СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р4 - 4567

В.В.Бабиков

# К ТЕОРИИ
# НАДБАРЬЕРНОГО ОТРАЖЕНИЯ ЧАСТИЦ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1969

Р4 - 4567


В.В.Бабиков


# К ТЕОРИИ НАДБАРЬЕРНОГО ОТРАЖЕНИЯ ЧАСТИЦ

Получение предельного (при $\hbar \to 0$ ) квазиклассического выражения для коэффициента отражения частиц от потенциала, задаваемого аналитической в некоторой области аргумента функцией $V(z)$ , представляет собой весьма сложную математическую задачу. Этому вопросу посвящен ряд исследований /1-7/, результаты которых получены с различной степенью математической строгости. В настоящей работе предложен метод, дающий принципиальную возможность вычислить поправки к основному экспоненциально малому члену в выражении для коэффициента отражения и тем самым оценить точность квазиклассического приближения.

Рассмотрим одномерное уравнение Шредингера

$$\psi''(x) + \frac{1}{\hbar^2} p^2(x) \psi(x) = 0 , \tag{1}$$

где

$$p(x) = \sqrt{2m [ E - V(x) ]} . \tag{2}$$

Будем предполагать, что функция $p(z)$ вещественна $(p^2(x) > 0)$ всюду на вещественной оси $x = \mathrm{Re}\, z$ с предельными значениями $p(z) \to p_0$ при $z \to \pm\infty$ , обладает нулем $\alpha$-ого порядка в точке $z_0$ ( а также в комплексно-сопряженной точке $\bar{z}_0$ ), в окрестности которой представима сходящимся рядом

$$p(z) = c_\alpha (z - z_0)^\alpha + c_\beta (z - z_0)^\beta + \ldots , \quad 0 < \alpha < \beta , \tag{3}$$

и аналитична в полосе $|\mathrm{Im}\, z| < \mathrm{Im}\, z_0$ .

Используем метод фазовых функций /8/. В отличие от рассмотренного ранее x/ ( /8/, стр. 176) подхода, где в качестве базисных функций метода употреблялись известные квазиклассические выражения $p^{-1/2}(x)\exp\times$ $\times[\pm\int p(x)dx]$, будем использовать функции, достаточно хорошо аппроксимирующие /9/ точную волновую функцию не только вдали, но и вблизи точки поворота $z_0$. Удобно при этом перейти к другим переменным, положив ( $x_0$ произвольная точка на действительной оси):

$$u = \frac{1}{\hbar}\int_{x_0}^{z} p(z')\,dz', \tag{4}$$

$$\phi(u) = \sqrt{p(z)}\,\psi(z). \tag{5}$$

В новых переменных уравнение (1) принимает вид:

$$\frac{d^2\phi(u)}{du^2} + [1 - Q(u,\hbar)]\,\phi(u) = 0, \tag{6}$$

где

$$Q(u,\hbar) = \hbar^2\,\frac{2p''(z)\,p(z) - 3[p'(z)]^2}{4p^4(z)}. \tag{7}$$

Уравнение (6) имеет обычный вид уравнения Шредингера с потенциалом $Q(u,\hbar)$, зависящим от параметра $\hbar$.

Легко видеть, что в точке $u_0$

$$u_0 = \frac{1}{\hbar}\int_{x_0}^{z_0} p(z)\,dz \tag{8}$$

функция $Q(u,\hbar)$ обладает полюсом второго порядка

---
x/ Заметим, что в правой части точного уравнения (18.9) работы /8/ сделано необоснованное пренебрежение вторым членом, следствием чего явилось неправильное определение предэкспоненциального множителя для коэффициента надбарьерного отражения.



$$Q(u,\hbar) \approx -\frac{a(a+2)}{4(1+a)^2}\,\frac{1}{(u-u_0)^2}\left[1 + \hbar^{\frac{\beta-a}{1+a}}(u-u_0)^{\frac{\beta-a}{1+a}}\,c_a^{-\frac{1+\beta}{1+a}}\,c_\beta\, f(a,\beta) + \ldots + \right], \tag{9}$$

