СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р4 - 4647

И.М.Франк

ОСОБЕННОСТИ КОРОТКОВОЛНОВОЙ ЧАСТИ ДОППЛЕРОВСКОГО СПЕКТРА В СРЕДЕ

ЛАБОРАТОРИЯ НЕЙТРОННОЙ ФИЗИКИ

1969

Р4 - 4647

И.М.Франк

ОСОБЕННОСТИ КОРОТКОВОЛНОВОЙ ЧАСТИ ДОППЛЕРОВСКОГО СПЕКТРА В СРЕДЕ

Франк И.М. Р4-4647

Особенности коротковолновой части допплеровского спектра в среде

Рассматривается эффект Допплера в преломляющей среде. Основное внимание обращено на особенности допплеровского спектра в области частот, превышающих плазменную частоту среды.

Сообщения Объединенного института ядерных исследований

Дубна, 1969

Frank I.M. P4-4647

Peculiarities of the Short-Wave Part of the Doppler Spectrum in a Medium

The Doppler effect in a refractive medium is considered. Attention is focussed on the peculiar features of the Doppler spectrum in the region of frequencies exceeding the plasma frequency of the medium.

Communications of the Joint Institute for Nuclear Research.

Dubna, 1969

Как известно, эффект Доплера в преломляющей среде обладает рядом особенностей. Одной из них является возможность движения излучателя со скоростью, превышающей фазовую скорость света и возникновение при этом так называемого аномального эффекта Допплера, частоты которого удовлетворяют условию

$$\omega = \frac{\omega_0}{\beta n(\omega)\cos\theta - 1}; \quad \beta n(\omega)\cos\theta > 1. \tag{1}$$

При этом $\omega_0 = \omega_0' \sqrt{1-\beta^2}$, где ω_0' – собственная частота излучателя при $\beta = 0$. Наряду с аномальным эффектом Допплера имеет место и нормальный эффект Допплера, для которого

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - \beta n(\omega)\cos\theta}, \quad \beta n(\omega)\cos\theta < 1. \tag{2}$$

Иногда при упрощенном рассмотрении пренебрегают дисперсией, полагая $n(\omega) = n_1$. Это приводит не только к правильному выводу, что аномальный эффект Допплера возможен лишь для острых углов ($\beta n_1 \cos\theta > 1$), но и к ошибочному утверждению, что нормальный эффект Допплера осуществляется только для достаточно больших углов θ (при $\beta n_1 \cos\theta < 1$ для заданного n_1). В этом случае граница между ними определялась бы соотношением

$$\beta n_1 \cos\theta_c = 1,$$

т.е. условием излучения Вавилова-Черенкова для показателя преломления n_1. В действительности, однако, пренебрежение дисперсией недопустимо и, как было показано еще в первоначальном рассмотрении /1/, нормальный эффект Допплера возможен для любых углов θ от 0 до π. В преломляющей среде при малых углах θ нормальная допплеровская частота смещается в область аномальной дисперсии, где показатель преломления незначительно превышает единицу или даже меньше ее, так что $\beta n(\omega)\cos\theta<1$. Сложная зависимость n от ω в реальной среде приводит и к тому, что уравнение Допплера при заданных ω_0, θ и β может иметь несколько решений. Таким образом, в данном направлении может излучиться свет, содержащий не одну, а большее число допплеровских частот. Такой сложный эффект Допплера обязательно имеет место при аномальном эффекте Допплера /1/, но он возможен и для нормальных допплеровских частот. Поэтому заслуживает внимания исследование поведения нормальных допплеровских частот, особенно в области коротких длин волн, для которой ранее не проводилось детального анализа.

