

Б-125

11/II-69
яф, 1969, т. 10 №3, с. 509-518

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна.

P4 - 4249



В.В.Бабилов

УРАВНЕНИЕ ДЛЯ САМОСОГЛАСОВАННОГО
ЯДЕРНОГО ПОТЕНЦИАЛА

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1969

P4 - 4249

В.В.Бабилов

УРАВНЕНИЕ ДЛЯ САМОСГЛАСОВАННОГО
ЯДЕРНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Направлено в ЯФ

Объединенный институт
ядерных исследований
БНБ ИИОТЕНА

4663/2 ср.

1. В в е д е н и е

Трудности точного решения ядерной задачи многих тел, как известно, связаны с недостаточностью наших знаний о ядерных силах и отсутствием простых алгоритмов вычисления свойств ядра на основе заданного нуклон-нуклонного взаимодействия. Успех модели оболочек указывает на то, что большой прогресс в понимании ядерной структуры был бы достигнут, если бы удалось, основываясь на простой и в то же время достаточно физически наглядной теории, вычислить среднее потенциальное поле ядра, которое обычно вводится чисто феноменологическим образом, например, в виде потенциала Саксона-Вудса. В связи с этим большой интерес представляет возможность получения явного аналитического выражения для самосогласованного ядерного потенциала /1/.

В настоящей работе рассматривается точно решаемая статистическая модель конечного ядра без учета кулоновского взаимодействия и энергии симметрии, т.е. модель конечной ядерной материи. Мы предполагаем, что средний потенциал в ядре $V(\vec{r})$ создается классическим мезонным полем $\phi(\vec{r})$, источниками которого являются нуклоны с пространственной плотностью $\rho(\vec{r})$. Потенциал должен быть, очевидно, притягивающим, чтобы ядро было связанной системой. Только поле нейтральных скалярных мезонов, в создании которого все нуклоны участвуют когерентно, может обеспечить этот притягивающий потенциал (см., например, /2/).

2. Модельный гамильтониан

Энергия системы A нуклонов

$$A[\rho] = \int \rho(\vec{r}) d^3r, \quad (2.1)$$

взаимодействующих с мезонным полем, является функционалом

$$E[\rho, \phi] = \int H(\vec{r}) d^3r. \quad (2.2)$$

В нашей модели статическая плотность нерелятивистского гамильтониана определяется выражением ($\hbar = c = 1$)

$$H(\vec{r}) = \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{\mu^2}{2} \phi^2 + C \rho^{5/3} + g \phi \rho + a \rho^{4/3} + \beta \rho^{1/3} \phi^2 + \gamma \frac{(\nabla \rho)^2}{\phi} + \delta \frac{(\nabla \phi)(\nabla \rho)}{\rho^{1/3}} + \epsilon \rho. \quad (2.3)$$

Здесь μ — масса мезона, g — константа связи мезонного и нуклонного полей, $C = (3/10m)(3\pi^2/2)^{2/3}$, m — масса свободного нуклона, $a, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ — константы, величины которых определяются ниже.

Можно дать следующую физическую интерпретацию отдельным членам выражения (2.3). Первые два соответствуют плотности энергии свободного мезонного поля; третий член равен плотности кинетической энергии вырожденного Ферми-газа нуклонов с граничным импульсом $p_F(\vec{r})$, зависящим от плотности нуклонов в данной точке пространства

$$\rho(\vec{r}) = \frac{2}{3\pi^2} p_F^3(\vec{r}). \quad (2.4)$$

Четвертый и пятый члены равны соответственно прямому и обменному взаимодействию нуклонов с мезонным полем; шестой член учитывает в рассматриваемой модели возможную перенормировку массы мезона в ядерной материи. Следующие два члена, аналогично известной поправке Вайц-

зеккера, отражают существенные в ядре эффекты неоднородности плотности и потенциала. Последний член является мерой перенормировки массы нуклона в ядерной материи, $\epsilon = m^* - m$, ибо энергия (2.2) отсчитывается от энергии $E_0 = Am$ системы A свободных нуклонов. Как будет показано ниже, величина $-\epsilon$ равна средней энергии связи на нуклон в ядерной материи (≈ 16 Мэв), так что $|\epsilon| \ll m$, и во всех остальных членах выражения (2.3) можно пренебречь перенормировкой массы нуклона ($m^* \approx m$).