где обозначено

$$f(a,\beta) = 2(1+a)^{\frac{\beta-a}{1+a}}\,\frac{a+\beta+3a\beta-3a^2-\beta^2-4}{a(a+2)}. \tag{10}$$

Следующие члены разложения (9) имеют более высокий порядок малости по величине параметра $\hbar$. Поэтому функция

$$q(u,\hbar) = Q(u,\hbar) + \frac{a(a+2)}{4(1+a)^2}\,\frac{1}{(u-u_0)^2}, \tag{11}$$

представляемая в окрестности точки $u_0$ сходящимся рядом по положительным степеням величины $\hbar$, обращается в нуль при $\hbar = 0$ : $q(u,0) = 0$. Следовательно, квазиклассическое приближение соответствует малости $q(u,\hbar)$, и можно надеяться развить эффективную теорию возмущений по этой величине.

Соответственно в качестве базисных или эталонных функций выбираем два линейно-зависимых решения

$$\begin{aligned}
\phi_1(u) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}(u-u_0)}\;H^{(1)}_{\frac{1}{2(1+a)}}(u-u_0),\\
\phi_2(u) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}(u-u_0)}\;H^{(2)}_{\frac{1}{2(1+a)}}(u-u_0)
\end{aligned} \tag{12}$$

уравнения

$$\frac{d^2\phi}{du^2} + \left[1 + \frac{a(a+2)}{4(1+a)^2}\,\frac{1}{(u-u_0)^2}\right]\phi(u) = 0. \tag{13}$$

Следуя методу фазовых функций /8/, представим функцию $\phi(u)$ в виде:

$$\phi(u) = A(u)\,\phi_1(u) + C(u)\,\phi_2(u) \tag{14}$$

и наложим дополнительное условие

$$\frac{d\phi}{du} = A(u)\,\frac{d\phi_1}{du} + C(u)\,\frac{d\phi_2}{du}\,. \tag{15}$$

Тогда, учитывая, что определитель Вронского для функций (12) равен

$$\frac{d}{du}\phi_1(u)\cdot\phi_2(u) - \phi_1(u)\frac{d}{du}\phi_2(u) = i,$$

получаем следующую систему уравнений первого порядка для фазовых функций $A(u)$ , $C(u)$ :

$$\begin{aligned} \frac{dA}{du} &= -iq(u,\hbar)\,\phi_2(u)\,[A(u)\phi_1(u) + C(u)\phi_2(u)],\\ \frac{dC}{du} &= iq(u,\hbar)\,\phi_1(u)\,[A(u)\phi_1(u) + C(u)\phi_2(u)]. \end{aligned} \tag{16}$$

Асимптотические выражения функций $\phi_1(u)$ , $\phi_2(u)$ при $u\to+\infty$ равны /10/

$$\begin{aligned} \phi_1(u) &\approx e^{i(u-u_0-\frac{\pi}{4}\frac{2+a}{1+a})},\\ \phi_2(u) &\approx e^{-i(u-u_0-\frac{\pi}{4}\frac{2+a}{1+a})}. \end{aligned} \tag{17}$$

Асимптотическое при $z\to+\infty$ выражение для волновой функции $\psi(z)$ имеет соответственно вид:

$$\psi(z) \approx A(+\infty)\,\frac{1}{\sqrt{p_0}}\,e^{\frac{i}{\hbar}(p_0 z+\Delta)} + C(+\infty)\,\frac{1}{\sqrt{p_0}}\,e^{-\frac{i}{\hbar}(p_0 z+\Delta)}, \tag{18}$$

где

$$\Delta = \int_{z_0}^{\infty}[p(z)-p_0]dz - p_0 z_0 - \frac{\pi}{4}\,\frac{2+a}{1+a}. \tag{19}$$



Пусть падающие частицы движутся слева направо по оси $-x$ . Условие отсутствия отраженной волны за потенциалом, т.е. при $x\to+\infty$ , означает, что начальными условиями для уравнений (16) являются:

$$C(+\infty) = 0,\quad A(+\infty) = A_+. \tag{20}$$

Постоянную величину $A_+$ в силу однородности уравнений (16) можно положить равной 1.