Положим показатель преломления для высоких частот равным

$$n(\omega)=1-\frac{\omega_p^2}{2\omega^2}, \qquad \omega>\omega_p, \tag{3}$$

где ω_p - плазменная или ленгмюровская частота $\omega_p=\left(\frac{4\pi Ne^2}{m}\right)^{1/2}$. Здесь N - число электронов в единице среды и m - масса электрона. При этом мы ограничимся областью частот, в которой эта формула заведомо имеет физический смысл, т.е. будем предполагать, что $\omega>\omega_p$. Тогда, подставляя $n(\omega)$ из (3) в уравнение (2), для нормального эффекта Допплера имеем:

$$\omega=\frac{\omega_0}{1-\beta\cos\theta+\frac{\omega_p^2}{2\omega^2}\cos\theta}; \quad \omega>\omega_p. \tag{4}$$

Уравнение (4) отличается от уравнения Допплера в вакууме наличием третьего члена в знаменателе. Это квадратное уравнение относительно ω и, решая его, получаем

$$\omega = \frac{\omega_0}{2(1-\beta\cos\theta)}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{2\omega_p^2\,\beta\cos\theta(1-\beta\cos\theta)}{\omega_0^2}}\,\right]; \quad \omega > \omega_p . \tag{5}$$

Если обе частоты, соответствующие знаку плюс и минус перед корнем (5), больше ω_p , то получаем сложный эффект Доплера. При этом уравнение (4), очевидно, может определять допплеровские частоты только при условии, что под корнем квадратным (5) стоит положительная величина или ноль. Следовательно, должно быть

$$\frac{\omega_0}{1-\beta\cos\theta} \geqslant \frac{2\omega_p^2}{\omega_0}\beta\cos\theta . \tag{6}$$

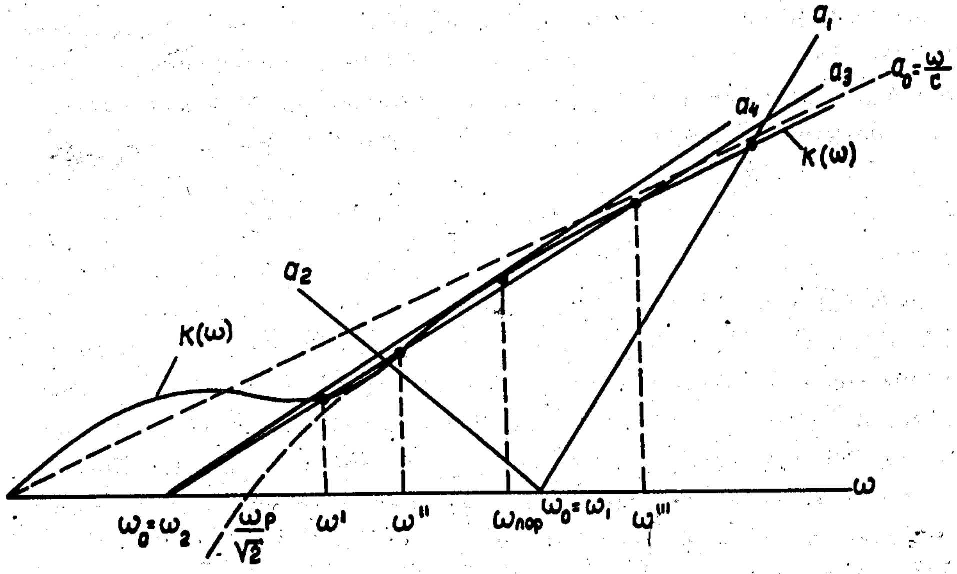
Левая часть неравенства (6), очевидно, равна допплеровской частоте в вакууме при тех же β и θ , на величину которой в (6) накладывается, таким образом, определенное условие. Если неравенство становится равенством, то обе допплеровские частоты, соответствующие уравнению (5), совпадают и определяют пороговую частоту сложного эффекта Допплера в области применимости уравнения (4). Вопрос об этом пороге будет еще рассмотрен в последующем тексте.

