А-62

7/IV-69

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р4 - 4335

И.В.Амирханов, М.А.Касымжанов

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КОРРЕКТНОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ В ЕДИНОЙ ТЕОРИИ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1969

7759/2 кр.

Р4 - 4335

И.В.Амирханов, М.А.Касымжанов

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КОРРЕКТНОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ В ЕДИНОЙ ТЕОРИИ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ

Направлено в Communications in Mathematical Physics

Введение

В последние годы интенсивно развиваются такие строгие подходы к решению проблемы многих тел, как метод сильной связи каналов /1/, усеченных асимптотик /2/, смешивания конфигураций /3/, Борна-Оппенгеймера /4/, гармонических функций /5/ и др. Замечательно то, что для этих подходов не требуется введения параметра малости, а на потенциал взаимодействия не накладывается почти никаких ограничений. Успехи теории в этом направлении в основном связаны с развитием мощной вычислительной техники, позволяющей численно решать сложные уравнения.

Гамильтониан для задачи N тел имеет вид

$$H = \sum_{i=1}^{N} T_i + \sum_{i<j} V_{ij} = H_0 + V \,, \tag{1}$$

где T_i - оператор кинетической энергии частицы с номером i, V_{ij} задает взаимодействие частиц i и j.

Волновая функция Ψ, описывающая определенный процесс рассеяния, удовлетворяет уравнению Шредингера

$$H\Psi = E\Psi \tag{2}$$

и граничным условиям в бесконечности,

$$\Psi \sim \Phi + \text{расходящаяся волна.} \tag{3}$$

Здесь Φ - функция, описывающая начальное состояние системы до процесса рассеяния

Уравнение Шредингера (2) является уравнением в частных производных, и непосредственное решение вызывает известные трудности. Поэтому исходное уравнение (2) заменяется другим, в некотором смысле близким к данному, и тем самым вместо сложного уравнения в частных производных получаются другие простые уравнения, которые можно решить численно.

Для этого удобно сначала перейти от уравнения Шредингера к эквивалентной ему бесконечной системе уравнений (бесконечная система дифференциальных уравнений, бесконечная система алгебраических уравнений, система интегро-дифференциальных уравнений и т.п.). Обычно это достигается разложением функций всей системы Ψ по некоторому полному набору функций $\{\phi_n\}$. Так, например, если в качестве такого полного набора функций выберем волновые функции двухцентровой задачи, то получаем метод Борна-Оппенгеймера, а если выберем волновые функции ядра мишени, то получаем метод сильной связи каналов и т.п. При приближенном решении бесконечная система уравнений заменяется конечной системой уравнений, и решение $\bar{\Psi}$ этой системы рассматривается как приближенное решение бесконечной системы уравнений или исходного уравнения Шредингера.

При этом возникает ряд проблем, связанных с

1) корректностью замены бесконечной системы конечной системой;

2) оценкой погрешности, которую мы допускаем, заменяя точное решение Ψ приближенным $\bar{\Psi}$;

3) устойчивостью вычислительного процесса.

Выбирая различные полные наборы функций $\{\phi_n\}$ (все эти полные наборы должны удовлетворять граничным условиям задачи), можно получить вместо уравнения Шредингера (2) различные бесконечные системы уравнений. При строгом решении все эти системы уравнений эквивалентны исходному уравнению Шредингера. Однако при приближенном решении эти системы приводят к различным результатам. Поэтому при решении конкретных задач оптимальный выбор базиса играет важную роль.

4. Насколько существенен произвол в выборе системы $\{\phi_n\}$, по которой разлагается полная волновая функция Ψ, и в каком случае какая система функций $\{\phi_n\}$ предпочтительнее?

В данной работе мы обсудим некоторые аспекты вышеперечисленных проблем применительно к приближенным методам, которые широко используются в единой теории ядерных реакций. В первом разделе исследуется сходимость метода сильной связи каналов [1]. Во втором разделе рассматривается сходимость МУА [2]. В третьем разделе обсуждаются система интегро-дифференциальных уравнений для задачи трех тел и сходимость некоторых других приближенных методов.

В работе [6] проведено исследование сходимости метода сильной связи каналов и выявлены факторы, влияющие на сходимость метода. В настояшей работе предлагается метод, который позволяет исследовать корректность многих приближенных методов с единой точки зрения. Кроме того, этот метод может служить одновременно алгоритмом решения исследуемых уравнений, что особенно удобно для систем интегро-дифференциальных уравнений.

Прежде чем перейти к изложению основного материала приведем несколько теорем [7], которые найдут применение при доказательстве сходимости приближенных методов.

Рассмотрим уравнения

$$(I - U)\,x = y\,, \tag{4}$$

$$(I - U_n)\,\bar{x}_n = y\,, \tag{5}$$

где U и U_n - линейные операторы, отображающие банахово пространство X в самое себя, I - тождественный оператор в X, y, $x \in X$.

Будем считать, что

$$\| U_n - U \| \le \Delta_n\,, \tag{6}$$

где Δ_n - некоторая постоянная.

Теорема 1. Если оператор $(I - U)$ обратим и

$$\Delta_n \| (I - U)^{-1} \| < 1 ,$$

то оператор $(I - U_n)$ также обратим. При этом, если $x = (I-U)^{-1} y$, а $\bar{x}_n = (I - U_n)^{-1} y$ при одном и том же y, то

$$\| \bar{x}_n - x \| \le \Delta_n \| (I - U_n)^{-1} \| \cdot \| x \| . \tag{7}$$

Эта теорема гарантирует существование решения (5) при любом y, если оператор U_n достаточно близок к U. Но эта теорема еще не дает возможности оценить погрешность, получающуюся при замене x на $\bar{x}_n$, так как в неравенство (7) входит норма $\| x \|$ неизвестного точного решения уравнения (4). Такую оценку дает следующая

Теорема 2. При обозначениях, введенных в предыдущей теореме, если $\Delta_n \| (I - U_n)^{-1} \| \le q < 1$, то

$$\| \bar{x}_n - x \| < \frac{q}{1 - q} \| \bar{x} \| . \tag{8}$$

Приведем еще одну теорему, которая связана с решением бесконечных систем линейных алгебраических уравнений по методу редукции.

Рассмотрим систему

$$\xi_i + \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k = \eta_i , \quad i = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

с бесконечным числом неизвестных ξ_i.

Метод редукции заключается в том, что решаются усеченные конечные системы

$$\bar{\xi}_i + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \bar{\xi}_k = \eta_i . \tag{10}$$

Если при любом достаточно большом n система (10) имеет единственное решение при заданных свободных членах η_i, а при $n \to \infty$ решение усеченной системы стремится по норме в некотором пространстве числовых последовательностей к решению системы (9), то говорят, что в этом пространстве метод редукции для системы (9) сходится.

