ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р4 - 4576

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Б.М.Барбашов, В.Н.Первушин

КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ СО СТАТИЧЕСКИМ НУКЛОНОМ

1969

Р4 - 4576

Б.М.Барбашов, В.Н.Первушин

КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ СО СТАТИЧЕСКИМ НУКЛОНОМ

Направлено в журнал
"Теоретическая и математическая физика"

1. Введение

В последнее время появился ряд работ (см., например,[1,2,3] и ссылки в них), посвященных квазиклассическому приближению в квантовой теории поля.

Основным результатом, полученным в этом приближении, является доказательство того, что производящий функционал для функций Грина в приближении "графов-деревьев", используемых в теории феноменологических лагранжианов, выражается через классический функционал действия w этих полей.

$$S = N e^{\frac{i}{\hbar} w}.$$

В настоящей работе в квазиклассическом приближении находится амплитуда для конкретного процесса рассеяния $\pi^{(-)}$-мезона на нуклоне в простой модели взаимодействия заряженных мезонов со статическим нуклоном[4]:

$$H_I(t) = g \int d^3x \, \tau_i \, \phi_i(\vec{x}, t) \, \rho(x) = g \, \tau_i \, \bar{\phi}_i(t) \qquad (i = 1,2),$$

где

$$\bar{\phi}_i(t) = \sum_k \frac{v(k)}{\sqrt{2\omega k}} \left(a_i^+(k) \, e^{i\omega_k t} + a_i^-(k) \, e^{-i\omega_k t} \right), \qquad (1)$$

$v(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\,x\, e^{ikx} \rho(x)$ – формфактор нуклона. Результатом квазиклассического приближения ($\frac{\hbar}{g} \to 0$) является выражение для амплитуды, где вклады от мезонов разных знаков равны, это, по-видимому, объясняется тем, что при $\frac{g}{\hbar} \to \infty$ (сильная связь) существенны многочастичные состояния, в которых присутствуют мезоны разных знаков.

2. Амплитуда рассеяния

Рассмотрим гамильтониан взаимодействия (1). Для дальнейших вычислений удобно выбрать $v(k)$ в виде $v(k) = e^{\frac{\mu - \omega_k}{L}}$ При $L \to \infty$ $\rho(x) \to \delta^3(x)$, и мы переходим к точечному нуклону.

S – матрица в нормальной форме по операторам может быть записана с помощью функционального интеграла в виде [4,5]

$$S = N_{\tilde{\phi}} \int [\delta \Lambda_1 \delta \Lambda_2]\ T_r \exp\{ -i \frac{g}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt [\tilde{\phi}_1(t) + \Lambda_1(t)] r_1 \} , \quad (2)$$

где

$$[\delta \Lambda_1 \delta \Lambda_2] = \delta\Lambda_1 \delta\Lambda_2 \exp\{ -\frac{i}{2\hbar} \iint_{-\infty}^{\infty} \Delta^{-1}(t_1 - t_2) \Lambda(t_1) \Lambda(t_2)\, dt_1 dt_2 \} ,$$

$\Delta^{-1}(t_1 - t_2)$ – обратный оператор к функции распространения мезона $\Delta(t_1 - t_2)$, определяемой в нашем случае равенством

$$i\delta_{ij} \Delta(t_1 - t_2) = \langle o | T(\tilde{\phi}_i(t_1) \tilde{\phi}_j(t_2)) | o \rangle = \delta_{ij} \Sigma \frac{v^2(k)}{2\omega} e^{-i\omega_k (t_1 - t_2)} ,$$

$T_r \exp\{ -i \frac{g}{\hbar} \int_{t_0}^{t} \Lambda_1(\xi) r_1 d\xi \} = Y(t, t_0 | \Lambda)$ – формальная запись через T-экспоненту решения матричного уравнения

$$\frac{d}{dt} Y(t, t_0 | \Lambda) = -i \frac{g}{\hbar} r_1 \Lambda_1(t) Y(t, t_0 | \Lambda) . \quad (3)$$

