{\lambda+1\,\lambda}(n\ell) = \frac{(-1)^{\ell}}{\ell(\ell+1)}\left[\frac{(\lambda+\ell+1)(\lambda-\ell)}{(\ell+n)(\ell+1-n)}\right]^{1/2} A_{\lambda+1,\,\lambda},$$

$$A_{\lambda-1\,\lambda}(n\ \ell) = \frac{(-1)^{\ell}}{\ell(\ell+1)}\left[\frac{(\lambda+\ell)(\lambda-\ell-1)}{(\ell+n)(\ell+1-n)}\right]^{1/2} A_{\lambda-1\,\lambda},$$

$$A_{\lambda}(n\ell) = \frac{\lambda}{\ell(\ell+1)}\left[\frac{1}{2}(\ell+1+n)(\ell-n)\right]^{1/2}, \tag{36}$$

$$B_{\lambda}(n\ell) = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\ell+1}\right)^2 - 1}\ \left[\frac{(n+\ell+1)(n+\ell+2)}{2(2\ell+1)(2\ell+3)}\right]^{1/2},$$

$$C_{\lambda}(n\ell) = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\ell}\right)^2 - 1}\ \left[\frac{(n-\ell)(n-\ell+1)}{2(4\ell^2-1)}\right]^{1/2},$$

$$A_{\lambda+1,\lambda}A_{\lambda,\lambda+1} = -\lambda(\lambda+1)\left[c_0 - \frac{1}{2}\lambda(\lambda+1)\right] + \frac{1}{2}\lambda_2(\lambda_2-1)\lambda_1(\lambda_1+1).$$

При некоторых n, ℓ знаменатели в соотношениях (36) обращаются в нуль. Для таких значений n,ℓ следует обратиться к соотношениям (55). Формулы (35), (36) дают реализацию физического представления R_5.

15. Найденный нами базис представления группы R_5 является неунитарным. Можно воспользоваться свободой выбора коэффициентов $A_\lambda(n\ell)$, чтобы сделать представление унитарным, а именно: следует взять за основу операторы A_0, даваемые соотношениями (35), и потребовать, чтобы операторы, эрмитово сопряженные A_0, удовлетворяли тем же коммутационным соотношениям, что и A_0 (до сих пор мы не использовали факта эрмитовой сопряженности операторов A_0 и A_0^+). Проще, однако, построить функциональный базис неприводимого представления R_5. Введем координаты:

$$x_1=\cos\theta\cos\Phi,\ x_2=\cos\theta\sin\Phi,\ x_3=\sin\theta\cos\theta_1,\ x_4=\sin\theta\sin\theta_1\cos\rho,\ x_5=\sin\theta\sin\theta_1\sin\phi.$$

Квадратичный оператор Лапласа $\nabla^2=\Sigma X_{ij}^2$ выглядит в этих координатах следующим образом:

$$\nabla^2=p^2(\theta)+(2\,\mathrm{ctg}\,\theta-\mathrm{tg}\,\theta)\,p(\theta)+\frac{1}{\sin^2\theta}\left[p^2(\theta_1)+\mathrm{ctg}\,\theta_1\,p(\theta_1)\right] \tag{37}$$

$$+\frac{p^2(\phi)}{\sin^2\theta\sin^2\theta_1}+\frac{p^2(\Phi)}{\cos^2\theta}.$$

Здесь $X_{ij}=x_i\,p(x_j)-x_j\,p(x_i)$, $\quad p(z)=\frac{\partial}{\partial z}$.

Базисные векторы неприводимого представления группы R_5 являются собственными функциями оператора ∇^2:

$$\nabla^2 f=-\lambda f.$$

Ортонормированные решения этого уравнения имеют вид:

$$f^{r}_{n\ell m} = C^{r}_{n\ell m} P^{\ell+\frac{1}{2}n}_{\frac{1}{2}(r-n-\ell)}(x)(1-x)^{\frac{\ell}{2}}(1+x)^{\frac{n}{2}} \times \tag{39}$$

$$\times\ P_{\ell}^{m}(x_1)\exp(im\phi)\exp(in\Phi).$$

Здесь $P_q^{\alpha\beta}$ – полином Якоби[17], P_ℓ^m – присоединенная сферическая функция[18],

$$x = \cos 2\theta\ ,\quad x_1 = \cos\theta_1\ ,\ \lambda = r(r+3).$$

Нормированная константа равна:

$$C^{r}_{n\ell m} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{(2\ell+1)(2r+3)}{2^{n+\ell+1}}\ \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\ \frac{\Gamma\left(\frac{r-n-\ell+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r+n+\ell+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r+n-\ell+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r-n+\ell+3}{2}\right)}\right]^{1/2}.$$