Теперь предположим, что

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 < \infty , \quad \sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^2 < \infty . \tag{11}$$

Требуется найти решение системы (9), удовлетворяющее условию

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 < \infty . \tag{12}$$

Теорема 3. Если при сделанных предположениях система (9) имеет в пространстве ℓ^2 единственное решение при любом $\{\eta_i\} \in \ell^2$, то метод редукции для системы (9) сходится в этом пространстве.

Как уже отмечалось, многие приближенные методы приводят к решению бесконечной системы дифференциальных уравнений или системы интегро-дифференциальных уравнений. Используя метод, предложенный в работе /8/, мы можем перейти от этих систем к бесконечной системе алгебраических уравнений. Тогда удобно воспользоваться вышеприведенными теоремами.

1. Исследование сходимости метода сильной связи каналов

В теории рассеяния трех и более частиц и в теории ядерных реакций широко используется метод сильной связи каналов / /. Как мы уже отмечали, в этом формализме от уравнений в частных производных (2) переходят к бесконечной системе дифференциальных уравнений (если гамильтониан подсистемы имеет только дискретный спектр или к системе интегро-дифференциальных уравнений (если гамильтониан подсистемы имеет дискретный и непрерывный спектр).

Для простоты все рассуждения и выкладки будем проводить для одномерной задачи трех тел. Обобщение на случай ядерных реакций будет обсуждаться в конце этого раздела.

В координатах Якоби (R, ρ) и при $N = 3$ уравнение (2) можно переписать в следующем виде

$$[\, T_{R_1} + h_{23} + V_{12} + V_{13} - E \,]\, \Psi(R_1, \rho_{23}) = 0 \,, \tag{12}$$

где

$$h_{23} = [\, T_{\rho_{23}} + V_{23} \,] \; -$$

гамильтониан подсистемы.

В качестве полного набора функций будем брать собственные функции уравнения

$$h_{23}\, \phi_n = \epsilon_n\, \phi_n \,, \tag{13}$$

которые обычно предполагаются известными.

а) Предположим, что уравнение (13) имеет только дискретный спектр. Тогда решение (12) будем искать в виде

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(R_1)\, \phi_n(\rho_{23}) \,. \tag{14}$$

Подставляя (14) в (12), получаем бесконечную систему уравнений для определения функций $\chi_n(R_1)$

$$\left[\frac{d^2}{dR_1^2} + k_n^2\right] \chi_n(R_1) = \sum_{m=1}^{\infty} W_{nm}(R_1)\, \chi_m(R_1), \quad n = 1, 2, \ldots \,, \tag{15}$$

где

$$W_{nm}(R_1) = -\frac{2M}{h^2} \int \phi_n^*(\rho_{23})\, [\, V_{12}(R_1 \rho_{23}) + V_{13}(R_1 \rho_{23}) \,]\, \phi_m(\rho_{23})\, d\rho_{23} \tag{16}$$

и

$$k_n = \sqrt{\frac{2M}{h^2}(E - \epsilon_n)} \,, \quad M = \frac{(m_3 + m_2)\, m_1}{m_1 + m_2 + m_3} \,.$$

Систему уравнений (15) будем решать со следующими граничными условиями.

1. Для всех открытых каналов $(E > \epsilon_n,\ n = 1,2,\ldots a)$

$$\chi_n(R_1) \xrightarrow[R_1 \to 0]{} 0$$

$$\chi_n(R_1) \xrightarrow[R_1 \to \infty]{} \delta_{n\beta} \sin k_n R_1 + f_n e^{i k_n R_1}, \tag{17}$$

где

$$f_n = -\frac{1}{k_n} \int_0^\infty \sin k_n R_1 \sum_{m=1}^{\infty} W_{nm}(R_1) \chi_m(R_1) d R_1$$

амплитуда рассеяния в канале n и β – входной канал.

2. Для всех закрытых каналов $(E < \epsilon_n,\ n = a+1,\ a+2,\ldots)$

$$\chi_n(R_1) \xrightarrow[R_1 \to 0]{} 0$$

$$\chi_n(R_1) \xrightarrow[R_1 \to \infty]{} 0. \tag{18}$$

Таким образом, вместо уравнения в частных производных (12) мы получили эквивалентную ему бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако при практических расчетах бесконечная система заменяется конечной системой, что эквивалентно сохранению конечного числа членов в разложении (14)

$$\bar{\Psi} = \sum_{n=1}^{K} \bar{\chi}_n(R_1) \phi_n(\rho_{23}). \tag{19}$$

В дальнейшем $\bar{\Psi}$ рассматривается как приближенное решение системы уравнений (15) или как приближенное решение исходного уравнения (12).

Теперь покажем, что систему (15) можно решать методом редукции. Используя граничные условия (17) и (18), перепишем систему (15) в интегральной форме.

1. Для всех открытых каналов

$$\chi_n(R_1)=\delta_{n\beta}\sin k_n R_1-\frac{1}{k}\left\{e^{ik_nR_1}\int_0^{R_1}\sin k_n R_1'+\sin k_n R_1\int_{R_1}^{\infty}e^{ik_nR_1'}\right\}\times$$

$$\times\sum_{m=1}^{\infty}W_{nm}(R_1')\,\chi_m(R_1')\,dR_1' \,. \tag{20}$$

2. Для всех закрытых каналов

$$\chi_n(R_1)=\frac{-1}{kn}\left\{e^{-k_nR_1}\int_0^{R_1}e^{k_nR_1'}+e^{k_nR_1}\int_{R_1}^{\infty}e^{-k_nR_1'}-e^{-k_nR_1}\int_0^{\infty}e^{-k_nR_1'}\right\}\times$$

$$\times\sum_{m=1}^{\infty}W_{nm}(R_1')\,\chi_m(R_1')\,dR_1' \,. \tag{21}$$

Пусть $V_{ij}(\rho_i)$ ($i\neq j$, $i=1,2,3$, $j=1,2,3$) удовлетворяет условию $\int_a^{\infty}|V_{ij}|^2 d\rho_i<\infty$, где $a>0$ некоторое число. Тогда, такому же условию удовлетворяет функция $W_{nm}(R_1)$. Кроме того, так как $\chi_n(R_1)\xrightarrow[R_1\to 0]{}0$, то справедливо следующее разложение

$$\sum_{m=1}^{\infty}W_{nm}\chi_m=\sum_{i=1}^{\infty}B_i^n\phi_i(R_1), \tag{22}$$

