

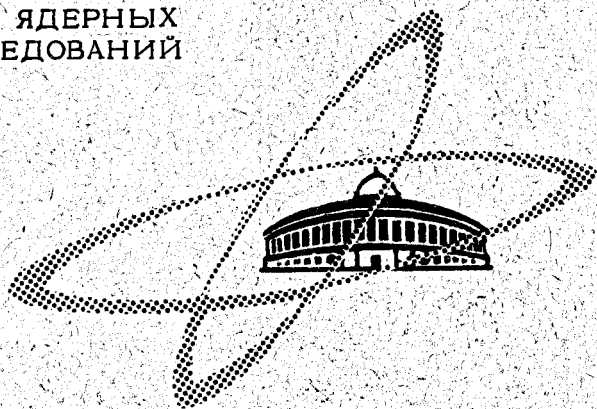
M-335

X-69

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P4 - 4676



А.В.Матвеевко, Л.И.Пономарев

МЕДЛЕННЫЕ СТОЛКНОВЕНИЯ
В СИСТЕМЕ ТРЕХ ТЕЛ,
ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПО ЗАКОНУ КУЛОНА

III. Длины рассеяния для процессов столкновения
мезоатомов водорода

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1969

Р4 - 4676

А.В.Матвеевко, Л.И.Пономарев

МЕДЛЕННЫЕ СТОЛКНОВЕНИЯ
В СИСТЕМЕ ТРЕХ ТЕЛ,
ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПО ЗАКОНУ КУЛОНА

III. Длины рассеяния для процессов столкновения
мезоатомов водорода

Направлено в ЖЭТФ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

8044/2 чр

1. В мезоатомной и ядерной физике представляют интерес реакции /1/

$$p \mu^- + p \rightarrow p + p \mu^- \quad (1a)$$

$$d \mu^- + d \rightarrow d + d \mu^- \quad (1б)$$

$$t \mu^- + t \rightarrow t + t \mu^- \quad (1в)$$

из которых две первые исследованы экспериментально /2/ и теоретически /3,4/. Электронные оболочки атомов водорода, на ядрах которых рассеиваются мезоатомы, не влияют на ход процессов (1), поскольку размеры мезоатомов много меньше характерных атомных расстояний. По этой причине процессы рассеяния (1) почти в чистом виде реализуют квантовомеханическую задачу трех тел, взаимодействующих по закону Кулона. Частный случай этой задачи, процесс

$$p e^- + p \rightarrow p + p e^-, \quad (2)$$

рассмотрен в предыдущей работе авторов /5/, где подробно оговорены детали метода и приведена необходимая библиография.

2. Как и в реакции (2), резонансный характер процессов столкновения (1) позволяет ограничиться двухуровневым приближением при вычислении сечения перезарядки $\sigma_{ex}(k)$ без учета спинов мезона и ядер

$$\sigma_{ex}(k) = \frac{\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \sin^2(\delta_g^{\ell} - \delta_u^{\ell}), \quad (3)$$

где

$$k^2 = 2ME; \quad 2M = \frac{M_p}{M_{\mu}} + 1/2 = \frac{M_p}{m}; \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{M_{\mu}} + \frac{1}{2M_p}$$

(для d и t - аналогично), а E - энергия столкновения. Фазы δ_g^{ℓ} и δ_u^{ℓ} вычисляются из уравнений

$$\frac{d^2}{dR^2} \chi_{g,u}^{\ell}(R) + [k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{R^2} - V_{g,u}(R)] \chi_{g,u}^{\ell}(R) = 0, \quad (4)$$

где

$$V_{g,u}(R) = 2M [W_{g,u}(R) - W_{g,u}(\infty)] + [K_{g,u}(R) - K_{g,u}(\infty)]$$

и все величины даны в системе $\hbar = c = m = 1$.

Симметричный $W_g(R)$ и антисимметричный $W_u(R)$ термы систем (1), состоящих из двух ядер и μ^- -мезона, а также соответствующие им матричные элементы $K_g(R)$ и $K_u(R)$, учитывающие адиабатические поправки на движение ядер, вычислены в работах /6/.

Для процесса (2) учет адиабатических поправок практически не влияет на результаты вычислений, поскольку в этом случае $2M \approx 10^3$,

однако при рассеянии мезоатомов эти поправки необходимо учитывать. Сравнительно небольшая вариация величины $2M$ для различных изотопов водорода ($2M = 10+30$) приводит к значительным различиям в ходе процессов (1а-1в).

