СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

P4 - 4293

И.Н.Михайлов, Е.Наджаков

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

К ТЕОРИИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ В ЯДРАХ

1969

P4 - 4293

И.Н.Михайлов, Е.Наджаков*

К ТЕОРИИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ В ЯДРАХ

* Институт физики БАН (София)

§1. Введение

В микроскопической теории низколежащих возбужденных состояний ядер существенным образом пользуются полуклассическими предположениями о характере движения ядерного вещества в разных условиях (т.е. о колебаниях поверхности ядра и о его вращении). Квантовая интерпретация колебаний в методах случайной фазы и приближенного вторичного квантования встречается с многочисленными трудностями при попытках выйти за пределы приближения независимых гармонических колебаний. Квантовая формулировка теории ротационных спектров разработана для идеального случая жесткого ротатора /1/.

Математический аппарат, развитый А.Керманом, А.Клейном и др./2/, позволяет, в принципе, выйти за пределы метода случайной фазы для колебаний и исследовать неадиабатические эффекты при вращении ядер. Однако анализ уравнений в теории Кермана-Клейна можно выполнить, по-видимому, только на основе физически обоснованных "нулевых приближений" для основных компонент теории - генеалогических коэффициентов, связывающих состояния смежных ядер. Был предложен и более простой метод учёта неадиабатических эффектов при вращении ядер/3/, однако, он не описывает вращение и колебания в ядрах единым образом.

Ниже мы предлагаем подход к описанию спектров ядер, по сложности эквивалентный приближению случайной фазы. В отличие от метода случайной фазы в нашем подходе могут рассматриваться как колебания, так и вращение. Каждому типу движения сопоставляется некоторый оператор перехода (операторы рождения фонона и ротона).

Свойства оператора ротона и правило его коммутации с гамильтонианом в адиабатическом пределе определены в §2. Микроскопическая структура этого оператора исследована в §§3,4. Здесь найдены матричные элементы оператора ротона между состояниями, различающимися размещением нуклонов по уровням деформированного среднего поля.

В §5 рассматривается задача разложения операторов физических величин в ряд по операторам ротонов.

Выход за пределы независимых колебаний и вращения предлагается осуществить, усложнив коммутационные соотношения с гамильтонианом операторов фононов и ротонов. В коммутаторы наравне с частотой колебаний $\hbar\omega$ и моментом инерции $\jmath$ вводятся феноменологические константы, описывающие связь процессов разного рода. Величина констант должна быть определена при помощи процедуры, подобной используемой в методе случайной фазы/4/. Адэкватность такого подхода экспериментальным данным по ядерной спектроскопии обсуждается в §6 на примерах, когда применимы приближения слабой связи.

§2. *Операторы ротонов*

Определение основных свойств операторов, переводящих состояния ротационной полосы из одного в другое, можно провести следующим образом. Предположим, что из гамильтониана ядра можно выделить оператор, обладающий свойствами квадрата момента количества движения

$$H = \mathcal{H} + h_{rot}\,, \quad h_{rot} = \frac{1}{2\jmath}\,(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2)\,. \tag{2.1}$$

Три оператора I_ν замкнуты относительно коммутационных соотношений:

$$[I_i, I_j] = i I_k \qquad (\hbar = 1)$$

(если перестановка, переводящая 1,2,3 в i, j, k, циклическая) и преобразуются в результате вращения как компоненты вектора.

Введем формально операторы, действующие в пространстве собственных состояний ядра. Символами $R^+_{\ell m}$ мы определим операторы, действие которых на нижайшее собственное состояние h_{rot}, инвариантное относительно вращений ($|0>$), переводит его в состояние $|\ell m>$),

$$|\ell m> = R^+_{\ell m}\,|0>\,. \tag{2.2}$$

Действие операторов $R^+_{\ell m}$ на другие состояния определено ниже. Мы пока считаем, что разделение гамильтониана H в формуле (2.1) является точным и полагаем операторы $R^+_{\ell m}$ диагональными по квантовым числам гамильтониана внутреннего движения $\mathcal{H}$. Наличие других степеней свободы и возможность появления в спектре ядра различных ротационных полос будет рассмотрена в §§5,6.

Операторы $R^+_{\ell m}$ при фиксированном ℓ и $-\ell<m<\ell$ образуют неприводимое представление группы вращений. Это обстоятельство определяет их коммутаторы с компонентами момента количества движения, а поэтому и с гамильтонианом H. Имеем:

а) Коммутационные соотношения для операторов I_3 и $I_\pm = I_1 \pm i I_2$ с операторами $R^+_{\ell m}$

$$\begin{aligned} &[I_+, R^+_{\ell m}] = a^\ell_{m+1}\, R^+_{\ell\, m+1} \\ &[I_-, R^+_{\ell m}] = a^\ell_m\, R^+_{\ell\, m-1} \\ &[I_3, R^+_{\ell m}] = m\, R^+_{\ell m}\,, \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\left(a^\ell_m = \sqrt{(\ell+m)(\ell+1-m)}\right).$$

б) Коммутационные соотношения для операторов квадрата момента количества движения с $2\ell+1$-мерным вектором $\vec{R}^+_\ell \equiv (R^+_{\ell m})$

$$[I^2, \vec{R}^+_\ell] = (\vec{J}_\ell \cdot \vec{R}^+_\ell)\,, \tag{2.4}$$

где квадратная матрица $\vec{\vec{J}}_\ell$ размерности $(2\ell+1)\times(2\ell+1)$ имеет следующие отличные от нуля элементы:

$$J_{m,m} = 2mI_3 - m^2 + m - (a^\ell_m)^2 ,$$

$$J_{m,m+1} = a^\ell_{m+1} I_- , \tag{2.5}$$

$$J_{m,m-1} = a^\ell_m I_+ .$$

В соответствии с предположением, сформулированным вначале (см. формулу (2.1)), и установленными выше правилами коммутации операторов $R^+_{\ell m}$, мы назовем операторами рождения ротона такие операторы, для которых справедливы соотношения (2.3) и правило коммутации с гамильтонианом H:

$$[H, \vec{R}^+_\ell] = \frac{1}{2j}(\vec{\vec{J}} \cdot \vec{R}^+_\ell) . \tag{2.6}$$