Для более детального рассмотрения поведения допплеровских частот представим уравнение (2) в виде, в котором его удобно исследовать

$$f(\omega,\ v\cos\theta) = k(\omega) - \frac{\omega-\omega_0}{v\cos\theta} = 0; \qquad k(\omega) = \frac{n(\omega)\,\omega}{c} \tag{7}$$

$$k(\omega) = \frac{1}{c}\left(\omega - \frac{\omega_p^2}{2\omega}\right) \qquad \omega > \omega_p . \tag{8}$$

Уравнение (7) тождественно с (2), а при $k(\omega)$, равном (8), тождественно (4). Отметим, что уравнение (7) правильно и для аномального эффекта Допплера, если изменить в нем знак перед ω_0 на обратный, а также для излучения Вавилова-Черенкова $(\omega_0 = 0)$. На рис. 1 оба члена уравнения (7) представлены графически. Кривой представляется $k(\omega)$, причем в области ω , много больших ω_p , $k(\omega)$ подчиняется уравнению (8) и имеет асимптотическую зависимость $\displaystyle k(\omega)_{\omega\to\infty} = \frac{\omega}{c}$ (пунктирная



a_1
a_3
$a_0 = \frac{\omega}{c}$
a_4
$K(\omega)$
a_2
$K(\omega)$
ω
$\omega_0 = \omega_2$
$\frac{\omega_p}{\sqrt{2}}$
ω'
ω''
$\omega_{пор}$
$\omega_0 = \omega_1$
ω'''

Рис.1

прямая $a_0 = \frac{\omega}{c}$ (рис. 1)). В области оптических частот, очевидно, $n(\omega)>1$ и $k(\omega)$ идет выше прямой $a_0 = \frac{\omega}{c}$. При этом в реальной среде при $\omega \leqslant \frac{\omega_p}{\sqrt{2}}$ возможно, что $k(\omega)>0$ вопреки уравнению (8). Прямые a_1, a_2, a_3 и a_4 это $\frac{\omega - \omega_0}{v\cos\theta}$ для разных ω_0 и $v\cos\theta$. Очевидно, что пересечения прямых $a_1 \ldots a_4$ с кривой $k(\omega)$ дают решения уравнения (7), т.е. величины ω, удовлетворяющие (2), а в тех случаях, когда они лежат в области $\omega > \omega_p$, то (4) и (5) (такой графический метод нахождения допплеровских частот уже использовался в работах /1,2,3/). При анализе поведения допплеровских частот следует различать два случая в зависимости от величины отношения $\frac{\omega_p}{\omega_0}$.

Допустим, что $\omega_0 = \omega_1 > \omega_p$, т.е. собственная частота лежит в области применимости (3). Предположим, что $\theta > \frac{\pi}{2}$, т.е. $\cos\theta < 0$. На рис. 1 этому соответствует прямая $a_2 = \frac{\omega_0 - \omega}{|v\cos\theta|}$, всегда пересекающая кривую $k(\omega)$. Этот результат, конечно, не зависит от величины ω_0, которая может быть как большой, так и малой и этим определяется только, в какой области спектра лежит допплеровская частота. Если $\theta > \frac{\pi}{2}$, то под корнем (5) стоит положительная величина. Поэтому всегда имеется решение (5), соответствующее знаку плюс перед корнем (решение со знаком минус не имеет физического смысла, так как ω при этом отрицательна). При этом из (5) видно, что заведомо $\omega > \omega_p$, если