На рис. 1 приведены графики сечений $\sigma_{ex}(k)$ для реакций (1). Из них видно, что при энергии столкновений $E < 10^{-2}$ эв все сечения стремятся к постоянному пределу

$$\sigma = \pi (a_g - a_u)^2, \quad (5)$$

где a_g и a_u - длины рассеяния соответственно в четном и нечетном каналах. Сечение реакции (1б) по сравнению с реакциями (1а) и (1в) сильно подавлено, что объясняется одинаковым знаком длин рассеяния b_g и b_u для этого процесса. В остальном характер зависимости сечений $\sigma_{ex}(k)$ от энергии столкновения E одинаков для всех реакций (1): пологий спад (или рост) при $E < 1$ эв, резкие всплески в области $1 \text{ эв} < E < 100 \text{ эв}$ и плавный спад при $E > 100 \text{ эв}$.

Эти особенности становятся понятными при взгляде на рис.2-4, где приведены графики функций $\Delta_\ell = \delta_g^\ell - \delta_u^\ell$. Пологие участки сечений при $E < 1$ эв соответствуют чистому s-рассеянию. Резонансы в сечениях появляются при тех энергиях столкновения, при которых в $\sigma_{ex}(k)$ начинают давать вклад парциальные сечения $\sigma_\ell(k)$ с $\ell \neq 0$, причем те из них, для которых разность Δ_ℓ при данной энергии столкновения E принимает значения $\Delta_\ell = \frac{\pi}{2} (2n+1)$. При $E > 100$ эв таких фаз становится много, картина усредняется, и сечение $\sigma_{ex}(k)$ вновь плавно зависит от k .

3. Формула (3) для сечения перезарядки $\sigma_{ex}(k)$ имеет реальный смысл лишь при энергиях столкновений $E > 1$ эв. В интересной для экспериментов области энергий $E = 10^{-2} + 1$ эв картина усложняется за

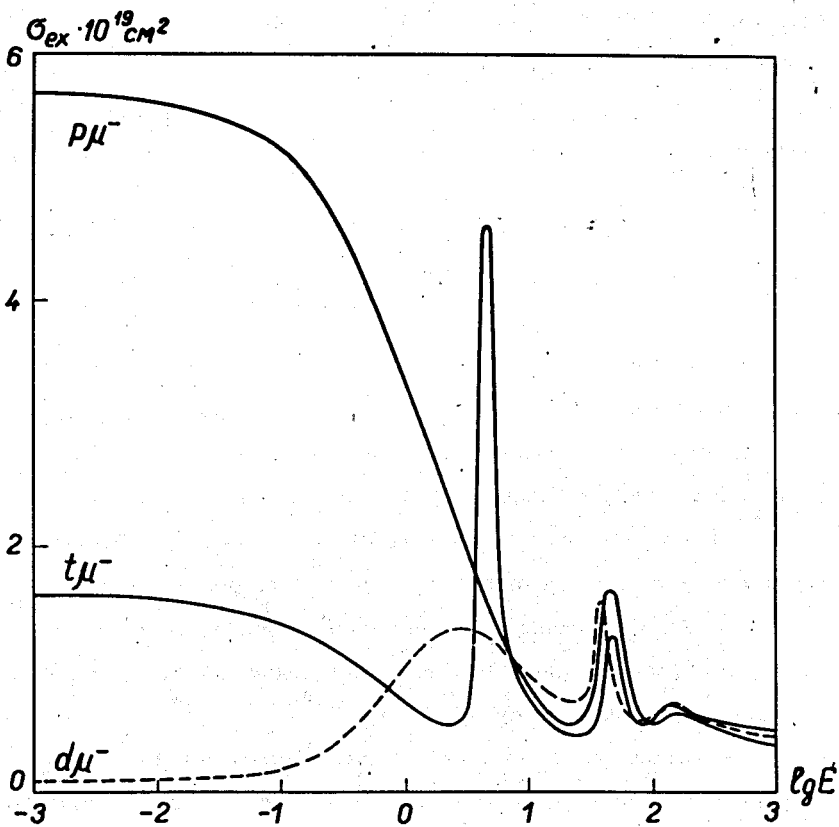


Рис.1. Графики сечений σ_{ex} (К) для процессов (1а-1в). Область s - рассеяния простирается вплоть до энергий столкновения $E < 1$ эв; при $1 < E < 100$ эв, - область резонансов; борновское приближение годится лишь при $E > 10^6$ эв.