Теорема о разложении на неприводимые представления, примененная к произведению двух операторов $R^+_{\ell m}$, свидетельствует о том, что все они могут быть образованы из операторов, преобразующихся при вращениях как компоненты вектора R^+_{1m} $(m = 0, \pm 1)$. Если h_{rot} представляет собой гамильтониан аксиального жесткого ротатора, то формула Клебша-Жордана для произведения двух операторов R^+ может быть записана в виде[5]

$$R^+_{\ell_1 m_1} R^+_{\ell_2 m_2} = R^+_{\ell_2 m_2} R^+_{\ell_1 m_1} = \sum_{\ell m} (2\ell+1) \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} R_{\ell m} \tag{2.7}$$

(как для сферических функций). Формула (2.7) соответствует такой нормировке, когда

$$\sum_m (-1)^m R^+_{\ell -m} R^+_{\ell m} = 1 , \tag{2.8}$$

$$R_{\ell -m} = (-1)^m R^+_{\ell m} .$$

Операторы $R^+_{\ell m}$ легко связать с коллективными углами, соответствующими вращению ядра. Отметим, однако, что микроскопическая теория вращения, оперирующая величинами $R^+_{\ell m}$, значительно проще теории, сформулированной в терминах угловых переменных.

§3. *Микроскопическая теория вращения*

При изучении микроскопической структуры операторов $R^+_{\ell m}$, описывающих переходы в реальных ядрах, следует учитывать приближенный характер уравнения (2.6). Аналогичная ситуация имеет место и в теории колебаний, так что методы обработки коммутационного уравнения, полученного выше, естественно заимствовать из теории вибрационных спектров. Однако аналогия не может быть сделана полной, как это следует из рассуждений, излагаемых ниже.

Предположим сначала, как и в работе[3], что нам известны собственные векторы гамильтониана ядра, помещенного во внешнее поле

$$H' = H_0 + V(R^+) \tag{3.1}$$

$$H'|k\rangle = E_k |k\rangle . \tag{3.2}$$

Мы считаем, что состояния $|k\rangle$ обладают симметрией относительно вращения в плоскости (yz), т.е. что

$$(I_1)_{k,k'} = \Omega_k \delta_{k,k'} . \tag{3.3}$$

В этом параграфе мы используем обозначение $\vec{R}^{+} = \begin{pmatrix} R^{+}_{1,-1} \\ R^{+}_{1,0} \\ R^{+}_{1,+1} \end{pmatrix}$ для операторов, образующих представление группы вращений с моментом $\ell = 1$.

Коммутационные соотношения (2.6) остаются в силе, если заменить H на H' из формулы (3.1). Образовывая матричные элементы от операторного уравнения (2.6) с гамильтонианом H' вместо H, получим[x]

$$\vec{R}^{+}_{k,0} = \frac{(\vec{\vec{J}} \cdot \vec{R}^{+})_{k0}}{2\mathcal{J}(E_k - E_0)} . \tag{3.4}$$

Диагональный матричный элемент от третьего уравнения (2.3) с помощью формулы (3.4) запишем в виде $(m \neq 0)$

$$(R^{+}_{m})_{00} = \frac{m^{-1}}{2\mathcal{J}} \sum_{k \neq 0} \frac{(I_3)_{0k}((\vec{\vec{J}} \cdot \vec{R}^{+})_m)_{k0} + ((\vec{\vec{J}} \cdot \vec{R}^{+})_m)_{0k}(I_3)_{k0}}{(E_k - E_0)} \tag{3.5}$$

В случае, когда энергетические знаменатели в формулах (3.4) и (3.5) велики и $\mathcal{J}(E_k - E_0)_{\text{средн.}} \gg 1$, операторы R^{+}_{m} можно представить в виде[6]

$$R^{+}_{1} = -R_{-1} = -2^{-1/2}(1 + i\delta)$$
$$R^{+}_{0} = R_0 = \epsilon , \tag{3.6}$$

---

[x] Здесь мы следуем выкладкам, приведенным в работе[6].

причём $\sum_{k \neq 0} |\delta_{0k}|^2 \ll 1$ и $\sum_{k \neq 0} |\epsilon_{0k}|^2 \ll 1$.

Недиагональные матричные элементы эрмитовских операторов ϵ и δ определяются в первом порядке из формулы (3.4)

$$\delta_{k0} = (-i/\mathcal{J}) \frac{(I_3)_{k0}}{E_k - E_0}$$
$$\epsilon_{k0} = (i/\mathcal{J}) \frac{(I_2)_{k0}}{E_k - E_0} . \tag{3.7}$$

Подставляя полученные выражения вместо (3.4), получаем в этом приближении формулу Инглиса для момента инерции системы

$$\mathcal{J} = 2 \sum_{k \neq 0} \frac{|(I_3)_{0k}|^2}{E_k - E_0} . \tag{3.8}$$

В работе[6] показано, как используя формулы (3.4), можно получить следующее приближение сначала для операторов $\vec{R}^{+}$ а потом, пользуясь уравнением (3.5), и для момента инерции системы $\mathcal{J}$. Линеаризация, проделанная выше, может оказаться очень плохим приближением, если энергетические знаменатели в выражении (3.6) становятся сравнимыми с энергией возбуждения первого ротационного состояния.