3. Уравнения для ядерных потенциала и плотности

Соответствующие плотности гамильтониана (2.3) полевые уравнения находятся из условия минимума энергии (2.2) при заданном числе частиц (2.1), т.е. путем варьирования функционала $\tilde{E} = E - \lambda A$ (λ — множитель Лагранжа) по функциям $\phi(\vec{r})$ и $\rho(\vec{r})$

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \phi} - \nabla \frac{\partial \tilde{H}}{\partial (\nabla \phi)} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \rho} - \nabla \frac{\partial \tilde{H}}{\partial (\nabla \rho)} = 0. \quad (3.2)$$

Здесь $\tilde{H} = H - \lambda \rho$.

Нетрудно убедиться, рассматривая явное выражение для уравнения (3.2), что из требования конечности системы, т.е. $\phi \rightarrow 0, \rho \rightarrow 0$, если $|\vec{r}| \rightarrow \infty$, следует

$$\lambda = \epsilon. \quad (3.3)$$

Поэтому оба параметра λ и ϵ выпадают из уравнения (3.2).

В общем случае произвольных значений параметров a, β, γ, δ уравнения (3.1) и (3.2) образуют связанную систему двух нелинейных уравнений второго порядка, решения которой можно найти только численным образом. Однако при определенных значениях параметров a, β, γ, δ эти решения могут быть получены в замкнутом аналитическом виде.

Перейдем к безразмерной независимой переменной

$$\vec{x} = \mu \vec{r} \quad (3.4)$$

и безразмерным распределениям ядерного потенциала $y(\vec{x})$

$$V(\vec{r}) = g \phi(\vec{r}) = -V_0 y(\vec{x}) \quad (3.5)$$

и ядерной плотности $z(\vec{x})$

$$\rho(\vec{r}) = \rho_0 z(\vec{x}). \quad (3.6)$$

Здесь V_0 — положительная величина с размерностью потенциала, $\rho_0 = 2\rho_0^3/3\pi^2$ — некоторая плотность, ρ_0 — соответствующий ρ_0 граничный импульс Ферми.

Тогда, если выполняются соотношения

$$\frac{\rho_0^2}{2m} = V_0, \quad (3.7)$$

$$\frac{g^2}{\mu^2} = \frac{5V_0}{\rho_0}, \quad (3.8)$$

и параметры α , β , γ , δ равны соответственно

$$\alpha = -\frac{1}{20} \left(\frac{3\pi^2}{2} \right)^{1/3} \frac{\rho_0}{m}, \quad (3.9)$$

$$\beta = \frac{4g^2}{5} \left(\frac{2}{3\pi^2} \right)^{2/3} m, \quad (3.10)$$

$$\gamma = -\frac{3\pi^4}{16g^3} \frac{1}{m^3}, \quad (3.11)$$

$$\delta = \frac{2}{3g} \left(\frac{3\pi^2}{2} \right)^{2/3} \frac{1}{m}, \quad (3.12)$$

то уравнения (3.1) и (3.2) разрешимы.

Легко проверить, что при этих условиях существует следующее решение уравнений (3.1) и (3.2) в терминах функций $y(\vec{x})$ и $z(\vec{x})$:

$$z(\vec{x}) = y^{3/2}(\vec{x}), \quad (3.13)$$

а $y(\vec{x})$ является решением уравнения

$$\Delta y(\vec{x}) + y(\vec{x}) = y^{3/2}(\vec{x}) + \frac{3}{2} \frac{[\nabla y(\vec{x})]^2}{y(\vec{x})}. \quad (3.14)$$

Заметим, что из (3.13) и (3.14) вытекает, что функция $z(\vec{x})$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta z(\vec{x}) + \frac{3}{2} z(\vec{x}) = \frac{3}{2} z^{4/3}(\vec{x}) + \frac{4}{3} \frac{[\nabla z(\vec{x})]^2}{z(\vec{x})}. \quad (3.15)$$

Следовательно, решение уравнения (3.14) позволяет нам найти как распределение ядерного потенциала $V(\vec{r})$, так и распределение ядерной плотности $\rho(\vec{r})$.