Решение (3) означает, согласно терминологии Фейнмана, "выпутывание" матриц из экспоненты (2). Амплитуда рассеяния $\pi^{(-)}$ – мезона на нуклоне дается выражением

$$M_{\alpha\beta}(\omega_f) = \frac{i}{(2\pi)^2} \delta(\omega_f - \omega_i) v(\vec{k}_f) v(\vec{k}_i) f^{\alpha\beta}_{fi}(\omega_f) ,$$

где

$$f^{\alpha\beta}_{fi}(\omega_f) = i \int_{-\infty}^{\infty} dt\ e^{i\omega_f t} \frac{\langle N_\alpha | \frac{\delta^2 S}{\delta \tilde{\phi}^*(t) \delta \tilde{\phi}^*(0)} | N_\beta \rangle}{\langle N_\alpha | S | N_\alpha \rangle} \Big|_{\tilde{\phi}_1 = \tilde{\phi}_2 = 0} . \quad (4)$$

Из (2) имеем

$$\frac{\delta^2 S'}{\delta \tilde{\phi}^*(t) \delta \tilde{\phi}^*(0)} \Big|_{\tilde{\phi}_1 = \tilde{\phi}_2 = 0} = \frac{g^2}{\hbar^2} T_r \{ r_-(t) r_-(0) \int [\delta\Lambda_1 \delta\Lambda_2] \exp\{ -i \frac{g}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, \Lambda_1(\xi) r_1(\xi) \} = \quad (5)$$

$$= \frac{g^2}{\hbar^2} \int [\delta \Lambda_1 \delta \Lambda_2] \{ Y(\infty, t | \Lambda) r_- Y(t, 0 | \Lambda) r_- Y(0, -\infty | \Lambda) \} .$$

Прежде всего займемся нахождением величины $Y(t, t_0 | \Lambda)$, которая определяется системой уравнений (3).

3. "Выпутывание" r-матриц в квазиклассическом приближении

Подставляя в уравнение (3) Y как двухрядную матрицу $\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}$ и вводя обозначения

$$\Lambda_1(t) + i\Lambda_2(t) = \lambda(t)\, e^{i\theta(t)}, \quad \Lambda_1(t) - i\Lambda_2(t) = \lambda(t)\, e^{-i\theta(t)},$$
$$\lambda(t) = \sqrt{\Lambda_1^2(t) + \Lambda_2^2(t)}, \quad \theta(t) = \operatorname{arctg} \frac{\Lambda_2(t)}{\Lambda_1(t)}, \qquad (6)$$

получаем систему уравнений

$$\begin{pmatrix} \dot Y_{11}, & \dot Y_{12} \\ \dot Y_{21}, & \dot Y_{22} \end{pmatrix} = -\frac{ig}{\hbar}\lambda(t) \begin{pmatrix} Y_{21}e^{-i\theta}, & Y_{22}e^{-i\theta} \\ Y_{11}e^{i\theta}, & Y_{12}e^{i\theta} \end{pmatrix} \qquad (7)$$

с начальными условиями

$$Y_{11}\big|_{t=t_0} = Y_{22}\big|_{t=t_0} = 1, \quad Y_{21}\big|_{t=t_0} = Y_{12}\big|_{t=t_0} = 0.$$

Система (7) имеет первые интегралы:

$$|Y_{11}|^2 + |Y_{12}|^2 = |Y_{21}|^2 + |Y_{22}|^2 = 1, \quad Y_{11}Y_{21}^* + Y_{12}Y_{22}^* = 0. \qquad (8)$$

Достаточно рассмотреть систему двух уравнений, связывающую Y_{11} и Y_{21}, так как из (7) и (8) следует, что $Y_{11} = Y_{22}^*$ и $Y_{21} = -Y_{12}^*$.