где $\{\phi_i(R_1)\}$ – полный набор известных функций,

$$B_i^n=\int dR_1\,\phi_i^*(R_1)\sum_{m=1}^{\infty}W_{nm}(R_1)\,\chi_m(R_1)\,. \tag{23}$$

Подставляя (22) в (20) и (21), получаем

$$\chi_n(R_1)=\delta_{n\beta}\cdot\sin k_n R_1+\sum_{i=1}^{\infty}B_i^n f_i^n(R_1)\,,\quad n=1,2,\dots a \tag{24}$$

и

$$\chi_n(R_1)=\sum_{i=1}^{\infty}B_i^n g_i^n(R_1),\quad n=a+1,a+2,\dots \tag{25}$$

где

$$f_i^n(R_1) = -\frac{1}{kn}\left\{ e^{ik_nR_1}\int_0^{R_1} \sin k_nR_1' + \sin k_nR_1 \int_{R_1}^{\infty} e^{ik_nR_1'} \right\}\phi_i(R_1')\,dR_1' , \tag{26}$$

$$g_i^n(R_1) = -\frac{1}{kn}\left\{ e^{-k_nR_1}\int_0^{R_1} e^{k_nR_1'} + e^{k_nR_1}\int_{R_1}^{\infty} e^{-k_nR_1'} - e^{-k_nR_1}\int_0^{\infty} e^{-k_nR_1'} \right\}\phi(R_1')\,dR' \tag{27}$$

Подставляя (24) и (25) в (23), получаем алгебраические уравнения для определения коэффициентов разложения

$$B_i^n + \sum_j \left(\sum_{m=1}^{\alpha} Q_{1injm} + \sum_{m=\alpha+1}^{\infty} Q_{2injm} \right) B_j^m = C_i^n , \tag{28}$$

где

$$Q_{1injm} = -\int d R_1 \phi_i^*(R_1) W_{nm}(R_1) f_j^m(R_1),$$

$$Q_{2injm} = -\int d R_1 \phi_i^*(R_1) W_{nm}(R_2) g_j^m(R_1), \tag{29}$$

$$C_i^n = \delta_{n\beta}\int dR_1 \varphi_i^*(R_1) W_{nm}(R_1) \sin k_n R_1 .$$

Таким образом, из бесконечной системы дифференциальных уравнений (15) или из бесконечной системы интегральных уравнений (20) и (21) мы перешли к эквивалентной бесконечной системе алгебраических уравнений (28). Поэтому, если докажем, что систему (28) можно решать методом редукции, то отсюда будет следовать, что и систему уравнений (15) можно решать методом редукции.

Согласно теореме 3, если

$$\sum_{m=1}^{\alpha} \sum_{jin}^{\infty} |Q_{1injm}|^2 < \infty , \tag{30}$$

$$\sum_{m=\alpha+1}^{\infty}\ \sum_{jin}^{\infty} |Q_{2injm}|^2 < \infty , \tag{31}$$

$$\sum_{i,n=1}^{\infty} |C_i^n|^2 < \infty , \tag{32}$$

то систему уравнений (28) можно решать методом редукции и решение будет удовлетворять условию

$$\sum_{i,n=1}^{\infty} |B_i^n|^2 < \infty . \tag{33}$$

Покажем, что условие (31) удовлетворяется.

Так как $W_{nn}(R_1)\, g_j^n(R_1)$ – квадратично интегрируемая функция, то справедливо разложение

$$W_{nm}(R_1)\, g_j^n(R_1) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i^{nmj}\, \phi_i(R_1),$$

где

$$A_i^{nmj} = \int dR_1\, \phi_i^*(R_1)\, W_{nm}(R_1)\, g_j^m(R_1) = Q_{2injm} ,$$

отсюда

$$\int |W_{nm}(R_1)\, g_j^m(R_1)|\ dR_1 = \sum_i |Q_{2injm}|^2 .$$

Просуммировав последнее равенство по n, j, m и используя формулы (II.15) и (II.20) (см. приложение), получаем

$$\sum_{injm} |Q_{2injm}|^2 < N^2 \sum_{jm} \left|\frac{1}{\alpha_i^2 + k_m^2}\right|^2 \int dR_1 \int d\rho_{23}\, |\phi_m(V_{12}+V_{13})|^2 . \tag{34}$$

Так как при любых значениях m интеграл

$$\int dR_1 \int d\rho_{23}\, |\varphi_m(\rho_{23})(V_{12}+V_{13})|^2 = P_m$$

остается ограниченной величиной, т.е. $P_m \leq P$, где P – некоторое число и ряд

$$\sum_{jm} \left| \frac{1}{\alpha_j^2 + k_m^2} \right|^2 < \infty$$

сходится, то отсюда следует справедливость условия (31). Аналогично доказываются соотношения (30) и (32).

Таким образом, мы доказали, что бесконечную систему (28) можно решать методом редукции. Поэтому при практических расчетах мы можем решать конечную систему уравнений

$$\bar{B}_i^n + \sum_{j=1}^{\sigma} \left(\sum_{m=1}^{\alpha} Q_{1injm} + \sum_{m=\alpha+1}^{\delta} Q_{2injm} \right) \bar{B}_j^m = C_i^n . \tag{35}$$
$$n = 1,2,\ldots \delta \qquad i = 1,2,\ldots \sigma ,$$

$\bar{B}_i^n$ можно рассматривать как приближенное решение бесконечной системы уравнений (28).

Теорема 2 дает возможность оценить погрешность получающуюся при замене B_n^i на $\bar{B}_n^i$

$$\| B_i^n - \bar{B}_i^n \| \leq \frac{q}{1-q} \| \bar{B}_i^n \| , \tag{36}$$

где

$$\Delta_{\delta\sigma} \| D_{\delta\sigma}^{-1} \| \leq q < 1 , \quad \Delta_{\delta\sigma} = \sqrt{\sum_{\substack{n=\delta+1 \\ i=\sigma+1}}^{\infty} \sum_{j,m=1}^{\infty} | Q_{2injm} |^2} , \tag{37}$$

а $D_{\delta\sigma}^{-1}$ – обратная матрица однородного уравнения (35). Используя неравенство (П.15) и (П.17), можно показать, что $\Delta_{\delta\sigma} \to 0$ при $\delta \to \infty$ и $\sigma \to \infty$. Кроме того, при $\delta \to \infty$ и $\sigma \to \infty$ $D_{\delta\sigma}^{-1}$ остается ограниченной, поэтому при $\delta \to \infty$ и $\sigma \to \infty$, $\| B_i^n - \bar{B}_i^n \| \to 0$, т.е. погрешность стремится к нулю.