Соотношение (3.13) имеет простой физический смысл. Совместно с (3.5)–(3.7) оно означает, что граничная энергия Ферми частицы не зависит от того, в какой точке пространства частица находится, а именно, всюду равна нулю

$$E_F(\vec{r}) = \frac{p_F^2(\vec{r})}{2m} + V(\vec{r}) = 0. \quad (3.16)$$

Таким образом, связь ядерной плотности с потенциалом в нашей модели идентична с известным условием самосогласования этих величин в методе

Томаса-Ферми, т.е. с условием равновесия системы. В то же время уравнение (3.14) для ядерного потенциала существенно отличается от уравнения Томаса-Ферми для самосогласованного потенциала в атоме

$$\Delta y = y^{3/2} \quad (3.17)$$

Уравнение (3.14) является нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка. Нас интересуют такие его решения, которые удовлетворяют граничным условиям

$$y(\vec{x}) \rightarrow y_0 = \text{const}, \quad |\vec{x}| \rightarrow 0, \quad (3.18)$$

$$y(\vec{x}) \rightarrow 0, \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty.$$

Вспользуемся тем, что общее решение краевой задачи (3.18) для уравнения

$$\Delta y + y = y^n + q \frac{(\nabla y)^2}{y} \quad (3.19)$$

при $n=q$ может быть получено в явном виде /3/. В рассматриваемом здесь случае $n=q=3/2$ уравнение (3.14) подстановкой

$$y(\vec{x}) = \frac{1}{u^2(\vec{x})} \quad (3.20)$$

приводится к линейному уравнению

$$2\Delta u(\vec{x}) - u(\vec{x}) + 1 = 0, \quad (3.21)$$

решения которого известны.

Прежде чем переходить к обсуждению решений краевой задачи заметим, что уравнение (3.14) имеет решение $y(\vec{x}) \equiv 1$, которому соответствует $z(\vec{x}) \equiv 1$. Это решение естественно интерпретировать как случай бесконечной однородной ядерной материи. Величины $-V_0$ и ρ_0

являются тогда соответственно потенциалом и плотностью ядерной материи, связанными между собой соотношением (3.7).

4. Сферические ядра

Для конечных ядер решения уравнений (3.21) и (3.14) могут обладать сферической симметрией, а могут и не обладать ею. Рассмотрим сначала случай сферических ядер, для которых распределения потенциала и плотности сферически-симметричны. В этом случае решения краевой задачи (3.18) для уравнения (3.14) имеют вид /1,3/

$$y(x;a) = \frac{1}{\left[1 + a \frac{\text{sh}(x/\sqrt{2})}{x/\sqrt{2}}\right]^2} \quad (4.1)$$

Параметр a , характеризующий решение, просто связан с начальным значением $y(0) = y_0$

$$a = \frac{1}{\sqrt{y_0}} - 1. \quad (4.2)$$

Для бесконечной ядерной материи $y_0 = 1$, $a = 0$; для конечных ядер $y_0 < 1$, $a > 0$.

Распределение плотности нуклонов в сферическом ядре, соответствующее распределению потенциала (4.1), равно

$$z(x;a) = \frac{1}{\left[1 + a \frac{\text{sh}(x/\sqrt{2})}{x/\sqrt{2}}\right]^3} \quad (4.3)$$

Поведение функций $y(x;a)$, $z(x;a)$ для нескольких значений y_0 ($y_0 = 0,85$, $y_0 = 0,990$, $y_0 = 0,9996$) показано на рис. 1. Видно, что чем меньше разность $1 - y_0$, тем большую протяженность имеют распределения потенциала и плотности. Удобно следующим образом определить радиусы X_y и X_z этих распределений

$$y(X_y) = \frac{1}{2}, \quad z(X_z) = \frac{1}{2}, \quad (4.4)$$

так как для всех ядер, за исключением самых легких, значения y_0 и $z_0 = y_0^{3/2}$ очень близки к единице. Величины X_y , X_z просто связаны с параметром a распределений (4.1), (4.3)

$$a = (\sqrt{2}-1) \frac{X_y / \sqrt{2}}{\text{sh}(X_y / \sqrt{2})} = (2^{1/3}-1) \frac{X_z / \sqrt{2}}{\text{sh}(X_z / \sqrt{2})}. \quad (4.5)$$