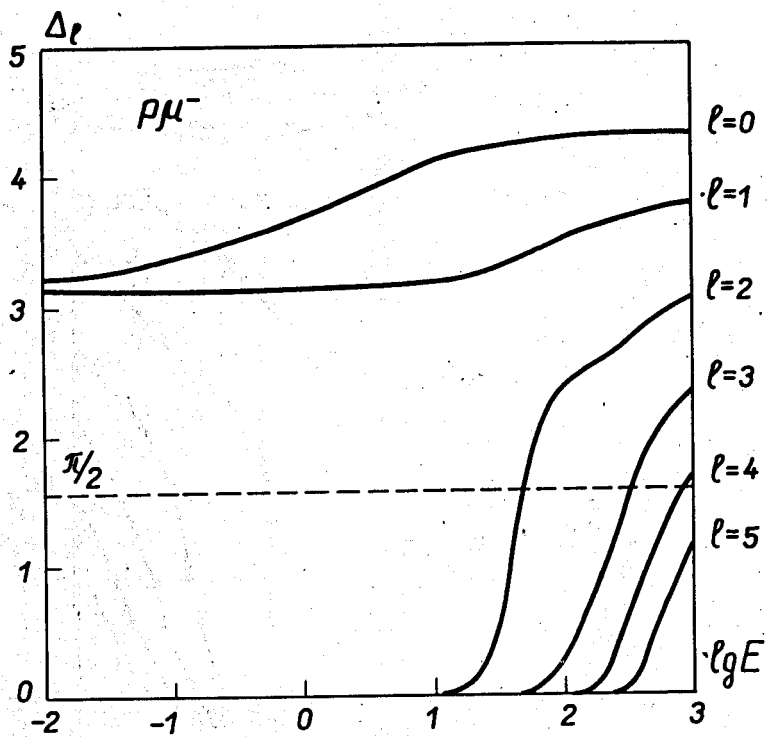


Рис.2. Графики разности фаз рассеяния $\Delta_\ell = \delta_\alpha^\ell - \delta_u^\ell$ для процесса (1а), из которых следует, что в потенциалах $V_g^\ell(R)$ при $\ell = 0; 1$ существует по одному колебательному состоянию системы $p\bar{\mu}, p$, а резонанс в сечении $\sigma_{ex}(K)$ при $E \approx 50$ эв обязан фазе Δ_2 , которая при этой энергии принимает значение $\pi/2$.

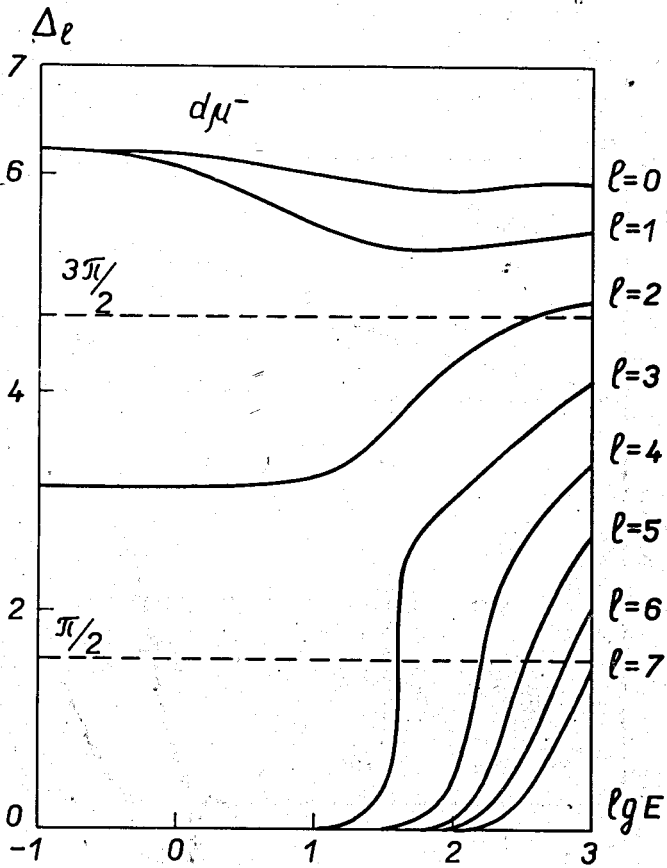


Рис.3. Графики Δ_ℓ (К) для процесса (16). В потенциале $V_g^\ell(R)$ при $\ell = 0; 1$ существует по два колебательных уровня системы $d\mu^-d$, при $\ell = 2$ - один уровень. Резонанс в сечении при $E \approx 50$ эв обязан фазе Δ_3 .