Энергетические знаменатели в формулах (3.4)-(3.6) можно связать со спектром внутренних возбуждений ядра. Нарушающую сферическую симметрию гамильтониана часть $V(R^{+})$ в формуле (3.1) естественно интерпретировать как среднее поле, выбранное так, чтобы компенсировать член взаимодействия между частицами:

$$H = H_0 + V_{int} = H'' + \mathcal{V} ,$$
$$\mathcal{V} = V_{int} - V(R^{+}) . \tag{3.9}$$

Предположим, что собственные векторы оператора H'' известны и, полагаем также, что второй член в (3.9) относительно мало влияет на спектр внутренних возбуждений ядра. Понимая под величинами $E_k, |k\rangle$ собственные энергии и функции оператора H'', мы запишем матричный элемент уравнения (2.6) в виде

$$(E_k - E_0)\vec{R}^{+}_{k0} + \langle k|[\mho, \vec{R}^{+}]|0\rangle = \frac{1}{2ỉ}(\vec{J}\cdot\vec{R}^{+})_{k0} . \qquad (3.10)$$

Введем обозначение $\widetilde{(\vec{J}\cdot\vec{R}^{+})}$:

$$\vec{R}^{+}_{k0} = \frac{\widetilde{(\vec{J}\cdot\vec{R}^{+})}_{k0}}{2ỉ(E_k - E_0)} . \qquad (3.11)$$

Подставляя формулу (3.11) в (3.10), получим уравнение для оператора $\widetilde{(\vec{J}\cdot\vec{R}^{+})}$

$$\widetilde{(\vec{J}\cdot\vec{R}^{+})}_{k0} = (\vec{J}\cdot\vec{R}^{+})_{k0} - \qquad (3.12)$$

$$-\sum_{\lambda\neq 0,k}\left\{\mho_{k\lambda}\frac{1}{E_\lambda - E_0}\widetilde{(\vec{J}\cdot\vec{R}^{+})}_{\lambda 0} - \widetilde{(\vec{J}\cdot\vec{R}^{+})}_{k\lambda}\frac{1}{E_k - E_\lambda}\mho_{\lambda 0}\right\} .$$

Последнее уравнение позволяет развивать теорию последовательных приближений для $\vec{R}^{+}$ в том случае, если остаточное взаимодействие $\mho$ мало. Найдя $\vec{R}^{+}$ по схеме, описанной выше, в пренебрежении остаточным взаимодействием и убирая тильду в правой части формулы

(3.12), мы получаем первую поправку к операторам $\widetilde{(\vec{J}\cdot\vec{R}^{+})}$ и $\vec{R}^{+}$, а затем поправку к значению инерционного параметра $ỉ$. После этого мы можем, в принципе, получить квадратичную по $\mho$ поправку к оператору $\vec{R}^{+}$ и т.д.

В заключение этого параграфа скажем несколько слов об обобщении теории для описания отклонений в спектре ротационных возбуждений от формулы $I(I+1)$. Один возможный путь описания был намечен авторами этой статьи ранее[3]. Его обобщение на случай трехмерных вращений было выполнено в работе[7], причём были получены численные оценки поправок к моменту инерции, найденному в линейном по ϵ и δ приближении. В дальнейшем мы предполагаем описать неадиабатические поправки в спектре другим способом : вводя в коммутатор (2.6) операторы переходов неротационного типа, т.е. учитывая связь между вращением и другими возбуждениями ядер.

§4. Формулировка в терминах вторичного квантования. Сравнение с методом случайной фазы

Запишем гамильтониан ядра во вторично-квантованном виде

$$H = \sum_{ij}\left(e_i\delta_{ij} - \sum_{k\leq N}(ik|V|jk - kj)\right)a^{+}_i a_j + \frac{1}{2}\sum_{ijk\ell}(ij|V|k\ell)a^{+}_i a^{+}_j a_\ell a_k . \qquad (4.1)$$

Мы полагаем, что оператор $T + V_{s.c.}$, где

$$V_{s.c.} = \sum_{ij}\sum_{k\leq N}(ik|V|jk - kj)a^{+}_i a_j ,$$

диагонален, то есть, что базисные одночастичные состояния являются решением уравнений Хартри-Фока для рассматриваемого ядра; при этом энергии Хартри-Фока одночастичных состояний равны e_i. Многочастичную функцию Слэтера, представляющую основное состояние ядра, обозначим

$\Omega >$. Как и в предыдущем разделе считаем, что состояние $|\Omega>$ обладает осевой симметрией

$$I_1 |\Omega> = \Omega |\Omega>. \tag{4.2}$$

Вторично-квантованная форма операторов $\vec{R}^+$ должна быть выбрана в соответствии с условиями (2.8). Для того чтобы получить формулу Таулесса для момента инерции, операторы R^+_{1m} запишем в виде суммы "c" - числа и одночастичного оператора ϵ или δ, где[x/]

$$\delta = \sum_{ij} \delta_{ij} a^+_i a_j \;;\; \epsilon = \sum_{ij} \epsilon_{ij} a^+_i a_j, \tag{4.3}$$

Величины ϵ_{ij} и δ_{ij} можно найти, образовав матричные элементы от уравнения (2.6). Потребуем выполнение уравнений

$$<\Omega | [a^+_i a_j, \{ [H, \vec{R}^+] - \frac{1}{2 \mathfrak{z}} (\vec{J}\cdot \vec{R}^+) \}] |\Omega> = 0. \tag{4.4}$$

Последнее уравнение подобно уравнению метода случайной фазы/4/

$$<\Omega | [a^+_i a_j, \{ [H, B^+_\lambda] - h\omega_\lambda B^+_\lambda \}] |\Omega> = 0 \tag{4.5}$$

---

x/ Для учёта эффектов спаривания формулы (4.3) должны быть дополнены членами, содержащими произведения $a_i a_j$ и $a^+_i a^+_j$. Мы не делаем этого, чтобы избежать усложнения формул. Учёт спаривания не представляет принципиальных трудностей и будет произведен при получении численных оценок.

для оператора рождения фонона

$$B^+_\lambda = \sum_{ij} b^{+(\lambda)}_{ij} a^+_i a_j \tag{4.6}$$

(в уравнениях (4.4), (4.5) остаются лишь те коэффициенты, индексы i, j которых расположены по разные стороны от границы Ферми).