$$\omega_0 = \omega_1 > \omega_p \, (1 + \beta \, |\cos\theta|).$$

Величине $\theta < \frac{\pi}{2}$, т.е. $\beta\cos\theta > 0$ и $\omega_0 = \omega_1$ соответствует прямая a_1, которая также обязательно пересекает кривую $k(\omega)$, так как наклон прямой $\frac{da_1}{d\omega} = \frac{1}{v\cos\theta}$ больше, чем $\frac{1}{c}$, к которому стремится $\frac{dk(\omega)}{d\omega}$. При этом допплеровская частота, как и следует ожидать, смещена в сторону коротких длин волн по сравнению с $\omega_0 = \omega_1$. Этот же результат сразу виден и из (5). В самом деле, максимальное значение $\beta\cos\theta(1 - \beta\cos\theta)$ достигается при $\beta\cos\theta = \frac{1}{2}$ и равно $\frac{1}{4}$. Таким образом, минимальное значение величины, стоящей под знаком корня (5), равно $1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega_0^2}$. Оно всегда положительно, если $\omega_0 > \omega_p$, а следовательно, у (5) имеется решение, определяющее для ω действительную величину. Физический смысл имеет решение со знаком плюс перед корнем (5), т.е. $\omega>\omega_0$. Что касается решения со знаком минус перед корнем, то ему соответствует $\omega < \frac{\omega_p}{\sqrt{2}}$, для которого, согласно (8), $k(\omega)$ -отрицательно (второе пересечение a_1 с $k(\omega)$ (см. рис. 1) может лежать только ниже оси абсцисс, т.е. при $k(\omega) < 0$).

Допустим, что второй член под корнем квадратным в (5) мал по сравнению с единицей. При $\frac{\omega_p}{\omega_0} < 1$ этому условию легко удовлетворить, если $\frac{\omega_p}{\omega_0} \ll 1$ или $\beta\cos\theta \ll 1$. Тогда для знака плюс перед корнем в (5) получаем

$$\omega = \frac{\omega_0}{1-\beta\cos\theta} - \frac{\omega_p^2}{2\omega_0}\beta\cos\theta. \tag{9}$$

Если $\beta\cos\theta \ll 1$, то допплеровский сдвиг, как и следовало ожидать, мал и отличается от допплеровского сдвига в вакууме наличием второго члена в (9). Случай $(1-\beta\cos\theta) \ll 1$, при котором второй член под корнем (5) также может быть мал, требует специального рассмотрения, которое будет проведено ниже.

Таким образом, при $\omega_0 = \omega_1 > \omega_p$ получаем, что для каждого θ как правило, имеет место только одна частота, удовлетворяющая уравнению (2), и, таким образом, нормальный Допплер-эффект в этом случае не является сложным. Иное положение возможно, если $\omega_0 < \omega_p$, т.е. лежит в оптической области частот.

Допустим, что $\omega_0 = \omega_2 < \omega_p$. Нетрудно убедиться, что прямая a_3, соответствующая $\omega_0 = \omega_2$ на рис. 1, всегда пересекает кривую $k(\omega)$, т.е. при любом $n(\omega)$, β и θ имеется нормальная допплеровская частота, удовлетворяющая (2). При малом наклоне прямой a_3 ($\frac{1}{v\cos\theta}$ достаточно близком к $\frac{1}{c}$) допплеровская частота смещается в область аномальной дисперсии (частота ω' на пересечении прямой a_3 с кривой $k(\omega)$ (рис.1)), причем эффект Допплера может стать сложным и в дополнение к ω' могут появиться частоты ω'' и ω''', лежащие в области $\omega > \omega_p$ (см. рис. 1). Для появления таких частот должно быть выполнено неравенство (6), а условием порога, очевидно, является случай, когда при уменьшении $(1-\beta\cos\theta)$ уравнение (6) становится равенством (графически это означает касание прямой a_4 кривой $k(\omega)$ в точке $\omega_{пор.}$ (см. рис. 1)).

Допустим сначала, что ω_0 не зависит или слабо зависит от энергии частицы при релятивистских скоростях. Это невозможно, если ω_0 - собственная частота системы, т.к. $\omega_0=\omega_0'\sqrt{1-\beta^2}=\omega_0'\frac{mc^2}{E}$.

(Здесь $E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ - полная энергия излучателя). Однако ω_0 может быть частотой вынужденных колебаний заряженной частицы, движущейся в среде, возникающих под действием электромагнитной волны.

