ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р4 - 4415

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

И.Ж.Петков

ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ РАССЕЯНИЕ ЧАСТИЦ ПРИ БОЛЬШИХ ЭНЕРГИЯХ

1969

Р4 - 4415

И.Ж.Петков

ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ РАССЕЯНИЕ ЧАСТИЦ ПРИ БОЛЬШИХ ЭНЕРГИЯХ

Направлено в ЯФ

1. Введение

В настоящее время в задачах рассеяния частиц большой энергии широко используется так называемое эйкональное или высокоэнергетическое приближение [1,2]. Это приближение основывается на физических предположениях, что при больших энергиях рассеиваемые частицы испытывают небольшое отклонение в области действия силового поля и можно ограничиться приближенным вычислением только изменения фазы волновой функции, а уже отсюда найти и амплитуду рассеяния.

В данной работе исследуется амплитуда потенциального рассеяния при большой энергии частиц на основе интегрального уравнения для амплитуды.

В разделе 2 вводится J_0-представление для амплитуды рассеяния. Получено интегральное уравнение для "локальной" амплитуды, из которого следует высокоэнергетическое приближение (раздел 3).

Исследование принятых в разделе 3 приближений приводит к исправлению существующей амплитуды эйконального приближения при тех же условиях применимости (раздел 4). Возможные изменения дифференциального сечения при рассеянии вперед обсуждаются на примере кулоновского взаимодействия.

2. J_0 -представление амплитуды

Запишем амплитуду рассеяния частицы на потенциале $V(r)$ в следующем виде:

$$f(\theta) = -\frac{1}{4\pi}\int e^{-i\bar{p}\bar{r}} U(r)\,\Psi_{\bar{p}_0}(r)\,d^3r\,, \quad U(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r)\,, \tag{1}$$

где

$$\Psi(\bar{r}) = e^{i\bar{p}_0\bar{r}} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{e^{ip|\bar{r}-\bar{r}'|}}{|\bar{r}-\bar{r}'|} U(r')\Psi(\bar{r}')\,d^3r'. \tag{2}$$

Введем функцию $\phi(\bar{r}) = e^{-i\bar{p}_0\bar{r}}\,\Psi(\bar{r})$ и запишем уравнение (1) в виде:

$$f(\theta) = -\frac{1}{4\pi}\int e^{i\bar{q}\bar{r}}\, U(r)\,\phi(\bar{r})\,d^3r\,, \quad \bar{q} = \bar{p}_0 - \bar{p}\,, \tag{3}$$

$\bar{p}_0$, $\bar{p}$ -начальный и конечный импульсы частицы. Функция $\phi(\bar{r})$ удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$\phi(\bar{r}) = 1 - \frac{1}{4\pi}\int \frac{e^{ip|\bar{r}-\bar{r}'|}}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\, e^{i(\bar{p}_0,\bar{r}'-\bar{r})}\, U(r')\,\phi(\bar{r}')\,d^3r'\,. \tag{4}$$

Учтем теперь, что

$$\int e^{i\bar{q}\bar{r}}\, U(r)\,d^3r \equiv U(q) = -4\pi\int_0^\infty J_0(q\rho)\,\chi(\rho)\,\rho\,d\rho\,, \tag{5}$$

где

$$\chi(\rho) = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} U\left(\sqrt{\rho^2 + z^2}\right)dz\,, \tag{6}$$

$J_0(x)$ -цилиндрическая функция Бесселя. Тогда уравнение (3) можно представить в виде:

$$f(\theta) = -\frac{1}{4\pi}\int d^3 r \int e^{i(\bar{q}-\bar{\tau},\bar{r})} U(r)\, d^3 r \int e^{i\bar{\tau}\bar{r}'} \phi(\bar{r}')\, d^3 r'$$

$$= \int_0^\infty M(q\rho)\, \chi(\rho)\, \rho\, d\rho\,, \tag{7}$$

где положено

$$M(q\rho) = \int J_0(\rho\, |\bar{q} - \bar{\tau}|)\, \phi(\bar{\tau})\, d\tau\,, \tag{8}$$

а также

$$\phi(\bar{\tau}) = \delta(\bar{\tau}) - \frac{1}{|\bar{p}_0 - \bar{\tau}|^2 - p^2 - i\delta} \int U(|\bar{\tau} - \bar{\tau}'|)\, \phi(\bar{\tau}')\, \frac{d^3\tau'}{(2\pi)^3}. \tag{9}$$