Условие оротонормированности:

$$\int f^{r_1}_{n_1\ell_1 m_1}(\theta,\theta_1,\phi,\Phi)\, f^{r_2}_{n_2\ell_2 m_2}(\theta,\theta_1,\phi,\Phi)\,dS = \delta_{12}\ .$$

Здесь DS – элемент площади поверхности пятимерной единичной сферы:

$$dS = \sin^2\theta\cos\theta\sin\theta_1\ d\theta\, d\theta_1\ d\phi\, d\Phi\,.$$

Инфинитезимальные генераторы группы:

$$T_0 = H_1 = -iX_{15} = -i\,p(\phi),\quad S_0 = H_2 = -iX_{12} = -i\,p(\Phi),$$

$$T_+ = E_{10} = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_{34} + iX_{35}) = \exp(i\phi)\,[p(\theta_1) + i\,\mathrm{ctg}\,\theta_1\, p(\phi)]\ \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$A_0^+ = E_{01} = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_{13} + iX_{23}) = \exp(i\Phi)\,[\cos\theta_1\, p(\theta) - \mathrm{ctg}\,\theta \sin\theta_1\, p(\theta_1) - i\,\mathrm{tg}\,\theta\cos\theta_1\, p(\Phi)]\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$A_p^+ = E_{11} = \frac{1}{2}(X_{14} + iX_{15} + iX_{24} - X_{25}) = \exp[\,i(\phi + \Phi)\,] \times$$

$$\times \frac{1}{2}[\sin\theta_1\, p(\theta) + \mathrm{ctg}\,\theta\cos\theta_1\, p(\theta_1) + i\,\frac{\mathrm{ctg}\,\theta}{\sin\theta_1}\, p(\phi) - i\,\mathrm{tg}\,\theta\sin\theta_1\, p(\phi)], \tag{40}$$

$$A_n^+ = E_{-1,1} = \frac{1}{2}(X_{14} + iX_{15} - iX_{24} + X_{25}) = -\exp[\,i(\Phi - \phi)\,] \times$$

$$\times \frac{1}{2}[\sin\theta_1\, p(\theta) + \mathrm{ctg}\,\theta\cos\theta_1\, p(\theta_1) - i\,\frac{\mathrm{ctg}\,\theta}{\sin\theta_1}\, p(\phi) + i\,\mathrm{tg}\,\theta\sin\theta_1\, p(\Phi)],$$

$$E_{-\mu} = (E_\mu)^+.$$

Действуем операторами (40) на функции $f^r_{n\ell m}$:

$$T_0 f^r_{n\ell m} = m\, f^r_{n\ell m},$$

$$T_+ f^r_{n\ell m} = \sqrt{\frac{1}{2}(\ell - m)(\ell + m + 1)}\; f^r_{n\ell\, m+1}$$

$$T^2 f^r_{n\ell m} = \ell(\ell + 1) f^r_{n\ell m}$$

$$S_0 f^r_{n\ell m} = n\, f^r_{n\ell m} \tag{41}$$

$$A_0^+ f^r_{n\ell m} = \left[\frac{\ell^2 - m^2}{2(4\ell^2 - 1)}(r - n + \ell + 1)(r + n - \ell + 2)\right]^{1/2} f^r_{n+1,\,\ell-1,\,m}$$

$$-\left[\frac{(\ell+1)^2 - m^2}{2(2\ell+1)(2\ell+3)}(r - n - \ell)(r + n + \ell + 3)\right]^{1/2} f^r_{n+1,\,\ell+1,\,m}.$$

Выражения для матричных элементов остальных операторов получаются коммутированием операторов (41) между собой и эрмитовым сопряжением.