Уравнение (4.4) отличается от (4.5) наличием операторов $J_{m,m'}$ во втором члене выражения в фигурных скобках. Однако главное отличие уравнения (4.4) от (4.5) состоит в его неоднородности относительно неизвестных величин $\delta_{ij}, \epsilon_{ij}$. Из-за неоднородности нетривиальное решение уравнения (4.4) существует при любом значении параметра $\mathfrak{z}$. Для определения момента инерции $\mathfrak{z}$ потребуем выполнения "в среднем" условий (2.3):

$$\begin{aligned} &<\Omega | [I_+, R^+_{\ell m}] |\Omega> = \alpha^{\ell}_{m+1} <\Omega | R^+_{\ell m+1} |\Omega>, \\ &<\Omega | [I_-, R^+_{\ell m}] |\Omega> = \alpha^{\ell}_{m} <\Omega | R^+_{\ell m-1} |\Omega>, \\ &<\Omega | [I_3, R^+_{\ell m}] |\Omega> = m <\Omega | R^+_{\ell m} |\Omega>. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Оставляя во втором члене фигурной скобки в уравнении (4.4) только диагональную часть оператора $\vec{R}^+(\ell = 1)$, получим

$$\begin{aligned} \delta_{qp} &= (-i/\mathfrak{z}) \frac{(\tilde{\tilde{I}}_3)_{qp}}{e_q - e_p}, \\ \epsilon_{qp} &= (i/\mathfrak{z}) \frac{(\tilde{\tilde{I}}_2)_{qp}}{e_q - e_p}, \end{aligned} \quad (4$$

где операторы $\tilde{\tilde{I}}_\nu (\nu = 2,3)$ удовлетворяют уравнению, известному в теории конечных Ферми-систем/7/ и зависящего от времени метода Хартри-Фока/8/

$$(\tilde{\tilde{I}}_\nu)_{ij} = (I_\nu)_{ij} + \sum_{i'j'} (ii')|V|jj'-j'j) \frac{n_{i'} - n_{j'}}{e_{i'} - e_{j'}} (\tilde{\tilde{I}}_\nu)_{j'i'} \qquad (4.9)$$

$$n_i = \begin{cases} 1 & i \le N \\ 0 & i > N \end{cases} .$$

Наконец, для момента инерции получаем формулу Инглиса, исправленную на поляризацию среды (т.е. формулу Таулесса/8/).

$$j = \sum_{i \le N,\, j > N} \frac{(\tilde{\tilde{I}}_3)_{ij} (I_3)_{ji} + (I_3)_{ij} (\tilde{\tilde{I}}_3)_{ji}}{e_j - e_i} . \qquad (4.10)$$

Учёт недиагональной части $R_{\ell m}$ приводит к уточнению формулы (4.10).

Выход за пределы описанного приближения можно проделать, в принципе, по схеме высших приближений метода случайной фазы. При этом в определение операторов $\vec{R}^+$ следует включить "двухчастичные" компоненты и увеличить число матричных элементов от уравнения (2.6) для определения дополнительных компонент $\vec{R}^+_1$. Вместо этого может оказаться более целесообразным ввести операторы, представляющие коллективные угловые переменные $\hat{\theta}$ и $\hat{\phi}$

$$R^+_{1,\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \hat{\theta}\, e^{\pm i \hat{\phi}} ,$$
$$R^+_{1,0} = \cos \hat{\theta} , \qquad (4.11)$$

считая, что и для ядер с малой деформацией $\hat{\theta}$ и $\hat{\phi}$ можно аппроксимировать одночастичными операторами.

§5. Разложение в ряд по операторам $R^+_{\ell m}$. Отношение вероятностей переходов на состояния ротационной полосы

Рассмотрим оператор некоторой физической величины F_{LM} мультипольности (L,M), удовлетворяющей соотношению

$$[F_{LM}, R^+_{\ell m}] = 0 . \qquad (5.1)$$

Такой оператор можно разложить в ряд

$$F_{L,M} = \sum_{\ell, m} c^{L,M}_{\ell, m} R^+_{\ell m} . \qquad (5.2)$$

Коэффициенты $c^{L,M}_{\ell,m}$ можно определить, не выделяя явно коллективные углы. Для этого удобно использовать соотношение

$$\frac{2\ell_1 + 1}{8\pi^2} \int d\omega\, \hat{D}(\omega)\, R_{\ell_1 m_1} R^+_{\ell_2 m_2} \hat{D}^{-1}(\omega) =$$
$$= \delta_{\ell_1 \ell_2} \delta_{m_1 m_2} \sum_{m'} R_{\ell_1 m'} R^+_{\ell_1 m'} = \delta_{\ell_1 \ell_2} \delta_{m_1 m_2} . \qquad (5.3)$$

Здесь

$$D = e^{-i\gamma I_1''} e^{-i\beta I_2'} e^{-i\alpha I_1}$$
$$(\omega \equiv (\alpha, \beta, \gamma),\ d\omega = \sin\beta\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma) \qquad (5.4)$$

оператор конечного поворота. Формула (5.3) следует из правила преобразования операторов $R^{+}_{\ell m}$ при вращении системы координат

$$\hat{D}(\omega) R^{+}_{\ell m} \hat{D}^{-1}(\omega) = \sum_{m'} R^{+}_{\ell m'} D^{\ell}_{m' m}(\omega) \tag{5.5}$$

и условий ортогональности D-функций[5].

Предположим сначала, что оператор F_{LM} диагонален по квантовым числам внутреннего движения, так что коэффициенты ряда (5.2) являются "c"-числами и не преобразуются при вращении. Тогда из формулы (5.3) следует

$$c^{LM}_{\ell m} = \frac{2L+1}{8\pi^2} \int d\omega\, \hat{D}(\omega) R_{\ell m} F_{LM} \hat{D}^{-1}(\omega) =$$

$$= \delta_{\ell L} \delta_{mM} \sum_{M'} R_{LM'} F_{LM'} . \tag{5.6}$$

В применении к многонуклонным системам, для которых уравнения §2 можно удовлетворить только в смысле среднего по какому-то состоянию $|\Omega>$, формулу (5.6) естественно записать в виде

$$c^{LM}_{\ell m} = \delta_{\ell L} \delta_{mM} <\Omega| \sum_{M'} R_{LM'} F_{LM'} |\Omega> . \tag{5.7}$$

Для определения коэффициентов ряда по $R^{+}_{\ell m}$ в более общем случае нужно знать характер внутреннего движения в ядре. Пусть оператор F_{LM} можно представить в виде

$$F_{LM} = \sum_{\lambda} \sum_{\ell m} (c^{\bar{\lambda}, L_\lambda M_\lambda}_{\ell m} B_\lambda R^{+}_{\ell m} + (c^{\bar{\lambda}, L_\lambda, M_\lambda}_{\ell m})^{*} B^{+}_{\lambda} R_{\ell m}) , \tag{5.8}$$