Кривые на рис. 1 соответствуют значениям $X_y = 5$, $X_y = 10$ и $X_y = 15$. Легко видеть, что всегда $X_y > X_z$; в частности, для самых тяжелых ядер разность радиусов распределений потенциала и плотности постоянна и равна

$$X_y - X_z = \sqrt{2} \ln \frac{\sqrt{2}-1}{2^{1/3}-1} \approx 0,66. \quad (4.6)$$

Заметим также, что для тяжелых ядер $z'(v_z) \approx -3(2^{1/3}-1)/2^{11/8}$. Это значит, что толщина поверхностного слоя, то есть интервал расстояний, на котором $z(x)$ падает от 0,9 до 0,1, для них практически постоянна и равна

$$\Delta x \approx 5,5. \quad (4.7)$$

Возвращаясь к размерным величинам ядерных потенциала и плотности, находим

$$V(r) = \frac{V_0}{\left[1 + (\sqrt{2}-1) \frac{R_V}{r} \frac{\text{sh}(\mu r / \sqrt{2})}{\text{sh}(\mu R_V / \sqrt{2})}\right]^2}, \quad (4.8)$$

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{\left[1 + (2^{1/3}-1) \frac{R_\rho}{r} \frac{\text{sh}(\mu r / \sqrt{2})}{\text{sh}(\mu R_\rho / \sqrt{2})}\right]^3}, \quad (4.9)$$

где размерные радиусы потенциала и плотности равны

$$R_V = \frac{X_y}{\mu}, \quad R_\rho = \frac{X_z}{\mu}. \quad (4.10)$$

Выражения (4.8), (4.9) хорошо передают (рис. 1) известные особенности искомых распределений: близость к значениям для ядерной материи внутри ядра, практическое постоянство для всех ядер толщины поверхностного слоя и экспоненциально быстрый спад при удалении от края ядра

$$V(r) \approx - \frac{V_0}{(\sqrt{2}-1)^2} \left(\frac{r}{R_V}\right)^2 \exp[-\sqrt{2}\mu(r-R_V)], \quad e^{\mu(r-R_V)/\sqrt{2}} \gg 1, \quad (4.11)$$

$$\rho(r) \approx \frac{\rho_0}{(2^{1/3}-1)^3} \left(\frac{r}{R_\rho}\right)^3 \exp[-3\mu(r-R_\rho)/\sqrt{2}], \quad e^{\mu(r-R_\rho)/\sqrt{2}} \gg 1. \quad (4.12)$$

Сравнивая найденную выше (4.7) величину размытия поверхности тяжелых ядер с экспериментально известным (см., например, /4/) значением $\Delta r \approx 2,4$ ферми, нетрудно оценить мезонную массу μ . Так, $\mu^{-1} \approx 0,44$ ферми, т.е. $\mu \approx 3,2 \mu_\pi \approx 450$ Мэв. Соответствующая величина константы связи мезона с нуклоном находится из соотношения (3.8) и равна $g^2/4\pi \approx 4,5$ при $r_0 = 1,4$ ферми⁻¹. Такая величина r_0 отвечает значению $r_0 = 1,1$ ферми в феноменологической формуле для радиуса ядра $R = r_0 A^{1/3}$ и, согласно (3.7), величине $V_0 = 40$ Мэв для потенциала бесконечной ядерной материи. При данных значениях параметров кривые на рис. 1 соответствуют следующим числам частиц: $A=8$, $A=60$ и $A=200$, определяемых выражением

$$A(a) = \rho_0 \frac{4\pi}{\mu^3} \int_0^\infty z(x; a) x^2 dx. \quad (4.13)$$

Разность радиусов распределений потенциала и плотности для тяжелых ядер оказывается при этом равной, согласно (4.6), величине $\Delta R = R_V - R_\rho = 0,66/\mu \approx 1,5$ ферми, что удовлетворительно согласуется с известной из эксперимента величиной $\Delta R \approx 1,3$ ферми /4/.