При рассеянии света $\omega_0=\Omega_0$, где /4/

$$\Omega_0=\omega_0'\,|\beta n_0\cos\theta_0-1|, \tag{10}$$

при этом ω_0' - частота исходного света, n_0- показатель преломления для нее, а θ_0- угол между k_0, и скоростью частицы. При замене ω_0 на Ω_0 формулы (2) и (1) (т.е. уравнения Допплера) дают частоты ω света, рассеянного под углом θ к скорости частицы.

Если β близко к единице, а $\beta n_0\cos\theta_0$ заметно отличается от единицы, то, как видно из (10), Ω_0 практически не зависит от энергии частицы.

Тогда в неравенстве (6) (при $\omega_0=\Omega_0$) левая часть возрастает при уменьшении $(1-\beta\cos\theta)$, а правая стремится к пределу $\frac{2\omega_p^2}{\Omega_0}$, соответствующему $\beta\cos\theta=1$. Очевидно, что для $\frac{\omega_p}{\Omega_0}>1$ найдется такое достаточно малое $(1-\beta\cos\theta)_{пор}$, при котором (6) станет равенством (условие появления в рассеянном свете пороговой частоты $\omega_{пор}$), а при дальнейшем уменьшении $(1-\beta\cos\theta)$ неравенство (6) будет выполнено (т.е. в рассеянном свете появятся частоты ω'' и ω''').

Приравнивая левую часть уравнения (6) правой и решая квадратное уравнение, находим

$$(1-\beta\cos\theta)_{пор}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{2\Omega_0^2}{\omega_p^2}}. \tag{11}$$

Выбор знака перед корнем определяется тем, что нас интересует только малое $(1-\beta\cos\theta)$.

Для $\frac{\Omega_0}{\omega_p} \ll 1$ величина (11) приближенно равна

$$(1-\beta\cos\theta)_{\text{пор.}} = \frac{\Omega_0^2}{2\omega_p^2}. \tag{12}$$

Принимая во внимание (11) или (12), из уравнения (5) находим:

$$\omega_{\text{пор}} = \frac{\Omega_0}{2(1-\beta\cos\theta)} = \frac{\Omega_0}{1-\sqrt{1-\frac{2\Omega_0^2}{\omega_p^2}}} \approx \frac{\omega_p^2}{\Omega_0}. \tag{13}$$

Если $(1-\beta\cos\theta)$ меньше $(1-\beta\cos\theta)_{\text{пор}}$, то уравнение (5), как уже отмечалось, имеет два решения (частоты ω'' и ω'''). При этом величина $(1-\beta\cos\theta)_{\text{пор}}$ может быть настолько мала, что второй член под корнем (5) станет много меньше единицы, т.е.

$$\frac{\Omega_0}{1-\beta\cos\theta} \gg \frac{2\,\omega_p^2}{\Omega_0}. \tag{14}$$

Тогда из уравнения (5) находим

$$\omega''' = \frac{\Omega_0}{1-\beta\cos\theta} - \frac{\omega_p^2}{2\Omega_0}, \tag{15}$$

$$\omega'' = \frac{\omega_p^2}{2\Omega_0}. \tag{16}$$

Рассматривая уравнения (15) и (16), мы видим, что если частота ω'' имеет предельное значение, в два раза меньшее пороговой (см. 12), то ω''' ведет себя как допплеровская частота в вакууме (при фиксированном Ω_0), отличаясь от нее поправкой, относительная величина которой мала (см. 14).