Как видно из уравнения (8), (7) и (9), в первом приближении имеем:

$$\phi^{(0)}(\bar{\tau}) = \delta(\bar{\tau})\,,\quad M^{(0)}(q\rho) = J_0(q\rho)\,,\quad f^{(0)}(\theta) = \int_0^\infty J_0(q\rho)\, \chi(\rho)\, \rho\, d\rho.$$

"Локальная" амплитуда M удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$M(q\rho) = M^{(0)}(q\rho) + \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \rho' d\rho' \chi(\rho') \int \frac{J_0(\rho|\bar{q}-\bar{\tau}|)\, M(\rho'\tau)}{|\bar{p}_0-\bar{\tau}|^2 - p^2 - i\delta}\, d^3\tau\,. \tag{10}$$

Для получения уравнения (10) следует подставить (9) в (8) и учесть формулу (5). Отметим, что непосредственным преобразованием каждого члена итерационного ряда, полученного из уравнения (10), можно показать представимость амплитуды рассеяния в виде:

$$f(\theta) = \int_0^\infty J_0(q\rho)\, \{\rho\chi(\rho) + f_1(\rho) + \ldots\}\, d\rho$$

в согласии с общим требованием к амплитуде /3/. Формальной подстановкой $M(q\rho)=J_0(q\rho)\Gamma(\rho)$ получим для неизвестной функции $\Gamma(\rho)$ следующее уравнение:

$$\Gamma(\rho)=1+\frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{J_0(q\rho)}\int_0^\infty \rho' d\rho' \chi(\rho') \int \frac{J_0(\rho|\bar{q}-\bar{\tau}|)J_0(\rho'\tau)\Gamma(\rho')}{|\bar{p}_0-\bar{\tau}|^2-p^2-i\delta}d^3\tau . \qquad (10')$$

Непосредственным вычислением в разделе 4 показано, что с точностью до членов $\approx q^2$ интеграл не зависит от q . Поэтому, оставляя первый член разложения по q , получаем

$$\Gamma(\rho)=1+\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty G(\rho,\rho')\Gamma(\rho')d\rho', \qquad (11)$$

$$G(\rho,\rho')=\rho'\chi(\rho')\int\frac{J_0(\rho|\bar{p}_0-\bar{\tau}|)J_0(\rho'|\bar{p}_0-\bar{\tau}|)}{\tau^2-p^2-i\delta}d^3\tau . \qquad (12)$$

В принятом приближении задача отыскания амплитуды рассеяния сводится к решению интегрального уравнения (11) с ядром (12) и последующей подстановкой $\Gamma(\rho)$ в уравнение (7).

3. Приближение большой энергии

Рассмотрим интеграл, входящий в ядро $G(\rho,\rho')$,

$$\tilde{\tilde{G}}(\rho,\rho')=\int\frac{J_0(\rho|\bar{p}_0-\bar{\tau}|)J_0(\rho'|\bar{p}_0-\bar{\tau}|)}{\tau^2-p^2-i\delta}d^3\tau . \qquad (13)$$

Пренебрегая главным значением интеграла, получаем

$$\tilde{\tilde{G}}(\rho,\rho')\approx i\pi\int\delta(\tau^2-p^2)J_0(\rho|\bar{p}_0-\bar{\tau}|)J_0(\rho'|\bar{p}_0-\bar{\tau}|)d^3\tau$$

$$=i\pi^2\int_0^\pi J_0(\rho p\sqrt{2(1-\cos\theta)})\,J_0(\rho' p\sqrt{2(1-\cos\theta)})\sin\theta d\theta .$$

После подстановки $w=\sqrt{2}p\sqrt{1-\cos\theta}$ получим:

$$\tilde{\tilde{G}}(\rho,\rho')=i\frac{\pi^2}{p}\int_0^{2p}J_0(\rho\omega)J_0(\rho'\omega)\,w\,dw=i\frac{\pi^2}{p}\left[\frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho')+O\left(\frac{1}{p}\right)\right]. \qquad (14)$$

При большой энергии с точностью до членов $O\left(\frac{1}{p^2}\right)$ имеем окончательно для ядра уравнения (11):

$$G(\rho,\rho')=i\frac{\pi^2}{p}\chi(\rho)\,\delta(\rho-\rho'). \qquad (15)$$

Алгебраическое уравнение, полученное из (11) с подстановкой (15), решается в явном виде:

$$\Gamma(\rho)=\frac{1}{1-\frac{i}{2p}\chi(\rho)}.$$

Для амплитуды рассеяния получаем формулу:

$$f(\theta)=\int_0^\infty J_0(q\rho)\chi(\rho)\Gamma(\rho)\rho\,d\rho=\int_0^\infty J_0(q\rho)\frac{\chi(\rho)}{1-\frac{i}{2p}\chi(\rho)}\rho\,d\rho, \qquad (16)$$

$$\chi(\rho)=-\int_0^\infty U\left(\sqrt{\rho^2+z^2}\right)dz,\quad q=2p\sin\frac{\theta}{2}.$$

Это формула была положена в основу большого теоретического исследования работы /2/. При условии $|\chi(\rho)|\ll p$ формула (16) переходит в известную формулу Глаубера /1/.