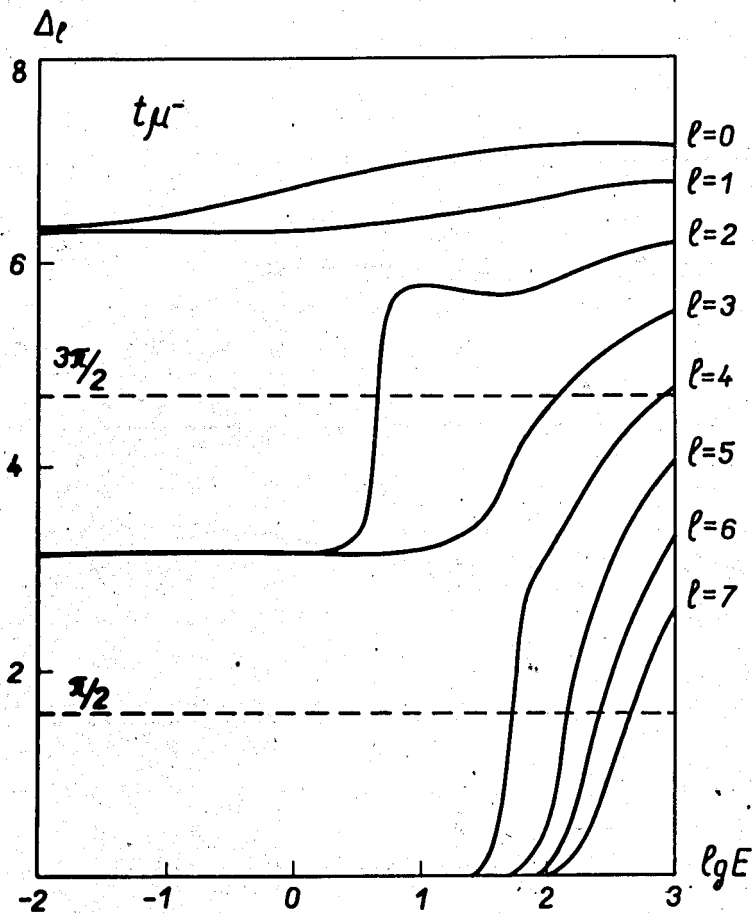


Рис.4. Графики Δ_ℓ (К) для процесса (1в). При $\ell = 0; 1$ существуют по два связанных колебательных состояния системы $t_{\mu^-} - t$; при $\ell = 2; 3$ - по одному уровню. Резонанс в сечении при $E = 4,5$ эв вызван фазой, Δ_2 , при $E \approx 50$ эв - фазой Δ_4 .