где операторы B_λ $(\lambda \equiv \bar{\lambda}, L_\lambda M_\lambda)$ удовлетворяют бозевским коммутационным соотношениям $[B_\lambda, B^{+}_{\lambda'}] = \delta_{\lambda\lambda'}$ и коммутируют с операторами $R^{+}_{\ell m}$. Образуя коммутатор

$$[F_{LM}, B^{+}_{\lambda}] = \sum_{\ell m} c^{\bar{\lambda}, L_\lambda, M_\lambda}_{\ell m} R_{\ell m} , \tag{5.9}$$

мы возвращаемся к оператору рассмотренного ранее типа. Следовательно, можно записать

$$c^{\bar{\lambda}, L_\lambda, M_\lambda}_{\ell, m} = <\Omega| \frac{2\ell+1}{8\pi^2} \int d\omega\, \hat{D} R_{\ell m} [F_{LM}, B^{+}_{\lambda}] \hat{D}^{-1} |\Omega> =$$

$$= (2\ell+1)(-1)^{-m} \begin{pmatrix} \ell & L_\lambda & L \\ -m & M_\lambda & M \end{pmatrix} \times \tag{5.10}$$

$$\times <\Omega| \sum_{m' M' M'_\lambda} (-1)^{m'} \begin{pmatrix} \ell & L_\lambda & L \\ -m & M'_\lambda & M' \end{pmatrix} R_{\ell m'} [F_{LM'}, B_{\bar{\lambda}, L_\lambda M'_\lambda}] |\Omega> .$$

Аналогичным образом можно определить и другие матричные элементы части оператора F_{LM}, локальной по коллективным угловым переменным, такие, например, которые связывают состояния с разным числом квазичастиц.

Приведенные результаты позволяют получить соотношения вероятностей переходов на состояния ротационных полос для некоторых частных случаев. Оставляя подобный анализ до следующих публикаций, рассмотрим для примера матричный элемент перехода между двумя состояниями основной ротационной полосы, вызванного полем F_{LM}, оператор которого можно записать в виде (5.2). Имеем[9]:

$$< I_f\ M_f\ K_f = 0 |\ F_{LM}\ | I_i\ M_i\ K_i = 0 > =$$

$$=[(2I_f+1)(2I_i+1)]^{1/2} \langle 0| R_{I_f M_f} F_{LM} R^+_{I_i M_i} |0\rangle =$$

$$= (-1)^{I_f - M_f} \begin{pmatrix} L & I_i & I_f \\ M & M_i & -M_f \end{pmatrix} \langle I_f K_f = 0 \| F_L \| I_i K_i = 0 \rangle . \tag{5.11}$$

Используя (2.7) и (5.7), для приведенного матричного элемента получим выражение

$$\langle I_f K_f = 0 \| F_L \| I_i K_i = 0 \rangle = \begin{pmatrix} L & I_i & I_f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} [(2I_f+1)(2I_i+1)]^{1/2} \times \tag{5.12}$$

$$\times (-1)^{-I_f} \langle \Omega | \sum_{M'} R_{LM'} F_{LM'} | \Omega \rangle .$$

Последний сомножитель в формуле (5.12) играет роль внутреннего матричного элемента $\langle \chi | F_{L0} | \chi \rangle$ в обобщенной модели/10/. Мы не имеем никаких оснований считать, что состояния, участвующие в формуле (5.12), можно представить в виде произведения функций коллективных углов и внутренних переменных как в обобщенной модели. В нашем подходе функция $|\Omega\rangle$ уже использовалась для изучения свойств операторов $R^+_{\ell m}$. Она содержит как внутренние, так и коллективные переменные. Формула (5.12) эффективно решает задачу разделения их ролей.

Для сильнодеформированных ядер формулы (5.7), (5.10), (5.12) можно аппроксимировать известными выражениями обобщенной модели. Чтобы получить их, следует сохранить лишь "большую" диагональную часть операторов $R_{\ell m'}$, равную $R^{(\text{диаг})}_{\ell m'} \approx \delta_{m'0}$.

Оценку для недиагональных матричных элементов $R^+_{\ell m'}$, а, следовательно, оценку членов, отличающих формулу (5.12) от выражения обобщенной модели, получим при помощи формулы (3.11), записав ее в виде

$$(\vec{R}^+_\ell)_{ij} = \frac{1}{2\mathcal{J}} \frac{(i|\widetilde{\vec{J}\cdot\vec{R}^+_\ell}|j)}{e_i - e_j} . \tag{5.13}$$

$$(i|\widetilde{\vec{J}\cdot\vec{R}^+_\ell}|j) = (i|\vec{J}\cdot\vec{R}^+_\ell|j) + \sum_{pq} (ip|V|jq-qj) \frac{n_p - n_q}{e_p - e_q} (q|\widetilde{\vec{J}\cdot\vec{R}^+_\ell}|p) .$$

Представим $(\vec{R}^+_\ell)_{ij}$ в виде ряда по обратным степеням момента инерции $\mathcal{J}$. Из формулы (5.11) и асимптотических (при больших деформациях) оценок для R^+_{1m} следует, что первый член такого ряда для R^+_{1m} равен матричному элементу от силы Кориолиса, исправленной на поляризацию среды (см. формулы (4.9)). Высшие члены разложения аналогичны матричным элементам, возникающим при учёте кориолисовой силы в следующих порядках.