Функции $\phi_1(u)$ , $\phi_2(u)$ – однозначные аналитические функции в комплексной плоскости переменной и с разрезом вдоль полупрямой $-\infty<u-u_0<0$.

Нас интересуют величины $A(-\infty)$, $C(-\infty)$ , определяющие коэффициент прохождения. Действительно, асимптотические выражения функций $\phi_1(u)$ , $\phi_2(u)$ при $u\to-\infty$ соответствуют значениям корня $\sqrt{u-u_0}$ и функций Ганкеля на нижнем берегу разреза /10/, вследствие чего имеем:

$$\begin{aligned} \phi_1(e^{-i\pi}u) &\approx e^{-i\frac{\pi}{2}}\Big[2\cos\frac{\pi}{2(1+a)}\,e^{i(u-u_0-\frac{\pi}{4}\frac{2+a}{1+a})} + e^{-i\frac{\pi}{2(1+a)}}e^{-i(u-u_0-\frac{\pi}{4}\frac{2+a}{1+a})}\Big],\\ \phi_2(e^{-i\pi}u) &\approx e^{-i\frac{\pi}{2}}\big(-e^{i\frac{\pi}{2(1+a)}}\big)\,e^{i(u-u_0-\frac{\pi}{4}\frac{2+a}{1+a})}. \end{aligned} \tag{21}$$

Коэффициент отражения, очевидно, равен:

$$R = \frac{\left|A(-\infty)2\cos\frac{\pi}{2(1+a)} - C(-\infty)e^{i\frac{\pi}{2(1+a)}}\right|^2}{|A(-\infty)|^2}\,e^{-4\,\mathrm{Im}\,u_0}. \tag{22}$$

В предельном случае $\hbar=0$ , когда в уравнениях (16) можно положить $q(u,0)=0$ , имеем

$$\begin{aligned} A(-\infty) &= A(+\infty) = 1,\\ C(-\infty) &= C(+\infty) = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Таким образом, мы приходим к известному /4/ основному члену в квазиклассическом приближении для коэффициента надбарьерного отражения:

$$R_{\text{кв.}} = 4\,\mathrm{Cos}^2 \frac{\pi}{2(1+a)}\, e^{-\frac{4}{\hbar}\,\mathrm{Im}\int_{x_0}^{z_0} p(z)\,dz} . \qquad (24)$$

Коэффициент прохождения равен

$$D = \frac{|A(+\infty)|^2}{|A(-\infty)|^2} , \qquad (25)$$

так что в рассматриваемом приближении

$$D_{\text{кв.}} = 1 . \qquad (26)$$

Поправочные члены к полученным квазиклассическим выражениям (24) и (26) для коэффициентов надбарьерного отражения и прохождения могут быть вычислены из уравнений (16). Несмотря на эффективную малость величины $q(u,\hbar)$ при $\hbar \to 0$ в непосредственной близости к точке поворота $u_0$ она может (при $\beta < 2+3a$ ) обладать особенностью, что приводит к большим практическим трудностям при вычислении поправок. Эти расчеты являются самостоятельной математической задачей.

Автор признателен С.С. Герштейну, В.П. Маслову, М.В. Федорюку и Е.С. Фрадкину за полезные замечания.

*Литература*

1. *И.И. Гольдман, А.Б. Мигдал. ЖЭТФ, 28, 394 (1954).*
2. *D.S. Saxon. Phys.Rev., 107, 871 (1957).*
3. *В.Л. Покровский, С.К. Саввиных, Ф.Р. Улинич. ЖЭТФ, 34, 1272, 1629 (1958).*
4. *В.Л. Покровский, И.М. Халатников. ЖЭТФ, 40, 1713 (1961).*
5. *В.П. Маслов. ДАН 151, 306 (1963).*
6. *М.В. Федорюк. Дифф. уравнения 1, 631 (1965).*
7. *Л.И. Пономарев. Лекции по квазиклассике, ИТФ-67-53, Киев (1968).*



8. *В.В. Бабиков. Метод фазовых функций в квантовой механике. "Наука", М., 1968.*
9. *R.E. Langer. Phys.Rev., 51, 669 (1937).*
10. *И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.*

Рукопись поступила в издательский отдел
27 июня 1969 года.