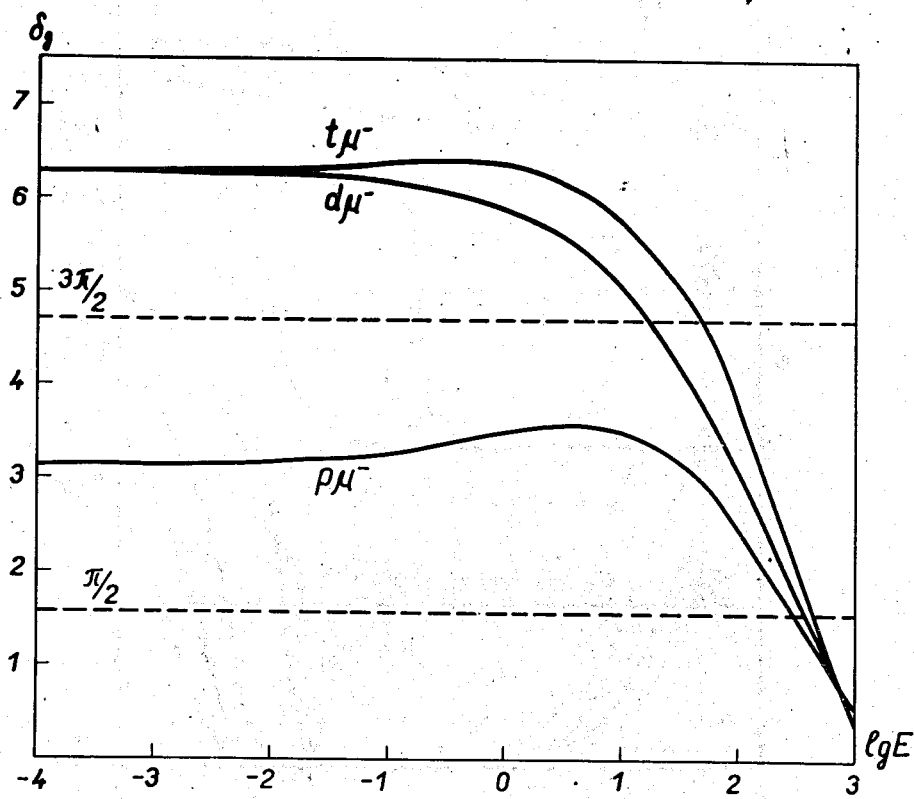


Рис.5. Графики фаз $\delta_0^0(K)$ при $\ell = 0$ для процессов (1а-1в). При $E = 10^3$ эв область борновского рассеяния еще не достигается.

счет взаимодействия спинов мезона и ядер. Однако даже без учета спинов подобное исследование представляет методический интерес как хорошая иллюстрация общих результатов теории потенциального рассеяния. Кроме того, оно позволяет вычислить длины рассеяния a_g и a_u , которые используются затем для более реальных расчетов.

На рис. 5 приведены фазы, рассеяния $\delta_g^0(k)$ в четном канале при $\ell = 0$. Это плавные функции, которые при $k \rightarrow 0$ в соответствии с теоремой Левинсона, стремятся к пределам $\delta_g^0(0) = \pi p$, где p - число связанных состояний в потенциале $W_g(R)$, причем $p=1$ для системы $p\mu^-p$ и $p=2$ для систем $d\mu^-d$ и $t\mu^-t$. В нечетном канале фазы $\delta_u^\ell(0)=0$ и монотонно уменьшаются с ростом k .

Используя равенство $\Delta_\ell(0) = \delta_g^\ell(0)$ и теорему Левинсона, из рис. 2-4 легко установить число уровней в системах $p\mu^-p$, $d\mu^-d$, $t\mu^-t$ в состояниях с произвольным орбитальным моментом ℓ . В частности, рис. 3 разрешает давний вопрос ^{/1/} о существовании второго колебательного уровня в системе $d\mu^-d$ с моментом $\ell = 1$.

4. Результаты вычислений фаз $\delta_{g,u}^\ell$ и парциальных сечений $\delta_\ell(k)$ показывают, что область чистого s -рассеяния для процессов (1) простирается вплоть до энергий столкновения $E \approx 1$ эв. Длины рассеяния a_g и a_u , b_g и b_u , c_g и c_u соответственно для реакций (1a-1б) приведенные в таблице 1, вычислены по формуле ^{/7/}

$$k \cdot \operatorname{ctg} \delta = -\frac{1}{a} + \frac{\pi a}{3a^2} k + \frac{2a}{3a} k^2 \ln \frac{ak^2}{16} \quad (6)$$

$$a = \frac{9M}{2},$$

которая справедлива для потенциалов с асимптотикой $V(R) = -\frac{a}{R^4}$ при $R \rightarrow \infty$. Все значения приведены к мезоатомным единицам ($\hbar=c=M_\mu=1$).

Таблица 1

Процесс	$p \mu^- + p$		$d \mu^- + d$		$t \mu^- + t$	
	a_g	a_u	b_g	b_u	c_g	c_u
Длины рассеяния						
Герштейн и Зельдович /1/	-17,3	5,25	6,67	5,76	-	-
Cohen et al. /4/	-11,0	5,0	-	-	-	-
Данная работа	-13,3	3,7	5,4	3,1	-6,6	2,4

Для проверки вычислений длины рассеяния найдены затем непосредственно из уравнений:

$$\frac{d}{dR} a(R) = V(R) [R - a(R)]^2 \quad (7)$$

$$a(0) = 0 \quad a = a(\infty).$$

Эти уравнения следуют из метода фазовых функций /7/ и приводят к тем же результатам, что и формула (6).

Соотношение (6) справедливо лишь при малых k : при $E > 0,1$ эв числа членов в формуле (6) уже недостаточно, чтобы обеспечить постоянство длины рассеяния $a = \text{const}$. Практически область применимости понятия длины рассеяния еще уже, поскольку формула (5) следует из формулы (3) лишь в предположении $\delta(k) \approx a \cdot k$, что эквивалентно отбрасыванию последних двух членов в разложении (6). В этом случае интервал энергий, в котором условие $a \approx \text{const}$ выполняется с точностью $\epsilon = 10^{-2}$, ограничен условием $E \leq 10^{-2}$ эв. В этой области энергий

все результаты, полученные в приближении длины рассеяния, остаются справедливыми (см. рис. 6 и 7).