Рассмотрение другого частного случая – перехода из основного состояния ротационной полосы с $K_i \neq 0$ в состояния ротационной полосы $K_f = 0$ можно проделать, записав состояние $|i\rangle$ в виде

$$|i\rangle = B^+_{I_i = K_i, M_i} |0\rangle . \tag{5.14}$$

Здесь оператор внутреннего возбуждения $B^+_{I_i, M_i}$ коммутирует с $R^+_{\ell m}$. Для соотношения вероятностей получаются результаты, аналогичные результатам обобщенной модели в приближении не зависящего от I внутреннего матричного элемента. Имеем

$$\langle I_f, K_f = 0 \| F_L \| I_i = K_i \rangle =$$

$$= (2I+1)^{1/2} \langle \Omega | \sum_{M M'_i M'_f} (-1)^{I_f + M'_f} \begin{pmatrix} I_f & L & K_i \\ -M'_f & M' & M'_i \end{pmatrix} R_{I_f M'_f} [F_{LM'}, B^+_{K_i M'_i}] |\Omega\rangle \approx$$

$$\approx (2I_f+1)^{1/2}(2K_i+1)^{1/2}(-1)^{I_f}\langle\Omega|\sum_{M'=\pm K_i}\begin{pmatrix} I_f & L & K_i \\ 0 & M' & -M' \end{pmatrix} F_{LM'}\mathcal{B}^{+}_{K_i-M'}|\Omega\rangle . \quad (5.15)$$

Выражение в последней строчке формулы (5.15), полученное в приближении $R_{\ell m}=\delta_{m0}$, совпадает с формулой (4.3.2) из работы/10/. Оператор $\mathcal{B}^{+}_{K_i M'}$ отличается от $B^{+}_{K_i M'}$ лишь нормой $\mathcal{B}^{+}_{K_i M'} = (2K_i+1)^{-1/2}B^{+}_{K,M'}$. Появление фактора $(2K_i+1)^{-1/2}$ в нормировке $\mathcal{B}^{+}|\Omega\rangle$ вполне аналогично появлению $(2\ell+1)^{-1/2}$ в определении нормы состояния $R^{+}_{\ell m}|\ \rangle$.

Проведенный выше анализ зависимости операторов от коллективных переменных не является полным. Если коммутаторы (5.1) отличны от нуля, то разложение (5.2) следует дополнить членами, содержащими степени момента количества движения. Их учёт приводит, в частности, к эффектам, аналогичным учёту зависимости от I во внутренних матричных элементах обобщенной модели.

§6. Элементарные возбуждения в ядрах

До сих пор изучались следствия предположения о возможности выделить из гамильтониана ядра ротационную часть. В этом параграфе мы хотим заменить это предположение более слабым и, по-видимому, больше соответствующим действительности. Предположим, что спектр нижайших состояний ядра может быть воспроизведен относительно простым феноменологическим гамильтонианом:

$$h = h_v + h_{rot} + h_{s.p.} + h_{int} . \quad (6.1)$$

Здесь –

$$h_v = \sum_{\lambda} \hbar\omega_\lambda B^{+}_{\lambda} B_\lambda ,$$

$$h_{rot} = \frac{I^2_{rot}}{2\mathfrak{j}} , \quad (6.2)$$

$$h_{s.p.} = \sum_{n=1,2..n_0} e_n a^{+}_n a_n -$$

операторы, описывающие соответственно колебания, вращение и квазичастичные возбуждения ядер. Собственные функции оператора h можно разложить в ряд по "элементарным возбуждениям" – состояниям, полученным из вакуумного действием операторов B^{+}_{λ}, $R^{+}_{\ell m}$, a^{+}_n, которые мы считаем коммутирующими между собой.

Последний член в формуле (6.1) должен устанавливать связь между "элементарными возбуждениями". Мы полагаем, что оператор h_{int} включает небольшое число феноменологических констант, подлежащих определению. Вопрос выбора h_{int} мы оставляем пока в стороне и полагаем только, что гамильтониан h может быть диагонализован, скажем, при помощи численных методов. При этом задача микроскопического анализа сводится к отысканию структуры операторов элементарных возбуждений $B^{+}_{\lambda}, R^{+}_{\ell m}$, a^{+}_n и величины параметров $\hbar\omega$, $\mathfrak{j}$ и констант связи, входящих в h_{int}.

Для решения такой задачи можно наметить следующую схему:

1. Используя коммутационные соотношения для идеальных бозонов, ротонов (см. §2)и фермионов, найдем коммутаторы

$$[h, B^{+}_{\lambda}] = f_\lambda , \quad [h, R^{+}_{\ell m}] = f_{\ell m} , \quad (6.3)$$

$$[h, a^{+}_n] = f_n .$$

2. Воспользуемся вторично-квантованным представлением для операторов B^+_λ, $R^+_{\ell m}$ (см. формулы (4.3), (4.6)) и гамильтониана H и найдем явное выражение для коммутаторов (6.3), заменяя h на H.

3. Образуем матричные элементы

$$
\begin{aligned}
&\langle k \,|\, \{ [H , B^+_\lambda] - f_\lambda \} \,|\, \ell \rangle = 0 \\
&\langle k' \,|\, \{ [H , R^+_{\ell m}] - f_{\ell m} \} \,|\, \ell' \rangle = 0 \\
&\langle k'' \,|\, \{ [H , a^+_n] - f_n \} \,|\, \ell'' \rangle = 0
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

в достаточном количестве для определения операторов B, R, a как функций от параметров феноменологического гамитониана h.

4. Фиксируем параметры так, чтобы наилучшим образом удовлетворить предположенным коммутационным соотношениям между операторами B^+_λ, B_λ, $R^+_{\ell m}$, $\vec{I}_{rot}$, a^+_n, a_n.

Рассмотрим, к чему приводит такая программа при описании нечётных ядер.

а. Сферические ядра

Представим феноменологический гамильтониан нечётного ядра в виде /11/

$$
\begin{aligned}
h = {} & h_v + h_{s.p.} + \\
& + \sum_{\lambda p q} \left(\gamma^{(\lambda)}_{pq} B^+_\lambda + (\gamma^{(\lambda)}_{qp})^* B_\lambda \right) : a^+_p a_q : ,
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

где оператор h_v представляет гамильтониан соседнего чётного ядра, волновые функции которого обозначим $|\Lambda\rangle$. Знак нормального произведения (: :) означает, что операторы рождения частиц (a^+_p при $p > N$) и дырок (a_q при $q \leq N$) чётного остова стоят слева от операторов поглощения.

Если взаимодействие можно учитывать как возмущение, то волновую функцию нечётного ядра запишем в виде

$$
\begin{aligned}
|i \Lambda\rangle_{N+1} = \Big\{ a^+_i + \sum_{\lambda, p} \Big(& \frac{\gamma^{(\lambda)}_{pi} B^+_\lambda}{e_i - e_p - h\omega_\lambda} + \\
+ & \frac{\gamma^{(\lambda)*}_{ip} B_\lambda}{e_i - e_p + h\omega_\lambda} \Big) a^+_p \Big\} |\Lambda\rangle_N .
\end{aligned}
\tag{6.6}
$$

Операторы B^+_λ в методе случайной фазы билинейны по операторам рождения и уничтожения фермионов. Поэтому второй член в формуле (6.6) с операторами B^+_λ, определенными по методу случайной фазы, можно рассматривать как результат учёта примесей конфигураций с одной лишней частицей и дыркой к основному первому члену.