Решая конечную систему (35), мы получаем $\bar{B}_i^n$. Подставляя эти решения в (24) и (25), мы получаем приближенные волновые функции в каждом канале в форме

$$\bar{\chi}_n(R_1) = \delta_n \beta \sin k_n R_1 + \sum_{i=1}^{\sigma} \bar{B}_i^n f_i^n(R_1); \quad n = 1,2,\ldots a \tag{24}$$

и

$$\bar{\chi}_n(R_1) = \sum_{i=1}^{\sigma} \bar{B}_i^n g_i^n(R_1), \quad n = a+1, a+2, \ldots \delta. \tag{25}$$

Это дает нам возможность оценить погрешность в каждом канале

$$\rho_\sigma^n = \sup \left| \chi_n(R_1) - \bar{\chi}_n(R_1) \right| =$$
$$= \sup \left| \sum_{i=1}^{\sigma} (B_i^n - \bar{B}_i^n) f_i + \sum_{i=\sigma+1}^{\infty} B_i^n f_i \right|, \quad n = 1,2,\ldots a \tag{38}$$

и

$$\rho_\sigma^n = \sup \left| \sum_{i=1}^{\sigma} (B_i^n - \bar{B}_i^n) g_j^n + \sum_{i=\sigma+1}^{\infty} B_i^n g_j^n \right|, \quad n = a+1, a+2, \ldots \delta. \tag{39}$$

Используя формулы (П.9) и (П.15), перепишем (38) в следующем виде:

$$\rho_\sigma^n \leq M \sqrt{2 \left[\sum_{n=1}^{\sigma} (B_i^n - \bar{B}_i^n)^2 \sum_{i=1}^{\sigma} \left(\frac{1}{a_i^2 - k_n^2} \right)^2 + \sum_{i=\sigma+1}^{\infty} |B_i^n|^2 \sum_{i=\sigma+1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_i^2 - k_n^2} \right)^2 \right.} \; . \tag{40}$$

Так как

$$\lim_{\sigma \to \infty} \sum_{i=1}^{\sigma} \left(\frac{1}{a_i^2 - k_n^2} \right)^2 < \infty, \quad \lim_{\sigma \to \infty} \sum_{i=\sigma+1}^{\infty} |B_i^n|^2 \to 0,$$

$$\lim_{\sigma \to \infty} (B_i^n - \bar{B}_i^n)^2 \to 0,$$

получим

$$\rho_{\sigma}^{n} \xrightarrow[\sigma \to \infty]{} 0 . \qquad (41)$$

Аналогично можно доказать и равенство (39).

Таким образом, приближенное решение бесконечной системы уравнений в каждом канале сходится к точному равномерно. Точно так же можно убедиться, что $\bar{\Psi}$ сходится к Ψ равномерно.

б) Предположим, что уравнение (13) имеет дискретный и непрерывный спектр, тогда вместо (14) имеем следующее разложение

$$\Psi = \sum_{n=1}^{s} \chi_n (R_1) \phi_n (\rho_{23}) + \int \chi (R_1 \epsilon) \phi (\rho_{23} \epsilon) d \quad , \qquad (42)$$

где s – число дискретных уровней.

В этом случае вместо бесконечной системы дифференциальных уравнений получаем систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$\left[\frac{d^2}{d R_1^2} + k_n^2 \right] \chi_n (R_1) = \sum_{m=1}^{s} W_{nm}(R_1) \chi_m (R_1) + \int d\epsilon \, W_n(R_1 \epsilon) \chi (R_1 \epsilon)$$

$$n = 1,2, \ldots s \qquad (43)$$

$$\left[\frac{d^2}{d R_2^2} + k_\epsilon^2 \right] \chi (R_1 \epsilon) = \int d\epsilon' \, W (R_1, \epsilon, \epsilon') \chi (R_1 \epsilon') + \sum_m W_m (R_1 \epsilon) \chi (R_1) ,$$

где

$$W_{nm}(R_1) = \frac{2M}{h^2} \int d\rho_{23} \, \phi_n^* (\rho_{23}) [V_{12}(R_1 \rho_{23}) + V_{13}(R_1 \rho_{23})] \phi_n (\rho_{23}) ,$$

$$W_n (R_1 \epsilon) = \frac{2M}{h^2} \int d\rho_{23} \, \phi_n^* (\rho_{23}) [V_{12}(R_1 \rho_{23}) + V_{13}(R_1 \rho_{23})] \phi (\rho_{23} \epsilon) , \qquad (44)$$

$$W (R_1, \epsilon\epsilon') = \frac{2M}{h^2} \int d\rho_{23} \, \phi_n^* (\rho_{23} \epsilon) [V_{12}(R_1 \rho_{23}) + V_{13}(R_1 \rho_{23})] \phi (\rho_{23} \epsilon') ,$$

$$k_n = \sqrt{\frac{2M}{h^2} (E - \epsilon_n)} , \qquad k_\epsilon = \sqrt{\frac{2M}{h^2} (E - \epsilon)} .$$

Из оценок этих коэффициентов (П.27) (П.28) (см. приложение) видно, что функции

$$J_n(R_1) = \sum_m W_{nm}(R_1)\chi_m(R_1) + \int d\epsilon\, W_n(R_1\epsilon)\chi(R_1,\epsilon)$$

$$J(R_1\epsilon) = \int d\epsilon'\, W(R_1,\epsilon,\epsilon')\chi(R_1,\epsilon') + \sum_m W_m(R_1\epsilon)\chi_m(R_1)$$

отличны от нуля в конечной области или быстро убывают при $R_1 \to \infty$ и $\epsilon \to \infty$. Поэтому мы можем разложить эти функции в ряд Фурье

$$J_n(R_1) = \sum_i A_i^n \psi_i(R_1), \tag{45}$$

и

$$J(R_1,\epsilon) = \sum_{mp} B_{mp}\psi_m(R_1)\psi_p(\epsilon),$$

где $\psi_i(R_1)$, $\psi_m(R_1)$ и $\psi_p(\epsilon)$ – полный набор известных функций.

Подставляя (45) в (43), получим

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{d^2}{dR_1^2} + \epsilon_n^2\right]\chi_n(R_1) = \sum_i A_i^n\psi_i(R_1), \quad n = 1,2,\dots s\\
&\left[\frac{d^2}{dR_1^2} + \epsilon^2\right]\chi(R_1\epsilon) = \sum_{mp} B_{mp}\psi_m(R_1)\psi_p(\epsilon).
\end{aligned} \tag{46}$$

Таким образом, от системы интегро-дифференциальных уравнений мы перешли к неоднородным дифференциальным уравнениям. Точно так же как и выше мы можем перейти от уравнений (46) к интегральным уравнениям, а потом к бесконечной системе алгебраических уравнений на коэффициенты разложения A_i^n и B_{mp}.