Из таблицы 1 следует, что прежние вычисления длин рассеяния a_g и b_g в четном канале довольно хорошо совпадают с нашими, в то время как величины a_u и b_u различаются в 1,5-2 раза. Эти различия объясняются приближенным характером прежних вычислений. В частности, в них не учитывался неглубокий минимум терма $W_u(R)$ при $R = 12,55$, влияние которого на процесс рассеяния оказалось значительным ^{/5/}. Рис.8 иллюстрирует это влияние: при $R_0 = 10,5$, где потенциал $V_u(R)$ обращается в нуль, длина рассеяния $a_u(R)$ достигает максимума ^{x/}, причем $c_u(R_0) > b_u(R_0) > a_u(R_0)$. В прежних вычислениях эти значения принимались за окончательные. Однако дальнейшее интегрирование уравнения (7) с учетом далекодействующей асимптотики $V_u(R) = -\frac{a}{R^4}$ и минимума при $R = 12,55$ сильно изменяет эти значения и приводит к обратному неравенству: $a_u > b_u > c_u$.

Точность метода фазовых функций ограничена лишь достоверностью величин $W(R)$ и $K(R)$, которые известны с точностью $\epsilon = 10^{-8}$ и выше. В таблице 1 приведены только две значащих цифры для длин рассеяния, поскольку точность метода возмущенных стационарных состояний в двухуровневом приближении ограничена величиной $(2M)^{-2} \approx (M_\mu/M_p)^2 \approx 10^{-2}/4$.

6. Реальные эксперименты, для анализа которых обычно используют понятие длины рассеяния, выполнены при энергиях столкновений $E \approx 1$ эв. Эта энергия превышает не только верхнюю границу применимости понятия длины рассеяния, но и величину сверхтонкого расщепления для мезоатомов водорода, которое возникает при взаимодействии спинов мезона и протона (дейтерия, трития) ^{/3/}.

^{x/} Этот факт легко установить непосредственно из уравнения (7).

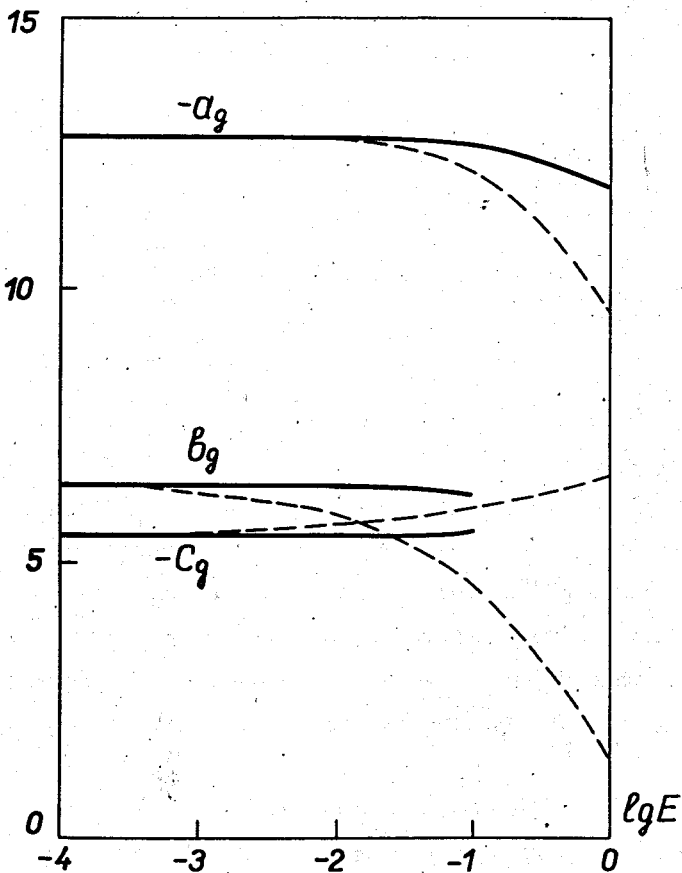


Рис.6. Длины рассеяния a , b , c в потенциале $V_g(R)$ соответственно для процессов $^q(1a-1b)$, вычисленные из уравнения (7) (сплошная кривая), а также по формуле $a = \delta/k$ (пунктирная кривая). Видно, что используемое обычно понятие длины рассеяния применимо лишь до энергий $E \leq 10^{-2}$ эв.