На рис. 1 приведены также распределения (для удобства увеличено в 10 раз) спин-орбитального ядерного потенциала $y_{LS}(x; a)$, соответствующие данным распределениям центрального потенциала $y(x; a)$

$$y_{LS}(x; a) = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} y(x; a). \quad (4.14)$$

5. Деформированные ядра

Как уже было отмечено выше, для уравнения (3.21) и, соответственно, для уравнения (3.14) может быть найдено общее аналитическое решение, без предположения о сферической симметрии задачи. Следовательно, аналитические решения уравнения (3.14) пригодны также для описания распределения самосогласованного потенциала деформированных ядер. Общее решение уравнения (3.14) имеет вид ^{13/}:

$$y(x, \theta, \phi; a) = [1 + a_0 \frac{\text{sh}(x/\sqrt{2})}{x/\sqrt{2}} + \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} i_{\ell}(x/\sqrt{2}) Y_{\ell m}(\theta, \phi)]^{-2}. \quad (5.1)$$

Здесь положительный параметр a_0 , как и раньше, связан со средним радиусом ядра, $a_{\ell m}$ - определяющие деформацию ядра произвольные численные параметры, $i_{\ell}(x) = \sqrt{\pi/2x} I_{\ell+1/2}(x)$ - сферические функции Бесселя мнимого аргумента, $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ - сферические функции. Дипольная ($\ell = 1$) деформация отсутствует, если, как это нами предполагается, центр тяжести распределения находится в центре координат.

Соответствующее (5.1) распределение плотности нуклонов в деформированном ядре равно, согласно (3.13),

$$z(x, \theta, \phi; a) = [1 + a_0 \frac{\text{sh}(x/\sqrt{2})}{x/\sqrt{2}} + \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} i_{\ell}(x/\sqrt{2}) Y_{\ell m}(\theta, \phi)]^{-3}. \quad (5.2)$$

Из требования вещественности и ограниченности выражений (5.1), (5.2) следует, что единственными ограничениями на параметры $a_{\ell m}$ являются

$$a_{\ell, -m} = a_{\ell m}^* \quad (5.3)$$

$$\sum_{\ell m} |a_{\ell m}| \sqrt{(2\ell+1)/4\pi} < a_0.$$

Радиусы $X_y(\theta, \phi)$ и $X_z(\theta, \phi)$ распределений (5.1) и (5.2), определяемые соотношениями

$$y(X_y(\theta, \phi), \theta, \phi; a) = z(X_z(\theta, \phi), \theta, \phi; a) = \frac{1}{2}, \quad (5.4)$$

являются теперь функциями угловых переменных и параметров деформации.

Из выражений (5.1), (5.2) находим

$$a_0 \frac{\text{sh}(X_y(\theta, \phi)/\sqrt{2})}{X_y(\theta, \phi)/\sqrt{2}} + \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} i_{\ell}(X_y(\theta, \phi)/\sqrt{2}) Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \sqrt{2} - 1, \quad (5.5)$$

$$a_0 \frac{\text{sh}(X_z(\theta, \phi)/\sqrt{2})}{X_z(\theta, \phi)/\sqrt{2}} + \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} i_{\ell}(X_z(\theta, \phi)/\sqrt{2}) Y_{\ell m}(\theta, \phi) = 2^{1/3} - 1. \quad (5.6)$$

При отсутствии деформации ($a_{\ell m} = 0$) эти выражения переходят в более простые формулы (4.5). В общем случае произвольной деформации зависимость функций $X_y(\theta, \phi)$ и $X_z(\theta, \phi)$ от угловых переменных различна, но всюду $X_y(\theta, \phi) > X_z(\theta, \phi)$.

Радиусы распределений ядерной плотности и ядерного потенциала, рассматриваемые как функции углов θ, ϕ , подобны только при малых деформациях. Чтобы показать это, упростим точные выражения (5.5), (5.6). Воспользуемся прежде всего тем, что для средних и тяжелых ядер $X_z(\theta, \phi)/\sqrt{2} \gg 1$, так что можно воспользоваться асимптотическими выражениями для сферических функций Бесселя $i_{\ell}(x) \approx e^x/x$. В результате находим

$$\frac{\exp[X_y(\theta, \phi)/\sqrt{2}]}{X_y(\theta, \phi)/\sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{a_0 + \sum_{\ell m} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi)}, \quad (5.7)$$

$$\frac{\exp [X_z(\theta, \phi) / \sqrt{2}]}{X_z(\theta, \phi) / \sqrt{2}} \approx \frac{2(2^{1/3} - 1)}{a_0 + \sum_{\ell m} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi)} \quad (5.8)$$