Зная коэффициенты $\gamma^{(\lambda)}_{pi}$, можно вычислять амплитуды вероятности возбуждения одночастичных уровней, сопровождающего коллективный переход,

$$
{}_{N+1}\langle i, \Lambda \,|\, B^+_\lambda \,|\, i', \Lambda' \rangle_{N+1}
\tag{6.7}
$$

и амплитуду возбуждения коллективных уровней в реакции передачи /12/:

$$
{}_{N+1}\langle i, \Lambda \,|\, a^+_i \,|\, \Lambda' \rangle_N .
\tag{6.8}
$$

Представим одночастичный (эрмитовский) оператор внешнего поля, действующего на систему, в виде

$$F = \sum_{ij} f_{ij} a_i^+ a_j = \bar{F}_N + \sum_{p,p'>N} f_{pp'} a_p^+ a_{p'} -$$

$$- \sum_{h,h'\leq N} f_{hh'} a_{h'} a_h^+ + \sum_{\lambda} (B_\lambda^+ \xi_\lambda + B_\lambda \xi_\lambda^*) , \tag{6.9}$$

где суммирование идет по физическим фононам $(\hbar \omega_\lambda > 0)$ и

$$\bar{F}_N = {}_N\langle 0 | F | 0 \rangle_N \tag{6.10}$$

$$\xi_\lambda = {}_N\langle 0 | [B_\lambda , F] | 0 \rangle_N = \sum_{ij} b_{ij}^{(\lambda)} (n_i - n_j) f_{ji} .$$

Используя формулы (6.6) и (6.9), легко получить выражение для разности статических моментов соседних ядер

$$\overline{F}_{N+1} - \overline{F}_N = f_{ii} - \sum_\lambda \frac{\xi_\lambda^* \gamma_{ii}^{(\lambda)} + \xi_\lambda \gamma_{ii}^{(\lambda)*}}{\hbar\omega_\lambda} . \tag{6.11}$$

Выражение для величин $\gamma_{ij}^{(\lambda)}$ получим, приравняв коммутаторы от модельного оператора h и микроскопического гамильтониана системы

$$[H , B_\lambda^+] = \hbar \omega_\lambda B_\lambda^+ + \sum_{ij} \gamma_{ij}^{(\lambda)*} : a_i^+ a_j : , \tag{6.12}$$

$$[[[H , B_\lambda^+], a_j^+], a_i]_+ = \gamma_{ij}^{(\lambda)*} ,$$

и положив

$$B_\lambda^+ = \sum_{ij} b_{ij}^{+(\lambda)} a_i^+ a_j . \tag{6.13}$$

Если одночастичные состояния p, q в h_{int} лежат одновременно выше или ниже границы Ферми, то последний член выпадает из уравнения для фонона

$$\langle 0 | [a_i^+ a_j , \{ [H , B_\lambda^+] - \hbar \omega_\lambda B_\lambda^+ -$$

$$- \sum_{pq} \gamma_{qp}^{(\lambda)*} : a_p^+ a_q : \}] | 0 \rangle = 0 . \tag{6.12'}$$

Мы будем считать, что это условие на индексы p, q выполнено, поскольку оно не накладывает никаких ограничений на характер примесей состояний $(2p, 1h)$ к состояниям частицы нечётного ядра в формуле (6.6).

Усредняя второе уравнение в формуле (6.12) и учитывая формулу (6.13), получим/11/

$$\gamma_{ij}^{(\lambda)*} = \sum_{k\ell} (ik | V | j\ell - \ell j) b_{\ell k}^{+(\lambda)} (n_k - n_\ell) . \tag{6.14}$$

При этом независимость квазичастичных и фононных возбуждений имеется в том смысле, что

$$\langle 0 | [B_\lambda^+ , \sum_{k\ell} \gamma_{k\ell}^{(\lambda)} : a_k^+ a_\ell :] | 0 \rangle = 0 . \tag{6.15}$$

Формулу (6.14) легко интерпретировать, написав оператор эффективных сил как вариационную производную по матрице плотности K от потенциальной энергии самосогласованного поля/13/

$$V_{12} = \frac{\delta U_1}{\delta K_2} = \frac{\delta^2 E_{pot}}{\delta K \, \delta K_2} . \tag{6.16}$$

Предположим, что энергия E_{pot} зависит от параметра деформации одночастичного потенциала $E_{pot} = E(Q)$. Пусть далее оператор $\hat{q} = \frac{\delta Q}{\delta K}$ и канонически сопряженный ему оператор $\hat{\pi}\,([\hat{\pi}, \hat{q}] = \frac{\hbar}{i})$ определяют оператор рождения фонона $B^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar M}}(\hat{\pi} + iM\hat{q})$. В этом случае имеем

$$\gamma_{ij} = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}}\,(i\,|\frac{\delta U}{\partial Q}|\,j) - \tag{6.17}$$

выражение, используемое при феноменологическом анализе связи коллективного и квазичастичных возбуждений ядер.

Соответствие между описанием нечётных сферических ядер, приведенным выше, с зависящим от времени методом Хартри-Фока, можно установить, рассмотрев выражение для статического момента (6.11). Предположим, что возбуждения B^+_λ, дающие основной вклад в формулу (6.11), неколлективизированы. Тогда в формуле (6.11) можно положить $B^+_\lambda = a^+_p a_h$, $\xi_\lambda = f_{ph}$, $\hbar\omega_\lambda = e_p - e_h$, $\gamma^{(\lambda)}_{ji} = (ip\,|\,V\,|\,jh - hj)$.