Максимальная величина частоты рассеянного света ω''' достигается, очевидно, при $\theta = 0$. Для $\theta = 0$ подставляя величину Ω_0 из (10) и принимая во внимание, что $\frac{1}{1-\beta} \approx \frac{2}{1-\beta^2} = \frac{2E^2}{(mc^2)^2}$,

если $\frac{E}{mc^2} \gg 1$, получаем

$$\omega''' = 2\omega'_0 \, |\beta n_0 \cos\theta_0 - 1| \left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 - \frac{\omega_p^2}{2\omega'_0 \, |\beta n_0 \cos\theta_0 - 1|} \tag{17}$$

$$\omega'' = \frac{\omega_p^2}{2\omega'_0 \, |\beta n_0 \cos\theta_0 - 1|}. \tag{18}$$

Частота ω отличается от частоты света, рассеянного частицей в вакууме при том же β и θ тем, что содержит множитель $|\beta n_0 \cos\theta_0 - 1|$ вместо $(1-\beta\cos\theta_0)$ и наличием малого поправочного члена. Так как основной член, определяющий ω''', растет с энергией как E^2, то относительная роль поправки уменьшается. Напомним, что в среде спектр рассеянного света распадается на два – нормальный и аномальный /4/. При этом в каждом из них при данном θ могут появляться сразу несколько частот, т.е. спектр рассеяния может быть сложным. В рассматриваемом случае это ω'' и ω''', кроме которых имеется и ω'.

Вернемся теперь к случаю, когда ω_0 – собственная частота системы, т.е. $\omega_0 = \omega'_0 \sqrt{1-\beta^2}$. Если заменить в (5) ω_0 на $\omega'_0\sqrt{1-\beta^2}$, то (5) перепишется так:

$$\omega = \frac{\omega'_0\sqrt{1-\beta^2}}{2(1-\beta\cos\theta)}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{2\omega_p^2\,\beta\cos\theta(1-\beta\cos\theta)}{\omega'^2_0(1-\beta^2)}}\,\right]; \quad \omega > \omega_p. \tag{19}$$

Рассмотрим величину второго члена под корнем уравнения (19). Для релятивистской частицы и $\theta = 0$ он, очевидно, равен

$$\frac{2\omega_p^2\,\beta(1-\beta)}{\omega'^2_0(1-\beta^2)} = \frac{2\omega_p^2}{\omega'^2_0}\,\frac{\beta}{1+\beta} \approx \frac{\omega_p^2}{\omega'^2_0}. \tag{20}$$

Таким образом, эта величина может быть меньше единицы, а, следовательно, (19) может иметь действительные решения только при условии $\omega'_0 > \omega_p$. При $\theta \neq 0$ требования становятся еще более жесткими, т.к. $\beta\cos\theta(1-\beta\cos\theta)$ возрастает при увеличении θ до тех пор, пока $\beta\cos\theta > \frac{1}{2}$.

Мы приходим, следовательно, к выводу, что если $\omega_0 < \omega_p$ и при этом $\omega_0' < \omega_p$, то невозможно появление допплеровских частот, лежащих в области, превышающей ω_p. В самом деле, для трансформации $\omega_0' < \omega_p$ в $\omega > \omega_p$ необходим значительный допплеровский сдвиг, т.е. излучатель заведомо должен иметь релятивистскую скорость, и $(1-\beta\cos\theta)$ должно быть малым. Однако в этом случае при $\frac{\omega_p}{\omega_0'} > 1$ подкоренное выражение (19) отрицательно. На рис.1 это означает следующее: прямая a, проходящая через $\omega = \omega_2$, имеет наклон по отношению к горизонтальной оси больший, чем a_4. При увеличении энергии частицы минимальный наклон прямой a становится меньше, но $\omega = \omega_2$ убывает, и нижняя часть прямой a смещается влево. В результате она пересекает кривую $k(\omega)$ только в области аномальной дисперсии (вблизи ω' рис. 1) и не может коснуться кривой $k(\omega)$ в области $\omega > \omega_p$. Таким образом, как бы ни велика была кинетическая энергия излучателя, но если $\omega_0' < \omega_p$, то наличием среды нельзя пренебрегать и допплеровская частота не может выйти за пределы $\omega > \omega_p$, где применимо (3) x/.