Для Y_{11} и Y_{21} получаем уравнения второго порядка:

$$\ddot Y_{11} - \left(\frac{\dot\lambda}{\lambda} - i\dot\theta\right) Y_{11} + \frac{g^2}{\hbar^2}\lambda^2 Y_{11} = 0, \quad Y_{11}\big|_{t=t_0} = 1, \quad \dot Y_{11}\big|_{t=t_0} = 0, \qquad (9)$$

$$\ddot Y_{21} - \left(\frac{\dot\lambda}{\lambda} + i\dot\theta\right) Y_{21} + \frac{g^2}{\hbar^2}\lambda^2 Y_{21} = 0, \quad Y_{21}\big|_{t=t_0} = 0, \quad \dot Y_{21}\big|_{t=t_0} = -\frac{ig}{\hbar}\lambda(t_0)\, e^{-i\theta(t_0)}.$$

В случае произвольных $\lambda(t)$ и $\theta(t)$ решений уравнений (9) в замкнутой форме найти не удается, поэтому будем искать решение в квазиклассическом виде: $Y_{11} = \exp\left\{ \frac{gi}{\hbar}\left[\delta_0 + \frac{\hbar}{gi}\delta_1 + \left(\frac{\hbar}{gi}\right)^2 \delta_2 + \dots\right]\right\}$,

$$Y_{21} = \exp\left\{ \frac{gi}{\hbar} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\hbar}{ig}\right)^k \rho_k \right\}.$$

Для δ_k и ρ_k получаем:

$$\delta_0 = \pm\int_{t_0}^{t} \lambda(\xi)\, d\xi, \qquad \rho_0 = \pm\int_{t_0}^{t} \lambda(\xi)\, d\xi,$$

$$\delta_1 = \frac{\theta(t) - \theta(t_0)}{2i}, \qquad \rho_1 = \frac{\theta(t_0) - \theta(t)}{2i},$$

$$\delta_2 = \pm\frac{i}{4\lambda}\left[-\frac{\dot\lambda}{\lambda}\dot\theta + \ddot\theta\right] \pm \frac{\dot\theta^2}{8}, \qquad \rho_2 = \pm\frac{i}{4\lambda}\left[\frac{\dot\lambda}{\lambda}\dot\theta - \ddot\theta\right] \pm \frac{\dot\theta^2}{8}.$$

Ограничиваясь первыми двумя членами, с учётом начальных условий, будем иметь:

$$Y_{11}(t_1 t_0 \,|\Lambda) = \cos\left(\frac{g}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\lambda(\xi)\, d\xi\right) e^{\frac{\theta(t_0)-\theta(t)}{2}} \left[1 + Q\left(\frac{\hbar}{gi}\right)\right],$$

$$(10)$$

$$Y_{21}(t_1 t_0 \,|\, \Lambda) = -i \sin\left(\frac{g}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\lambda(\xi)\, d\xi\right) e^{i\frac{\theta(t_0)+\theta(t)}{2}} \left[1 + 0\left(\frac{\hbar}{gi}\right)\right].$$

Легко видеть, что решения (10) справедливы, когда $\lambda(t) \gg \frac{\hbar}{g}\dot{\theta}(t)$. Действительно, подставляя

$$\dot{\theta} = \frac{\Lambda_1(t)\,\dot{\Lambda}_2(t) - \dot{\Lambda}_1(t)\,\Lambda_2(t)}{\lambda^2(t)},$$

получим:

$$g\lambda^3(t) \gg \hbar\,(\Lambda_1 \dot{\Lambda}_2 - \Lambda_1 \dot{\Lambda}_2). \qquad (11)$$

Таким образом, область применимости решений (10) - это большие константы связи g и малые производные $\dot{\Lambda}_1$ и $\dot{\Lambda}_2$. (10) также справедливо, когда $\Lambda_1 = \Lambda_2$. Рассматриваемое приближение теряет смысл при $\lambda(t) = 0$. Как будет видно из вычисления функционального интеграла в (5) методом стационарной фазы, основной вклад в интеграл дают $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \bar{\Lambda}$ и $\lambda \neq 0$ (см. (16)). Итак, в этом приближении имеем:

$$Y(t_1\; t_0 \,|\, \Lambda) = \begin{pmatrix} e^{\frac{i(\theta(t)-\theta(t_0))}{2}} \cos\left(\frac{g}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\lambda(\xi)d\xi\right) ; & -i\,e^{\frac{i\theta(t_0)+\theta(t)}{2}} \sin\left(\frac{g}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\lambda(\xi)d\xi\right) \\ -i\,e^{-i\theta(t)+\theta(t)} \sin\left(\frac{g}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\lambda(\xi)d\xi\right) ; & e^{\frac{-i\theta(t)-\theta(t_0)}{}} \cos\left(\frac{g}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\lambda(\xi)d\xi\right) \end{pmatrix}$$