Формула (6.11) при этом переходит в известное в теории Хартри-Фока выражение, учитывающее в первом порядке поляризацию среды:

$$\overline{F}_{N+1} - \overline{F}_N = f_{ii} + \sum_{jk} (ij\,|\,V\,|\,ik - ki)\,\frac{n_j - n_k}{e_j - e_k}\,f_{kj} . \tag{6.18}$$

б. Деформированные ядра

В этом случае оператор h включает, кроме членов в формуле (6.5), ротационную энергию (6.2), где операторы

$$\vec{I}_{rot} = \sum_{i \le N, j > N} (\vec{I}_{ij}\, a^+_i a_j + \vec{I}_{ji}\, a^+_j a_i) ,$$

$$\vec{j} = \vec{I} - \vec{I}_{rot} = \sum_{i,j \le N \text{ или } i,j > N} \vec{I}_{ij}\, a^+_I a_j \tag{6.19}$$

представляют собой момент количества движения остова и нечётного нуклона (или дырки) соответственно (N - число нуклонов остова). Кроме кориолисова взаимодействия $(-\frac{\vec{I}\cdot\vec{j}}{\mathfrak{J}})$, введенного таким образом в модельный гамильтониан, выражение для h естественно дополнить членами

$$h_{int} = \sum_{\nu} \sum_{\substack{i,j \le N \\ \text{или } i,j > N}} v^{(\nu)}_{ij}(R^+) : a^+_i a_j : I^{2\nu}_{rot} . \tag{6.20}$$

Компоненты оператора (6.20) описывают смешивание состояний с разными ротационными квантовыми числами. Их роль вполне аналогична роли коэффициентов γ в формуле (6.5), так что, зная их, можно получать поправки к состояниям системы и вычислить матричные элементы, аналогичные рассмотренным выше (см. формулы (6.6)-(6.10)). Связь коэффициентов оператора h_{int} с микроскопическим гамильтонианом ядра в частном случае $\nu = 0$ получим, приравнивая коммутаторы и антикоммутаторы $[\;\;]_+$

$$v^{(0)}_{ji}(R^+) \equiv [\,[\,h_{int}, a^+_i\,], a_j\,]_+ \approx [\,[H, a^+_i], a_j\,]_+ . \tag{6.21}$$

Представив выражение $v^{(0)}_{ji}(R^+)$ в виде

$$v^{(0)}_{ji}(R^+) = \sum_{\ell m} v^{(0,\ell,m)}_{ji} R^+_{\ell m} \tag{6.22}$$

и используя формализм §5, получим

$$v^{(0,\ell,m)}_{ij} = \langle\Omega| \sum_{i'\neq j'} \sum_{m'} (\underbrace{\overbrace{ii'|V|jj'}^{\ell m}}_{\ell m})(a^+_{i'}a_{j'})^{\ell}_{m'} R_{\ell m'}|\Omega\rangle . \tag{6.23}$$

Эту формулу можно упростить, воспользовавшись выражением (6.16) для эффективных сил, если энергия E_{pot} зависит от параметров мультипольной деформации. В этом случае имеем

$$v^{(0,\ell,m)}_{ij} = (i|\frac{\partial U}{\partial Q_{\ell m}}|j)\langle\Omega|\sum_{m'} R_{\ell m'}\hat{q}_{\ell m'}|\Omega\rangle \tag{6.24}$$

$$(\hat{q} = \frac{\delta Q}{\delta K}),$$

K – матрица плотности; (в формулы (6.23)-(6.24) диагональный матричный элемент $R_{\ell m'}$ не вносит вклад). Для учёта членов $\nu \neq 0$ нужно обобщение выводов §5.

Заключение

Развивая формализм операторов ротонов, мы неоднократно подчеркивали возможности уточнить известные формулы для параметров ротационного спектра. Однако нам кажется, что главное преимущество, которое дает их введение, состоит в унификации описания переходов разного рода.

По этой причине мы уделили в данной работе много места выводу уже известных результатов, демонстрируя аналогию нашего метода с другими подходами к проблеме вращения. При этом оказалось возможным установить точки соприкосновения нашего метода с теорией принудительного вращения и методом случайной фазы.

Унификация, о которой говорилось выше, позволяет сформулировать и исследовать проблемы связи между элементарными возбуждениями. Развитый метод приводит к существенно новым результатам как раз для тех явлений, где эта связь важна.

В заключение авторы выражают искреннюю признательность сотрудникам группы теории ядра ЛТФ ОИЯИ, принимавшим участие в обсуждении работы. Один из авторов (И.М.) пользуется случаем отметить многочисленные и полезные дискуссии по вопросам, поднимавшимся выше, с В.Рыбарской.

Литература

1. *H.J.Lipkin, A. de-Shalit, I.Talmi, Phys. Rev., 103, 1773 (1956). F.M.H.Villars, Nucl. Phys. 74, 353 (1965).*
2. *G.Do-Dang et al. Proceedings of the Int. Conference on Nuclear Structure, Tokyo, 1967.*
3. *E.Nadjakov, I.N.Mikhailov, Nucl. Phys., A107, 92 (1968).*
4. *D.J.Rowe. Microscopic Collective Theories, Fundamentals in Nuclear Theory, IAEA, Vienna, 1967.*
5. *А.Эдмондс. Сборник "Деформация атомных ядер", ИЛ, Москва, 1958.*
6. *E.Nadjakov et al., C.R.Acad. Bulg. Sci. (in print)*
7. *А.Б.Мигдал. Теория конечных ферми-систем, "Наука", 1965.*
8. *А.Лейн. Теория ядра. "Атомиздат", 1967.*
9. *К.Алдер и др. Изучение структуры ядра при кулоновском возбуждении ионами. Сборник "Деформация атомных ядер" ИЛ, Москва, 1958.*
10. *O.Nathan, S.G.Nilsson, Collective Nuclear Motion and the Unified Model, α-,β-, γ -Ray Stectroscopy, Amsterdam, 1965.*

11. J.Da Providencia, Phys. Lett, 28B, 88 (1968).
12. B.Mottelson, Proceedings of the International Conference on Nuclear Structure, Tokyo, 1967, p.87.
13. И.Н.Михайлов. Препринт ОИЯИ, Р4-3873. Proceedings of the Int. Symp. on Nuclear Structure, Dubna, 1969.

Рукопись поступила в издательский отдел
31 января 1969 года.