Проделав все выкладки предыдущего раздела, можно показать, что и в этом случае имеет место сходимость приближенного решения к точному.

Если мы имеем дело с ядерными реакциями, то вместо гамильтониана h_{23} будет гамильтониан ядра мишени $H_я$ и вместо (13) –

$$H_я\,\Phi_n = E_n\Phi_n. \tag{13'}$$

Предполагая Φ_n известными, можно повторить вышеприведенный формализм на случай ядерных реакций.

В заключение этого раздела отметим два фактора, которые влияют на сходимость (см. (П .9), (П .15)).

Первым фактором является скорость убывания коэффициентов W_{nm} при $n \to \infty$ и $m \to \infty$. Это зависит от поведения волновых функций Φ_n. В методе сильной связи каналов в качестве таких функций берут волновые функции ядра мишени (одночастичные состояния, коллективные состояния и т.д.). Поэтому каждый раз W_{nm} по-разному будет убывать при $n \to \infty$ и $m \to \infty$.

Вторым фактором является так называемый подбарьерный фактор $\dfrac{1}{\alpha_i^2 + k_n^2}$, который возникает для закрытых каналов из-за недостаточности полной энергии для возбуждения высших состояний подсистемы (ядра мишени). Это означает, что чем больше расстояние между уровнями подсистемы, тем сильнее влияет последний фактор на сходимость метода сильной связи каналов.

В общем случае на скорость сходимости влияют оба фактора одновременно. Поэтому анализ влияния каждого фактора становится сложным.

2. Сходимость метода усеченных асимптотик (МУА)

При описании реакций с перераспределением частиц возникает ряд трудностей. Пусть при рассеянии открыты следующие каналы

$$\begin{aligned} (2+3)+1 &\longrightarrow (2+3)+1 \qquad \mathrm{I} \\ &\longrightarrow (1+3)+2 \qquad \mathrm{II}\,. \end{aligned} \tag{47}$$

Здесь скобки объединяют частицы, образующие связанную систему, I – прямой канал и II – канал с перераспределением частиц.

Основная трудность, которая возникает при решении уравнения Шредингера (12) с граничными условиями (47), заключается в том, что разложение (14) становится неудобным для одновременного удовлетворения граничным условиям в прямом и перераспределенном канале. Поэтому в МУА /2/ предлагается модифицированный метод разложения

$$\Psi = \Phi + \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(R_1)\phi_n(\rho_{23}), \tag{48}$$

где Φ – вспомогательная функция, известная с точностью до константы, регулярная в нуле и описывающая асимптотическое поведение рассеянной волны в перераспределенном канале. Это приведет к тому, что вместо бесконечной системы однородных уравнений имеем бесконечную систему неоднородных уравнений

$$\left[\frac{d^2}{dR_1^2} + k_n^2\right]\chi_n(R_1) = \sum_{m=1}^{\infty} W_{nm}(R_1)\chi_m(R_1) + J_n(R_1), \tag{49}$$

где функция

$$J_n(R_1) = \int d\rho_{23}\, \phi_n^*(\rho_{23})[H-E]\cdot\Phi \tag{50}$$

отлична от нуля в конечной области или быстро убывает в бесконечности.

Проделав все выкладки предыдущего раздела, мы можем получить следующие алгебраические уравнения

$$B_i^n + \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\alpha} Q_{1injm} + \sum_{m=\alpha+1}^{\infty} Q_{2injm}\right)B_j^m = D_i^m, \tag{51}$$

где

$$D_i^n = C_i^n + \int dR_1\, \phi_i^*(R_1)J_n(R_1). \tag{52}$$

Заметим, что система (51) отличается от системы (28) только сободным членом D_i^m. Поэтому, если

$$\sum_{in} |D_i^n|^2 < \infty, \tag{53}$$

то все результаты предыдущего раздела будут справедливы и для системы уравнений (51) или (49). Тем самым будет доказана сходимость МУА. Используя способ, предложенный в приложении, нетрудно убедиться, что (53) удовлетворяется.

3. Система интегро-дифференциальных уравнений для задач трех тел

Несмотря на то, что МУА является очень удобным при практических расчетах, скорость сходимости этого метода может существенно зависеть от функции Φ (см. разложение (48)). Такая зависимость возникает при рассмотрении тождественных частиц, так как полная волновая функция должна быть антисимметризована.

В этом разделе мы хотим обратить внимание на один способ получения системы интегро-дифференциальных уравнений для задачи трех тел, где все каналы описываются с единой точки зрения и какой-либо канал не выделяется. Рассмотрим рассеяния со следующими открытыми каналами

$$
\begin{array}{lll}
(2+3)+1 \longrightarrow & (2+3)+1 & \mathrm{I} \\
\longrightarrow & (1+3)+2 & \mathrm{II} \\
\longrightarrow & (1+2)+3 & \mathrm{III} \\
\longrightarrow & 1+2+3 & \mathrm{IV}
\end{array}
\qquad (54)
$$

Здесь скобки объединяют частицы, образующие связанную систему.

Заметим, что входным каналом может оказаться любой из каналов правой части (54) (это зависит от граничных условий задачи). Кроме того, связанные частицы могут иметь возбужденные состояния, поэтому каждый канал (I , II , III) имеет подканалы неупругого рассеяния.

Как уже отмечалось в предыдущем разделе, каждый канал (I, II, III) удобно описывать своими переменными (R, ρ). Поэтому уравнение (2) при $N = 3$ и после исключения движения центра масс можно переписать в виде следующих эквивалентных уравнений

$$[H_1 - E]\Psi = 0,$$

$$[H_2 - E]\Psi = 0, \qquad (55)$$

$$[H_3 - E]\Psi = 0,$$

где

$$H_1 = [T_{R_1} + h_{23} + V_{12} + V_{13}]$$

$$H_2 = T_{R_2} + h_{13} + V_{12} + V_{23}] \qquad (56)$$

$$H_3 = [T_{R_3} + h_{12} + V_{13} + V_{23}]$$

с двухчастичными гамильтонианами

$$h_{23} = [T_{\rho_{23}} + V_{23}],$$

$$h_{13} = [T_{\rho_{13}} + V_{13}], \qquad (57)$$

$$h_{12} = [T_{\rho_{12}} + V_{12}].$$

Решения двухчастичных задач

$$h_{23}\, g_p(\rho_{23}) = \epsilon_p\, g_p(\rho_{23}), \qquad (58)$$

$$h_{13}\, \phi_t(\rho_{13}) = \epsilon_t\, \phi_t(\rho_{13}), \qquad (59)$$

$$h_{12}\, \phi_n(\rho_{12}) = \epsilon_n\, \phi_n(\rho_{12}) \qquad (60)$$

будем считать известными. Предположим, что уравнения (58), (59) и (60) имеют дискретный и непрерывный спектр.