4. Оценка отброшенных слагаемых. Условие применимости

1. При выводе формулы (16) мы пренебрегали главным значением интеграла (13). Для оценки выражения

$$\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \rho' d\rho' \chi(\rho')\Gamma(\rho') \int \frac{J_0(\rho|\bar{p}_0-\bar{\tau}|)\, J_0(\rho'|\bar{p}_0-\bar{\tau}|)}{\tau^2-p^2} d^3\tau \qquad (17)$$

можно воспользоваться первым приближением для $\Gamma, (\Gamma(\rho)=1)$ или принять, что выполняется условие $\left|\frac{d\chi}{d\rho}\right| R \ll p$. Во втором случае $\Gamma(\rho)$ слабо зависит от ρ и поэтому запишем (17) приближено как $\frac{\Delta(\rho)}{p}\Gamma(\rho)$, где

$$\Delta(\rho) = \frac{p}{2\pi^2}\int_0^\infty \rho' d\rho' \chi(\rho') \int \frac{J_0(\rho|\bar{p}_0-\bar{\tau}|)J_0(\rho'|\bar{p}_0-\bar{\tau}|)}{\tau^2-p^2} d^3\tau\ . \qquad (18)$$

Амплитуду рассеяния в этом случае легко получить, учитывая (17), (18) в уравнении (11):

$$f(\theta) = \int_0^\infty J_0(q\rho) \frac{\chi(\rho)}{1-\frac{\Delta(\rho)}{p}-\frac{i}{2p}\chi(\rho)} \rho d\rho . \qquad (19)$$

Видно, что учет Δ изменяет действительную часть знаменателя подинтегрального выражения (16), а, значит, и действительную и мнимую части амплитуды рассеяния. Добавка $\frac{\Delta}{p}$ может быть существенной при рассеянии на малые углы в случае, когда Δ слабо зависит от энергии.

В качестве примера вычислим Δ для кулоновского взаимодействия. В этом случае

$$\int_0^\infty J_0(\rho\tau)\chi(\rho)\rho d\rho = \frac{\gamma}{\tau^2},\quad \gamma = \pm\frac{2\mu}{h^2} Z e^2 , \qquad (20)$$

μ - приведенная масса. Подставим (20) в (18) и учтем, что /4/

$$\int_0^\infty \frac{J_0(\rho u)}{u^2-z^2} du = \frac{\pi}{2z}[i s J_0(\rho z) - H_0(\rho z)],\quad \mathrm{Im}\, z \neq 0,$$

$$s = \mathrm{sign}(\mathrm{Im}\, z),$$

где $H_0(x)$ – функция Струве. После несложных преобразований получаем:

$$\Delta(\rho) = -\frac{\gamma}{2}\int_0^1 H_0(2p\rho y)\,\frac{dy}{y} = \frac{\pi}{4}\gamma + O\left(\frac{1}{p^2}\right). \tag{21}$$

2. Условие применимости основной формулы (19) найдем, оценивая порядок отброшенных интегралов в (10). Рассматриваемый интеграл

$$I = \int \frac{J_0(\rho|\bar{q} - \bar{r}|)\,J_0(\rho' r)}{|\bar{p}_0 - \bar{r}|^2 - p^2 - i\delta}\, d^3 r \tag{22}$$

разложим по степеням $\sin\frac{\theta}{2}$. Прежде всего воспользуемся формулой

$$J_0(\rho|\bar{q} - \bar{r}|) = J_0(\rho q)J_0(\rho r) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_m(\rho q)J_m(\rho r)\cos m\,\phi_{\hat{qr}}, \tag{23}$$

где, например,

$$\cos\phi_{\hat{qr}} = y\cos\theta_r - \sqrt{1-y^2}\,\sin\theta_r\,\sin\phi_r,$$

$$y = \sin\frac{\theta}{2}.$$

При $y=0$ сумма в (23) исчезает. Далее имеем

$$\frac{d}{dy}\left(J_m(\alpha y)\cos m\phi_{\hat{qr}}\right) = \frac{\alpha}{2}\left(J_{m-1}(\alpha y) - J_{m+1}(\alpha y)\right)\cos m\,\phi_{\hat{qr}}$$
$$+ J_m(\alpha y)\frac{d}{dy}\left(\cos m\phi_{\hat{qr}}\right),$$

$$\alpha = 2p\rho, \quad , m \neq 0,$$

так что первая производная суммы в (23) при $y=0$ и интегрировании в (22) даст нуль.