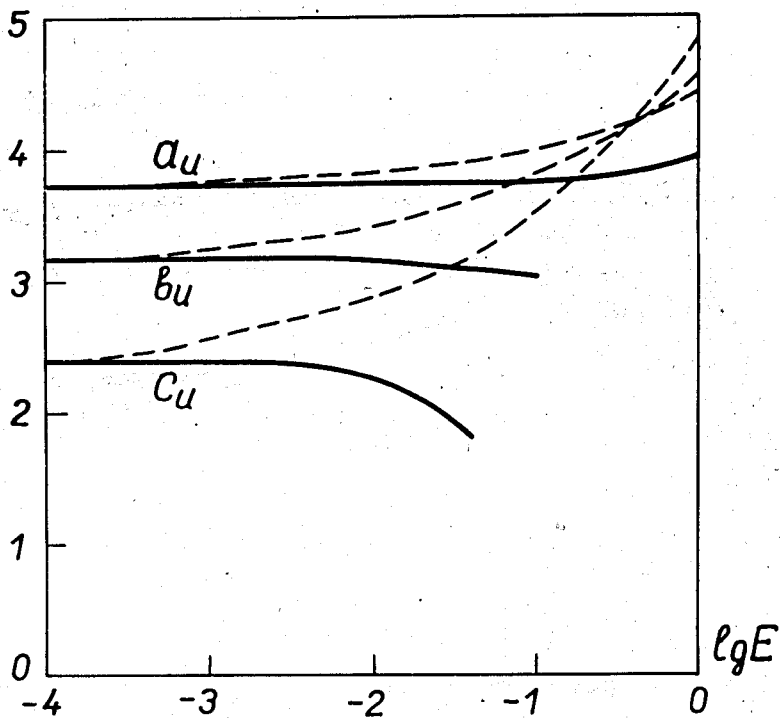


Рис.7. Длины рассеяния a_u , b_u , c_u в потенциале $V_u(R)$ для процессов (1a-1в). Смысл обозначений тот же, что и на рис. 6.

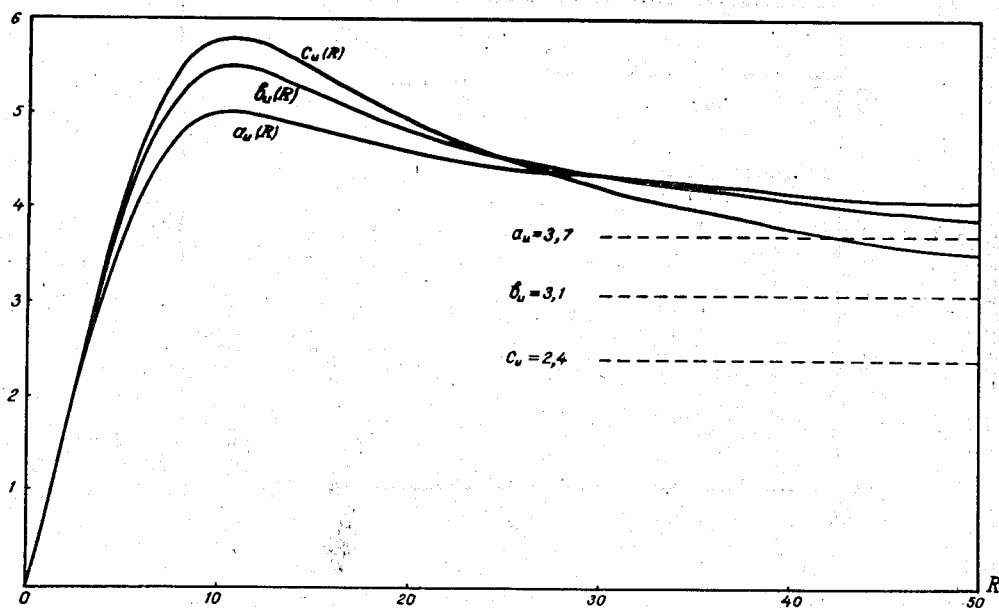


Рис.8. Графики функций $a(R)$, найденные из уравнений (7), из которых следует необходимость учета дальнедействующей асимптотики потенциалов $V_u(R) \approx -\frac{a}{R^4}$ при вычислении длин рассеяния $a = a(\infty)$: В прежних расчетах полагалось $a = a(10)$, что явно недостаточно - истинное значение достигается лишь при $R \approx 200$.

$$\Delta E = \begin{cases} 0,25 \text{ эв для } p \mu^- \\ 0,046 \text{ эв для } d \mu^- \\ 0,089 \text{ для } t \mu^- \end{cases} \quad (8)$$

Наличие сверхтонкого расщепления ΔE изменяет ход процессов рассеяния (1). В частности, при этом добавляется неупругий канал для переходов между компонентами сверхтонкой структуры при столкновениях.