Чтобы удовлетворить граничному условию (54) во всех каналах, удобно искать решение в следующем виде:

$$\Psi = \sum_{p=1}^{\gamma} \chi_p(R_1)\, g_p(\rho_{23}) + \sum_{t=1}^{\beta} \chi_t(R_2)\, \phi_t(\rho_{13}) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\alpha} \chi_n(R_3)\, \phi_n(\rho_{12}) + \int \chi(R_3 \epsilon)\, \phi(\rho_{12}\, \epsilon)\, d\epsilon\,, \qquad (61)$$

где $\gamma\,(\beta, \alpha)$ – число связанных состояний соответственно в системах $(2+3)$, $(1+3)$, $(1+2)$.

Подставляя (61) в (55), умножая слева на функции $\{g\}$, $\{\phi\}$ и проинтегрировав по соответствующим переменным, получим систему зацепленных интегро–дифференциальных уравнений на коэффициенты разложения

$$\left[\frac{d^2}{dR_1^2} + k_p^2\right] \chi_p(R_1) = J_p(R_1)\,, \quad p = 1,2, \ldots \gamma\,,$$

$$\left[\frac{d^2}{dR_2^2} + k_t^2\right] \chi_t(R_2) = J_t(R_2)\,, \quad t = 1,2, \ldots \beta\,, \qquad (62)$$

$$\left[\frac{d^2}{dR_3^2} + k_n^2\right] \chi_n(R_3) = J_n(R_3)\,, \quad n = 1,2, \ldots \alpha\,,$$

$$\left[\frac{d^2}{dR_3^2} + k_\epsilon^2\right] \chi(R_3 \epsilon) = J(R_3 \epsilon)\,,$$

где

$$J_p(R_1) = \sum_{p'=1}^{\gamma} W_{pp'}(R_1)\, \chi_{p'}(R_1) - \frac{M_1}{h^2} \int d\rho_{23}\, g_p^*(\rho_{23}) \{ [H_2 - E] \sum_{t=1}^{\beta} \chi_t(R_2)\, \bar{\phi}_t(\rho_{13}) +$$

$$+ [H_3 - E] (\sum_{n=1}^{\alpha} \chi_n(R_3)\, \phi_n(\rho_{12}) + \int \chi(R_3 \epsilon)\, \phi(\rho_{12} \epsilon)\, d\epsilon) \}\,,$$

$$J_t(R_2) = \sum_{t'=1}^{\beta} W_{tt'}(R_2)\, \chi_{t'}(R_2) - \frac{M_2}{h^2} \int d\rho_{13}\, \bar{\phi}_t^*(\rho_{13}) \{ [H_1 - E] \sum_{p=1}^{\gamma} \chi_p(R_1)\, g_p(\rho_{23}) +$$

$$+[H_3-E]\{\sum_{n=1}^{a}\chi_n(R_3)\phi_n(\rho_{13})+\int\chi(R_3\epsilon)\phi(\rho_{12}\epsilon)\,d\epsilon)\},$$

$$J_n(R_3)=\sum_{n'=1}^{a}W_{nn'}(R_3)\chi_{n'}(R_3)\chi\ (R\ )-\frac{M_3}{h^2}\int d\rho_{12}\phi_n^*(\rho_{12})\{[H_1-E]\sum_{p=1}^{\gamma}\chi_p(R_1)g_p(\rho_{23})+$$

$$+[H_2-E]\sum_{t=1}^{\beta}\chi_t(R_2)\bar{\phi}_t(\rho_{13})\}+\int d\epsilon\,W_n(R_3\epsilon)\chi(R_3\epsilon),$$

$$J(R_3\epsilon)=\int d\epsilon' W(R_3\epsilon\epsilon')\chi(R_3\epsilon')*-\frac{M_3}{h^2}\int d\rho_{12}\phi^*(\rho_{12}\epsilon)\{[H_1-E]\sum_{p=1}^{\gamma}\chi_p(R_1)g_p(\rho_{23})+$$

$$+[H_2-E]\sum_{t=1}^{\beta}\chi_t(R_2)\bar{\phi}_t(\rho_{13})\}+\sum_n W_n(\epsilon R_3)\chi_n(R_3),$$

$$k_p=\sqrt{\frac{2M_1}{h^2}(E-\epsilon_p)},\quad k_t=\sqrt{\frac{2M_2}{h^2}(E-\epsilon_t)},$$

$$k_n=\sqrt{\frac{2M_3}{h^2}(E-\epsilon_n)},\quad k_\epsilon=\sqrt{\frac{2M_3}{h^2}(E-\epsilon)}.$$

Можно показать, что $J_p(R_1)$, $J_t(R_2)$, $J_n(R_3)$, $J(R_3\epsilon)$ являются квадратично интегрируемыми функциями. Поэтому их можно разложить по полному набору известных функций.

$$J_p(R_1) = \sum_i A_i \psi_i (R_1),$$

$$J_t(R_2) = \sum_j B_j \psi_j (R_2),$$

$$J_n(R_3) = \sum_\delta C_\delta \psi_\delta (R_3), \tag{64}$$

$$J(R_3 \epsilon) = \sum_{\nu\lambda} D_{\nu\lambda} \psi_\nu (R_3) \psi_\lambda (\epsilon).$$

Подставляя (64) в (62), получаем вместо систем зацепленных интегро-дифференциальные уравнений незацепленные неоднородные дифференциальные уравнения. Поэтому поступая так же, как и в предыдущих разделах, мы можем получить алгебраические уравнения на коэффициенты разложения (64) и исследовать полученные алгебраические уравнения.

Проделав все выкладки предыдущего раздела, можно показать, что и в этом случае имеет место сходимость приближенного решения к точному. Кроме того заметим, что вышеприведенный подход, с одной стороны, позволяет исследовать сходимость метода, а, с другой стороны, является одновременно алгоритмом решения системы интегро-дифференциальных уравнений.

Все вышеприведенные исследования можно проделать и в трехмерном случае. Для короткоживущих потенциалов этот случай принципиально не отличается от одномерного. Только формулы становятся очень громозкими, поэтому результаты исследования мы здесь не приводим.