4. Вычисление функционального интеграла методом стационарной фазы

Теперь нам нужно выполнить функциональные квадратуры, подставив в (5) найденное значение матрицы $Y(t, t_0 \,|\, \Lambda)$. Перемножая матрицы в (5) и оставляя члены, дающие вклад в $M_{\alpha,\beta}(\omega)$, получим:

$$f_{fi}^{\alpha\beta}(\omega_f) = i\,\frac{g^2}{\hbar^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_f t}\, \frac{m_{\alpha\beta}(t)}{\langle N|\,S|\,N\rangle},$$

где

$$m_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}\int[\delta\Lambda_1\, \delta\Lambda_2]\cos\left(\frac{ig}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, \epsilon(-\xi)\epsilon(t-\xi)\lambda(\xi)\right) e^{\frac{1}{2}[\theta(\infty)-\theta(-\infty)+2\theta(t)+2\theta(t_0)]},$$

$$(12)$$

$$\epsilon(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Для приближенного вычисления функционального интеграла в (12) (который точно не берется) мы применим метод стационарной фазы [1], справедливый при $\hbar \to 0$. Согласно указанному методу можем написать:

$$\int \prod_i \delta_i \Lambda \; e^{\frac{i}{\hbar} F(\Lambda_i)} = e^{\frac{i}{\hbar} F(\tilde{\tilde{\Lambda}}_i)} \int \prod_i \delta_i \Lambda \; \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \iint \frac{\delta^2 F(\Lambda)}{\delta\Lambda_i(\xi)\,\delta\Lambda_j(\eta)} \Lambda_i(\xi)\Lambda_j(\eta)\, d\xi\, d\eta + \ldots \right\},$$

где $\tilde{\tilde{\Lambda}}_i(\xi)$ определяется из условия экстремума функционала

$$\frac{\delta F(\tilde{\tilde{\Lambda}})}{\delta \tilde{\tilde{\Lambda}}} = 0 .$$

В нашем случае (12) уравнение на $\tilde{\tilde{\Lambda}}_1$ имеет вид

$$-i \int \Lambda^{-1}(\xi-\eta)\, \tilde{\tilde{\Lambda}}_1(\eta)\, d\eta + i g \epsilon(-\xi)\epsilon(t-\xi) \frac{\tilde{\tilde{\Lambda}}_1(\xi)}{\Lambda(\xi)} + \hbar \frac{i}{2} \frac{\delta}{\delta \tilde{\tilde{\Lambda}}_1(\xi)} [\theta(\infty) - \theta(-\infty) +$$

$$+ 2\theta(t) + 2\theta(t)] = 0 . \qquad (14)$$

В последнем выражении в соответствии с применяемым приближением отбросим член, пропорциональный $\hbar$, умножим слева на функцию Грина $\Delta(\phi-\xi)$ и проинтегрируем по ξ. Учитывая соотношение

$$\int \Delta(\phi-\xi)\, \Delta^{-1}(\xi-\eta)\, d\xi = \delta(\phi-\eta) ,$$

получим систему нелинейных интегральных уравнений, симметричных относительно неизвестных функций $\tilde{\tilde{\Lambda}}_1$ и $\tilde{\tilde{\Lambda}}_2$:

$$\tilde{\tilde{\Lambda}}_1(\xi) = + g \int \Delta(\xi-\eta) \frac{\tilde{\tilde{\Lambda}}_1(\eta)}{\tilde{\tilde{\Lambda}}(\eta)} \epsilon(-\eta)\epsilon(t-\eta)\, d\eta . \qquad (15)$$

Эта система имеет симметричное частное решение. Действительно, подставляя $\tilde{\tilde{\Lambda}}_1 = \tilde{\tilde{\Lambda}}_2 = \tilde{\tilde{\Lambda}}$ в уравнение (15), мы получим для Λ

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda(\xi) = \frac{g}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta\, \Delta(\nu-\xi)\epsilon(-\eta)\epsilon(t-\eta) . \qquad (16)$$

Отброшенный нами в (14) член, пропорциональный $\hbar$ при $\tilde{\tilde{\Lambda}}_1 = \tilde{\tilde{\Lambda}}_2 = \tilde{\tilde{\Lambda}}$, равен точно нулю, а величина фазы $\tilde{\tilde{\theta}}(t) = \operatorname{arctg} \left. \frac{\Lambda_1(t)}{\Lambda_2(t)} \right|_{\Lambda_i = \tilde{\tilde{\Lambda}}} = \frac{\pi}{4}$.