Однако, если $\omega_0' > \omega_p$, но за счет релятивистского сдвига $\omega_0 = \omega_0' \sqrt{1-\beta^2} < \omega_p$, то уравнение (5) может иметь два решения, дающие действительные величины ω'' и ω'''. Для релятивистских скоростей можно положить $\frac{\beta}{1+\beta} = \frac{1}{2}$ и $\beta = 1$, а для малых углов можно заменить $\cos\theta$ на $1-\frac{\theta^2}{2}$, тогда из (19) получаем

$$\omega = \frac{\omega_0' \sqrt{1-\beta^2}}{(1-\beta+\frac{\theta^2}{2})} \left[\frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega_0'^2}\left(1+\frac{\theta^2}{1-\beta^2}\right)}\right)\right] \quad \omega > \omega_p. \tag{21}$$

Отсюда видно, что область углов, для которой под корнем (21) стоит положительная величина, тем уже, чем больше энергия частицы. При этом допплеровская частота отличается от допплеровской частоты в вакууме (которая при $\theta = 0$ возрастает пропорционально E) множителем,зак-

x/ Возникает вопрос, что будет в разреженной среде, поскольку уменьшение ее плотности равносильно переходу к случаю вакуума. Здесь нет противоречия со сказанным, так как ω_p^2 возрастает обратно пропорционально плотности среды.

люченным в квадратные скобки. Если $\theta = 0$, то величина этого множителя при $E \gg mc^2$ постоянна. При этом получаем две дополнительные к ω' допплеровские частоты ω'' и ω''', возрастающие пропорционально E.

Последнее замечание, которое следует сделать, касается порога появления частот ω'' и ω''' (см. рис. 1). Как и должно быть, этот порог связан с величиной групповой скорости $W(\omega)$ /2,3/. Порогу, как уже отмечалось, соответствует касание прямой a_4 кривой $k(\omega)$ (рис. 1). Отсюда

$$\frac{1}{[v\cos\theta]} = \left[\frac{dk(\omega)}{d\omega}\right]_{\omega=\omega_{пор}} = \frac{1}{W(\omega_{пор})}. \tag{22}$$

К тому же результату легко придти и с помощью уравнения (7). В самом деле, это уравнение $f(\omega, v\cos\theta) = 0$ определяет непрерывную зависимость $v\cos\theta$ от ω. Пороговая величина $[v\cos\theta]_{пор}$ является наибольшим или наименьшим значением $v\cos\theta$, соответствующим $\omega_{пор}$, т.е. имеется экстремум при $\omega = \omega_{пор}$. Отсюда при $\omega = \omega_{пор}$

$$\frac{d(v\cos\theta)}{d\omega} = -\frac{\partial f}{\partial\omega} \Big/ \frac{\partial f}{\partial(v\cos\theta)} = 0. \tag{23}$$

Из (7) в общем случае имеем

$$\frac{d(v\cos\theta)}{d\omega} = -\frac{(v\cos\theta)^2}{\omega-\omega_0}\left[\frac{dk}{d\omega} - \frac{1}{v\cos\theta}\right]. \tag{24}$$

Обращение этой производной в нуль, очевидно, эквивалентно (22). Для конкретного вида $k(\omega)$ (8) получаем

$$\frac{d(v\cos\theta)}{d\omega} = -\frac{(v\cos\theta)^2}{\omega-\omega_0}\left[\frac{1}{c}\left(1+\frac{\omega_p^2}{2\omega^2}\right) - \frac{1}{v\cos\theta}\right]. \tag{25}$$

В самом деле, в точке порога (25) обращается в нуль, в чем легко убедиться, подставив сюда $[\beta\cos\theta]_{пор}$ из (11) и $\omega_{пор}$ из (13).

Литература

1. И.М. Франк. Известия АН СССР (сер. физ.), том VI , В (1942).
2. И.М. Франк. Нобелевская лекция, например, УФН 68, 397 (1959).
3. И.М. Франк. ЖЭТФ 36, 823 (1959).
4. И.М. Франк. Ядерная физика, 7, 1100 (1968).

Рукопись поступила в издательский отдел
7 августа 1969 года.