В заключение заметим, что аналогичные исследования можно проделать и для задач на собственные значения. Различие будет только в граничных условиях задачи, а все факторы, влияющие на сходимость, можно выявить точно так же, как и в предыдущих разделах. Аналогично можно доказать сходимость метода гармонических функций /5/, метода смешивания конфигураций /3/.

В заключение авторы благодарят Б.Н. Захарьева, О. Лхагва, Ю.П. Фенина, В.П. Жигунова за полезные дискуссии, связанные с темой данной работы.

Приложение 1

Здесь мы установим скорость убывания некоторых коэффициентов алгебраических уравнений.

а) Пусть имеем функцию

$$f_i^n(R_1) = D^n \phi_i(R_1'), \tag{П.1}$$

где

$$D^n = -\frac{1}{k_n}\{e^{ik_n R_1}\int_0^{R_1} \sin k_n R_1' + \sin k_n R_1 \int_{R_1}^{\infty} e^{ik_n R_1'}\} dR_1' \tag{П. 2}$$

и полный набор функций $\phi_i(R_1)$ является решением уравнения

$$\left[\frac{d^2}{dR_1^2} + \alpha_i^2\right]\phi_i(R_1) = v(R_1)\phi_i(R_1). \tag{П. 3}$$

Выясним поведение функции $f_i^n(R_1)$ при $i \to \infty$ и $n \to \infty$. Для этого на (П.3) подействуем с левой стороны оператором D^n :

$$\alpha_i^2 f_i^n(R_1) = D^n v(R_1)\phi_i(R_1') - D^n \frac{d^2}{dR_1^2}\phi_i(R_1). \tag{П. 4}$$

Интегрируя по частям, последний член (П. 4) можно переписать следующим образом:

$$D^n \frac{d^2}{dR_1^2}\phi_i(R_1) = \phi_i(R_1) - k_n^2 f_i^n(R_1). \tag{П. 5}$$

Подставляя (П. 5) в (П. 4), получаем

$$f_i^n(R_1) = \frac{1}{\alpha_i^2 - k_n^2}\bar{f}_i^n(R_1), \quad \alpha_i^2 \neq k_n^2, \tag{П. 6}$$

где

$$\bar{f}_i^n(R_1) = [D^n v(R_1')\phi_i(R_1') - \phi_i(R_1)]. \tag{П. 7}$$

Можно показать, что функция $\bar{f}_i^n$ при всех значениях i и n остается ограниченной

$$|\bar{f}_i^n| < M, \qquad \text{(П. 8)}$$

где M – некоторое число.

Тогда равенство (П. 6) можно переписать следующим образом:

$$f_i^n(R_1) < \frac{M}{\alpha_i^2 - k_n^2}, \quad \alpha_i^2 \neq k_n^2 . \qquad \text{(П. 9)}$$

Заметим, что при $k_n = \alpha_i$ функция $f_i^n(R_1)$ убывает по абсолютной величине как $\frac{1}{k_n}$. Это видно из равенства (П. 1) и (П. 2).

б) Рассмотрим функцию

$$g_i^n(R_1) = D^n \phi_i(R_1'), \qquad \text{(П. 10)}$$

где

$$D^n = -\frac{1}{k_n}\left\{ e^{-k_n R_1}\int_0^{R_1} e^{k_n R_1} + e^{k_n R_1}\int_{R_1}^{\infty} e^{-k_n R_1'} - e^{-k_n R_1}\int_0^{\infty} e^{-k_n R_1'} \right\} dR' . \qquad \text{(П. 11)}$$

Поступая так же, как и выше, можем установить поведение функции $g_i^n(R_1)$ при $n \to \infty$ и $i \to \infty$, где

$$g_i^n(R_1) = \frac{1}{\alpha_i^2 + k_n^2}\, \bar{g}_i^n(R_1) \qquad \text{(П. 12)}$$

и

$$\bar{g}_i^n = [D^n v(R_1')\phi_i(R_1') - \phi_i(R_1)] . \qquad \text{(П. 13)}$$

Можно показать, что функции $\bar{g}_i^n(R_1)$ при всех значениях i и n остаются ограниченными

$$|\bar{g}^n_i| < N,\qquad (П.\ 14)$$

где N - некоторое число.

Тогда равенство (П. 12) можно переписать следующим образом:

$$g^n_i(R_1) < \frac{N}{a^2_i + k^2_n}\ .\qquad (П.\ 15)$$

в) Рассмотрим коэффициенты

$$W_{um}(R_1) = \int \phi^*_n(\rho_{23})[V_{12} + V_{13}]\,\phi_m(\rho_{23})\,d\rho_{23}\ ,\qquad (П.\ 16)$$

Пусть , $V_{ij}(\rho_{ij})$ $(i \neq j,\ \ i=1,2,3,\ j=1,2,3)$ удовлетворяет условию $\int_a^\infty |V_{ij}|^2\,d\rho_{ij} < \infty$, где $a > 0$ некоторое число, и функция $\phi_m(\rho_{23})$ является решением уравнения (13).

Предположим, что уравнение (13) имеет только дискретный спектр. Тогда выполняются следующие неравенства

$$\sum_n |W_{nm}(R_1)|^2 < \infty\ ,\qquad (П.\ 17)$$

$$\sum_m |W_{nm}(R_1)|^2 < \infty\qquad (П.\ 18)$$

при всех фиксированных R_1.

Нетрудно убедиться, что функция $Im(R_1, \rho_{23}) = \phi_m(\rho_{23})[V_{12} + V_{13}]$ быстро убывает при $\rho_{23} \to \infty$ и при $R_1 \to \infty$. Поэтому справедливо следующее разложение

$$Im(R_1\ \rho_{23}) = \sum_n A^m_n(R_1)\,\phi_n(\rho_{23})\ ,\qquad (П.\ 19)$$

где

$$A^m_n(R_1) = \int \phi^*_n(\rho_{23})[V_{12} + V_{13}]\phi_m(\rho_{23})\,d\rho_{23} = W_{nm}(R_1)\ ,$$

поэтому

$$\mathrm{Im}(R_1, \rho_{23}) = \sum_n W_{nm}(R_1)\,\phi_m(\rho_{23}),$$

отсюда

$$\int |\,\mathrm{Im}(R_1, \rho_{23})\,|^2\, d\rho_{23} = \sum_n |\,W_{nm}(R_1)\,|^2 . \qquad (\text{П. } 20)$$

Так как интеграл в левой части сходится, то правая часть тоже является ограниченной величиной при любых значениях R_1. Отсюда следует неравенство (П. 17). Аналогично можно показать справедливость неравенства (П. 18). Заметим, что равенство (П. 20) позволяет вычислить бесконечную сумму квадрата коэффициентов $W_{nm}(R_1)$, если заданы функции V_{12}, V_{13} и $\phi_m(\rho_{23})$.