Решение (16) удовлетворяет неравенству (11) и поэтому находится в согласии в приближением, которое применялось при решении уравнения (3).

Согласно формуле (13) для интеграла (12) мы имеем

$$m_{\alpha\beta}(t) = \delta_{\alpha\beta}\, e^{\frac{i}{\hbar} W_0 + W_1 + O(h) + i\pi} , \qquad (17)$$

где

$$W_0 = \frac{g^2}{2\hbar} \iint d\xi\, d\eta\, \Delta(\xi-\nu)\epsilon(-\xi)\epsilon(-\eta)\, \epsilon(t-\xi)\, \epsilon(t-\eta) ,$$

$$e^{W_1} = c \int [\delta \Lambda_1\, \delta\Lambda_2] \exp\left\{ i \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi t) \left[\Lambda_1^2(t) - \frac{1}{2}(\Lambda_1 + \Lambda_2)^2\right] d\xi \right\} = \det{}^{1/2} [1 - 2\Delta f] ,$$

$$f(t,\xi) = \frac{1}{\int d\eta\, \epsilon(-\xi)\, \epsilon(-\eta)\, \epsilon(t-\xi)\, \epsilon(t-\eta)\Delta(\xi-\eta)} .$$

Таким образом, метод стационарной фазы для функционального интеграла (12) позволил нам получить разложения по степеням $\frac{\hbar}{g}$. Если мы отбросим в показателе экспоненты под знаком интеграла, см. (13), члены, пропорциональные $\hbar$, то интегралы по Λ_1 и Λ_2 берутся (гауссовские квадратуры), см. (18).

Амплитуда процесса в квазиклассическом приближении равна:

$$f_{11}^{\alpha\beta} = i\,\frac{g^2}{\hbar^2}\int_0^\infty dt\,\cos\omega_1 t\,\exp\left\{\frac{-ig^2}{2\hbar}\iint_{-\infty}^{\infty} d\xi\, d\eta\,\Delta(\xi-\eta)\,\epsilon(-\xi)\,\epsilon(-\eta)\,\epsilon(t-\xi)\,\epsilon(t-\eta)\right\}. \quad (19)$$

Выражение для амплитуды (19) совпадает с результатами работы Эдварса /7/ и Барбашова и Ефимова /4/, где применялись другие методы. В работе Эдварса этот результат был получен в приближении сильной связи, в рамках которой основные вклады дают многомезонные состояния и мезоны разных знаков равноценны. (Последнее в нашем решении нашло отражение в том что в (1.4) было принято $\tilde{\Lambda}_1 = \tilde{\Lambda}_2 = \tilde{\Lambda}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$).

Отброшенные в (18) члены w_1 и т.д. отвечают вкладам от графиков, где происходит обмен между вершинами двумя и более мезонами, пропагаторы которых содержат дополнительную степень $\hbar$.

В заключение авторы выражают благодарность Г.В.Ефимову за полезные обсуждения настоящей работы.

Литература

1. R.P.Feynman. Acta Physica Polonica, vol. XXIV, 697 (1963).
2. Y.Nambu. Preprint EFI 68-12, Chicago, 1968.

3. P.G.Boulware and L.S.Brown. Phys. Rev., 172, 1628 (1968).
4. Б.М.Барбашов, Г.В.Ефимов. ЖЭТФ, 39, 450 (1960).
5. S.Hory. Prog.Theor.Phys., 7, 578 (1952).
6. Ф.А.Березин. Метод вторичного квантования. Изд-во "Наука", 1965.
7. S.F. Edwards. Proc. Royal Soc., A 1174, 411 (1955).

Рукопись поступила в издательский отдел
1 июля 1969 года.