16. Подводя итоги, можно сказать, что свойства симметрии члена H_1, ответственного за **np** – взаимодействие, приводят к

а) сдвигу уровней энергии H_0 (см. пункты 3,4);

б) расщеплению тех энергетических уровней H_0, которым отвечают ненулевые квантовые числа неприводимого представления группы Γ_0.

В заключение автор приносит глубокую благодарность проф. В.Г.Соловьеву за интерес к работе, участникам семинара ядерной физики Лаборатории теоретической физики ОИЯИ за полезные обсуждения.

Литература

1. Flowers B.H., Szpikowski S. Proc. Phys. Soc., 84, 193, 1964.
2. Kerman A.K., Ann. Phys., (N.Y.) 12, 300, 1961.
3. Maiani L., G. de Franceshi, Fortschr. d. Physik, 13, 279, 1965.
4. Г.Н.Афанасьев. Препринт ОИЯИ Р4-3441, 1967.
5. Blatt I.M., Theory of Superconductivity, A.P. N.Y. 1964.
6. Schrieffer I.R., Theory of Superconductivity, Benjamin, N.Y., 1964.
7. Norieres P. Le probleme a N corps, Dunod Paris, 1963.
8. Lipkin H.I., Lie Groups for Pedestrians, North-Holland. Publ. Co. Amsterdam, 1965.
9. Goshen S., Lipkin H.I. in Spectroscopic and Group Theoretical Methods in Physics, Racah Memorial Volume ed by F.Bloch, S.G.Cohen, A. de Shalit et al. North-Holland Publ. Co. Amsterdam, 1968.

10. K.T.Hecht. Nucl.Phys. 63, 177, 1965.

11. I.C.Parich. Nucl.Phys. 63, 214, 1965.

12. K. Helmers. Nucl.Phys., 23,. 594, 1961.

13. M. Ichimura. Progr.Theor.Phys., 32, 757, 1964.

14. B.H. Flowers , S.Szpikowski. Proc. Phys.Soc. 86, 551, 1965.

15. N.Kemmer, D.L.Pursey, S.A.Williams. J.Math.Phys. 9, 1224, 1968.

16. И.М.Гельфанд, Р.А.Минлос, З.Я.Шапиро. Представления группы вращений и группы Лоренца, Физматгиз, Москва, 1958.

17. E.D.Rainville. Special Functions, McMillan, N.Y. 1960.

18. L.Robin. Functions Spheriques de Legendre et functions spheroidales, tome I, Hauthier-Villars, Paris, 1957.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 августа 1969 года.

Таблица

$[X, Y]$

$\downarrow X$ \ $Y \rightarrow$	T_0	T_+	T_-	S_0	A_0^+	A_p^+	A_n^+	A_0	A_p	A_n
T_0	0	T_+	$-T_-$	0	0	A_p^+	$-A_n^+$	0	$-A_p$	A_n
T_+	$-T_+$	0	T_0	0	A_p^+	0	A_0^+	$-A_n$	$-A_0$	0
T_-	T_-	$-T_0$	0	0	A_n^+	A_0^+	0	$-A_p$	0	$-A_0$
S_0	0	0	0	0	A_0^+	A_p^+	A_n^+	$-A_0$	$-A_p$	$-A_n$
A_0^+	0	$-A_p^+$	$-A_n^+$	$-A_0^+$	0	0	0	S_0	T_-	T_+
A_p^+	$-A_p^+$	0	$-A_0^+$	$-A_p^+$	0	0	0	T_+	S_0+T_0	0
A_n^+	A_n^+	$-A_0^+$	0	$-A_n^+$	0	0	0	T_-	0	S_0-T_0
A_0	0	A_n	A_p	A_0	$-S_0$	$-T_+$	$-T_-$	0	0	0
A_p	A_p	A_0	0	A_p	$-T_-$	$-S_0-T_0$	0	0	0	0
A_n	$-A_n$	0	A_0	A_n	$-T_+$	0	T_0-S_0	0	0	0

Примечание: Жирными линиями окаймлены последовательные подалгебры, используемые при построении базиса.