В работах Герштейна ^{/3/} получены формулы для этих сечений через длины рассеяния a_g и a_u . Например, для процесса (1a) при $E > \Delta E$ сечение перехода из состояния с параллельными спинами мезона и протона ($F=1$) в состояние с антипараллельными спинами ($F=0$) равно

$$\sigma_{1 \rightarrow 0} = 4\pi \frac{k_0}{k} \frac{3(a_g - a_u)^2}{16 + k_0^2(3a_u + a_g)^2} \quad (9)$$

$$k_0 = (2M \Delta E)^{1/2}$$

Очевидно, что формулы такого типа можно применять лишь в той области энергий, где еще сохраняет смысл понятие длины рассеяния. Кроме того, при их выводе предполагается, что матрица рассеяния для процессов (1) зависит только от двух параметров, например, δ_g и δ_u (или, что эквивалентно, a_g и a_u), которые вычисляются из двух независимых уравнений (4) в четном и нечетном каналах. В действительности, при учете спинового взаимодействия уравнения (4) нельзя считать независимыми, и в матрице рассеяния необходимо появится третий параметр (параметр смешивания ϵ), который можно найти, решая связанную систему уравнений следующего вида ^{/3/} (для определенности выберем процесс (1a)):

$$\frac{1}{2M} \frac{d^2 \chi_0}{dR^2} + [E + \Delta E - \frac{1}{4}(3U_u + U_g)] \chi_0 + \frac{\sqrt{3}}{4}(U_g - U_u) \chi_1 = 0 \quad (10)$$

$$\frac{1}{2M} \frac{d^2 \chi_1}{dR^2} + [E - \frac{1}{4}(3U_g + U_u)] \chi_1 + \frac{\sqrt{3}}{4}(U_g - U_u) \chi_0 = 0,$$

где функции χ_0 и χ_1 соответствуют синглетному ($F=0$) и триплетному ($F=1$) состояниям системы $p\mu^-$ и введены обозначения

$$U_{g,u} = W_{g,u}(R) - W_{g,u}(\infty) + \frac{1}{2M} [K_{g,u}(R) - K_{g,u}(\infty)]$$

ΔE - сверхтонкое расщепление уровней $F=0$ и $F=1$, а энергия столкновения E при такой записи уравнения отсчитывается от верхнего триплетного уровня.

В заключение хотим поблагодарить В.В. Бабикова за многочисленные консультации и С.С. Герштейна за обсуждения и замечания, которые существенно стимулировали эту работу.

Л и т е р а т у р а

1. Я.Б. Зельдович, С.С. Герштейн. УФН 71, 3, 581, 1960.
С.С. Герштейн, В.И. Петрухин, Л.И. Пономарев, Ю.Д. Прокошкин. УФН 97, 3, 1969.
2. A. Alberigi, Quaranta, A. Bertin, G. Matone, F. Palmonari, A. Placci, P. Dalpiaz, G. Torelli, Nuovo Cimento, 47, 72, 1967.
В.П. Джелепов, П.Ф. Ермолов, В.В. Фильченков. ЖЭТФ 49, 393, 1966.
3. С.С. Герштейн. ЖЭТФ 34, 463, 1958. ЖЭТФ 40, 689, 1961.
4. S. Cohen, D.L. Judd and R.J. Riddell, Phys. Rev., 119, 386, 1960.
5. А.В. Матвеевко, Л.И. Пономарев. Препринт ОИЯИ Р4-4481, Дубна, 1969.

6. T.M. Peek, J.Chem.Phys., 43, 3004, 1965; Sandia Corporation Report No. SC-RR-65-67, 1965. G.Hunter, B.F.Gray, H.O.Prichard, J.Chem.Phys., 45, 3806, 1966.
7. В.В. Бабилов. Метод фазовых функций в квантовой механике, Москва, изд. Наука, 1968.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 августа 1969 года.