Аналогично для второй производной получаем:

$$\frac{d^2}{dy^2}\left(J_m(\alpha y)\cos m\phi_{\hat{qr}}\right)\Big|_{y=0} = \begin{cases} \alpha\cos\theta_r; & m=1 \\ \frac{\alpha^2}{2}\left(\cos^2\theta_r\sin^2\phi_r - 1\right); & m=2. \end{cases}$$

откуда следует окончательное выражение для (22)

$$I(y)=J_0(\alpha y)\int \frac{J_0(\rho\tau)J_0(\rho'\tau)}{|\bar{p}-\bar{\tau}|^2-p^2-i\delta}d^3\tau-\frac{\alpha^2y^2}{4}\int\frac{J_2(\rho\tau)J_0(\rho'\tau)}{|\bar{p}_0-\bar{\tau}|^2-p^2-i\delta}d^3\tau+\dots$$

Сходимость разложения зависит в основном от значения величины $\alpha y=\rho q$, поэтому в качестве условия применимости для амплитуды (19) может служить условие $\sin\frac{\theta}{2}\ll\frac{1}{pR}$, где R –характерный линейный размер рассеивающей системы.

Интересно отметить, что имеем также

$$\frac{d}{d\theta}\left\{\int\frac{J_0(\rho|\bar{q}-\bar{\tau}|)J_0(\rho'\tau)}{|\bar{p}_0-\bar{\tau}|^2-p^2-i\delta}d^3\tau\right\}_{\theta=\pi}=0.$$

Это обстоятельство может оказаться важным при отыскании амплитуды рассеяния при больших углах рассеяния.

5. Обсуждение

Проведенное здесь исследование амплитуды рассеяния на основе интегрального уравнения (10) в основном воспроизводит результаты высокоэнергетического подхода [1,2].

Указанное в разделе 4 отличие, однако, может быть существенным при углах рассеяния, удовлетворяющих условию применимости формулы. В частности, эта поправка изменит ширину и форму дифракционного пика рассеяния частиц вперед. Это можно легко понять, записав формулу (19) приближенно в следующем виде:

$$f(\theta) = -i\,p \int_0^\infty J_0\,(q\rho)\,[\,e^{\,i\frac{\chi(\rho)}{1+\tilde{\tilde{\Delta}}}} - 1\,]\,\rho\, d\rho\,.$$

Эта формула справедлива при $|\chi(\rho)| \ll P$ и следует из формулы (19).

Величина и знак $\tilde{\tilde{\Delta}}$ зависят от выбранного потенциала. При $\tilde{\tilde{\Delta}} < 0$ (потенциал притяжения) фактор $1+\tilde{\tilde{\Delta}}$ перемещает дифракционные минимумы сечения налево (сечение вперед возрастает). Обратная картина имеет место при $\tilde{\tilde{\Delta}} > 0$ (потенциал отталкивания).

При кулоновском рассеянии частиц рассеяние будет происходить эффективно на ядре с большим Z ($\tilde{\tilde{\Delta}} < 0$, например, для электронов) или с меньшим Z ($\tilde{\tilde{\Delta}} > 0$, для позитронов) по сравнению со случаем $\tilde{\tilde{\Delta}} = 0$ (формула Глаубера).

Хотя формулы типа (19) применимы при малых углах рассеяния, их широко используют как для обработки эксперимента /5/, так и для теоретических исследований /2/. Успешное применение этих формул при больших углах, иногда нарушающих даже условие $qR < 1$, по-видимому связано с тем, что они дают первое приближение при больших энергиях, а исправления, вносимые высшими порядками, малы.

Автор выражает глубокую благодарность проф. В.Г. Соловьеву, проф. Х.Я. Христову, д-ру Л. Г. Заставенко и д-ру Б.Н. Калинкину за обсуждение и критику работы.

Литература

1. R.Glauber. Lectures in Theoretical Physics, 1958. N.Y.
2. R.Blankenbecler., M.L.Goldberger. Phys. Rev., 126, 766 (1962).
3. E.Predazzi. Ann. Phys., 36, 228 (1966).

4. S.Flügge, H.Krüger. Zeitschrift für Physik, 216, 213 (1968).
5. W.Czyz, L.Lesniak. Phys. Lett., 24B, 227 (1967); 25B, 319 (1967).

Рукопись поступила в издательский отдел
15 апреля 1969 года.