Теперь установим скорость убывания коэффициентов при $n \to \infty$ и $m \to \infty$. Предположим, что $V(R_2, \rho_{23}) = [V_{12} + V_{13}]$ имеет несколько первых производных по ρ_{23}.

Перепишем уравнение (13) следующим образом:

$$\epsilon_n \phi_n(\rho_{23}) = V_{23}\,\phi_n(\rho_{23}) - \frac{d^2}{d\rho_{23}^2}\,\phi_n(\rho_{23}) \qquad (\text{П. } 21)$$

и

$$\epsilon_m \phi_m(\rho_{23}) = V_{23}\,\phi_m(\rho_{23}) - \frac{d^2}{d\rho_{23}^2}\,\phi_m(\rho_{23}), \qquad (\text{П. } 22)$$

где положено $\dfrac{h^2}{2m} = 1$.

Умножая первое уравнение слева на ϕ_m, второе на ϕ_n, вычитая второе уравнение из первого и вводя обозначения $\dfrac{d}{d\rho_{23}}\phi_n = \dot{\phi}_n$ и $\dfrac{d}{d\rho_{23}} V(R_1, \rho_{23}) = \dot{V}$, получаем

$$(\epsilon_n - \epsilon_m)\,\phi_n\,\phi_m = \frac{d}{d\rho_{23}}\,(\phi_m \dot{\phi}_n - \phi_n \dot{\phi}_m).$$

Умножая слева это равенство на $V(R_1, \rho_{23})$ и интегрируя по ρ_{23}, получаем

$$W_{nm}(R_1) = \frac{1}{(\epsilon_n - \epsilon_m)} \bar{W}_{nm} \;.\qquad (П.\ 23)$$

где

$$\bar{W}_{nm} = \int (\phi_m \dot{\phi}_n - \phi_n \dot{\phi}_m)\, \dot{V}\, d\rho_{23} \;.\qquad (П.\ 24)$$

г) Рассмотрим коэффициенты

$$W_n(R_1 \epsilon) = \int d\rho_{23}\ \phi_n^*(\rho_{23})[V_{12}+V_{13}]\,\phi(\epsilon\rho_{23}),\qquad (П.\ 25)$$

$$W(R_1, \epsilon') = \int d\rho_{23}\ \phi^*(\rho_{23}\epsilon)[V_{12}+V_{13}]\,\phi(\rho_{23}\epsilon),\qquad (П.\ 26)$$

где $\phi_n(\rho_{23})$ и $\phi(\rho_{23}\epsilon)$ является решением уравнения (13), т.е. уравнение имеет и дискретный и непрерывный спектр.

Покажем, что эти коэффициенты удовлетворяют следующим неравенствам

$$\int dR_1 \int d\epsilon\, |W_n(R_1\, \epsilon)|^2 < \infty,\qquad (П.\ 27)$$

$$\int d\epsilon\, |W(R_1, \epsilon, \epsilon')|^2 < \infty \;.\qquad (П.\ 28)$$

Для этого воспользуемся следующим разложением

$$\phi_n(\rho_{23})[V_{12}+V_{13}] = \sum_{m=1}^{s} A_m^n(R_1)\,\phi_m(\rho_{23}) + \int B^n(R_1 \epsilon)\,\phi(\rho_{13}\epsilon)\, d\epsilon,\qquad (П.\ 29)$$

где

$$A_m^n(R_1) = W_{nm}(R_1),$$

$$B^n(R_1\epsilon) = W_n(R_1\epsilon),$$

поэтому

$$\phi_n(\rho_{23})[V_{12}+V_{13}] - \sum_{m=1}^{s} W_{nm}(R_1)\phi_m(\rho_{23}) = \int W_n(R_1\epsilon)\phi(\rho_{23}\epsilon)\,d\epsilon .$$

Отсюда

$$\int dR \int d\rho_{23}\, |\phi_n(\rho_{23})[V_{12}+V_{13}] - \sum_{m=1}^{s} W_{nm}(R_1)\phi_m(\rho_{23})|^2 = \int dR_1 \int d\epsilon\, |W_n(R_1\epsilon)|^2 \quad (\text{П. } 30)$$

Так как интеграл в левой части сходится, то правая часть тоже является ограниченной величиной. Отсюда следует неравенство (П. 27). Аналогично можно показать справедливость (П. 28).

Литература

1. H. Feshbach, Ann. of Phys., 5, 357(1958); 19, 287 (1962).
   Г.Ф. Друкарев. Теория столкновений электронов с атомами. Физматгиз, 1963.
2. И.В. Амирханов, В.П. Жигунов, Б.Н. Захарьев, Препринт ОИЯИ Р4-2983, Дубна, 1966. Т.Г. Ефименко, В.П. Жигунов, Б.Н. Захарьев. Ann. of Phys., 47,275 (1968). ЯФ 7, №1 (1968).
3. U. Fano, Phys. Rev., 124, 1866 (1961). C. Bloch, V. Gilet, Phys. Lett., 16, 62 (1965). C. Bloch, Лекции XXXVI курса школы Энрико Ферми
4. Н. Мотт, Г. Месси. Теория атомных столкновений. Изд-во ИЛ, М., 1961.
   С.С. Герштейн, В.Д. Кривченков. ЖЭТФ 40, 1491 (1961).
5. Ю.А. Симонов, ЯФ 3, 630 (1966). А.М. Бадалян, Ю.А. Симонов. ЯФ 3, 1032 (1966). В.В. Пустовалов, Ю.А. Симонов. ЖЭТФ 51, 345 (1966).
6. И.В. Амирханов, Л.Г. Заставенко, Б.Н. Захарьев. Препринт ОИЯИ Р-2310, Дубна, 1965. Б.Н. Захарьев, С.Н. Соколов. Препринт ОИЯИ Р-1593, Дубна 1964.

7. Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, 1959. Б.З. Вулих. Введение в функциональный анализ. Физматгиз, Москва (1967). С.Г. Михлин. Вариационные методы в математической физике. Гос. Изд. Тех-Теор. Лит. Москва 1957.

8. И.В. Амирханов, З.С. Гурьянов. Препринт ОИЯИ Р4-3741, Дубна, 1968. Phys. Lett., 28, No.5, 346 (1968).

Рукопись поступила в издательский отдел
25 февраля 1969 года.