Если деформации малы, т.е.

$$|a_{\ell m}| \ll a_0, \quad (5.9)$$

возможно дальнейшее упрощение выражений (5.7), (5.8)

$$X_y(\theta, \phi) = \sqrt{2} \left[\ell_n \frac{2(\sqrt{2}-1)}{a_0} + \ell_n \ell_n \frac{2(\sqrt{2}-1)}{a_0} + \dots \right] - \frac{\sqrt{2}}{a_0} \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (5.10)$$

$$X_z(\theta, \phi) = \sqrt{2} \left[\ell_n \frac{2(2^{1/3}-1)}{a_0} + \ell_n \ell_n \frac{2(2^{1/3}-1)}{a_0} + \dots \right] - \frac{\sqrt{2}}{a_0} \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi). \quad (5.11)$$

Следовательно, при малых деформациях

$$X_y(\theta, \phi) = X_y^{(0)} + X_y^{(1)}(\theta, \phi), \\ X_z(\theta, \phi) = X_z^{(0)} + X_z^{(1)}(\theta, \phi), \quad (5.12)$$

где средние радиусы распределений равны

$$X_y^{(0)} = \sqrt{2} \left[\ell_n \frac{2(\sqrt{2}-1)}{a_0} + \ell_n \ell_n \frac{2(\sqrt{2}-1)}{a_0} + \dots \right], \\ X_z^{(0)} = \sqrt{2} \left[\ell_n \frac{2(2^{1/3}-1)}{a_0} + \ell_n \ell_n \frac{2(2^{1/3}-1)}{a_0} + \dots \right], \quad (5.13)$$

и отклонение радиусов от средних значений равно

$$X^{(1)}(\theta, \phi) = - \frac{\sqrt{2}}{a_0} \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi). \quad (5.14)$$

Функции (5.10) и (5.11) подобны, так как их разность не зависит от углов и равна разности средних радиусов (5.13), что для тяжелых ядер ($\ell_n \ell_n (1/a_0) \ll \ell_n (1/a_0)$) дает величину (4.6).

Естественно возникает вопрос об энергетически наиболее выгодной деформации ядра. Для решения этой задачи необходимо подставить в выражение (2.3) для плотности энергии найденные решения (5.1), (5.2) и найти минимум полной энергии системы (2.2) при заданном числе нуклонов (2.1) в пространстве переменных $a_{\ell m}$. Как нетрудно убедиться, использование в (2.3) соотношения (3.13) между распределениями плотности нуклонов и ядерного потенциала приводит, независимо от величины деформации, к взаимному сокращению всех членов выражения (2.3) за исключением последнего.

Таким образом, получаем, что, независимо от формы ядра,

$$E = \epsilon \int \rho(\vec{r}) d^3 r. \quad (5.15)$$

Поэтому средняя энергия связи на нуклон

$$\bar{E} = - \frac{E}{A} = - \epsilon \quad (5.16)$$

не зависит от параметров деформации $a_{\ell m}$. Следовательно, $\partial \bar{E} / \partial a_{\ell m} = \partial^2 \bar{E} / \partial a_{\ell m}^2 = 0$, и ядро в нашей модели является системой, безразличной по отношению к изменению формы.

Величина параметра ϵ в выражении (2.3) равна взятому с обратным знаком объемному члену в известной формуле Вайцзеккера для энергии связи ядра, т.е. $\epsilon \approx -16$ Мэв.

8. Обсуждение результатов

Рассмотренная статистическая модель позволяет на основе простых и разумных предположений о мезонной природе внутриядерного потенциала и о виде взаимодействия мезонного и нуклонного полей объяснить насыщение ядерных сил и существенные характеристики среднего поля и распределения нуклонной плотности в ядре.

Полученные в данной работе аналитические выражения для потенциала $V(r)$ могут быть положены в основу расчетов по модели ядерных оболочек и по оптической модели ядерных реакций аналогично тому, как результаты приближения Томаса-Ферми используются в многоэлектронных задачах атомной физики (см., например, /5/).

Отмечая близость (рис. 1) формы самосогласованного потенциала (4.1) к форме известного феноменологического потенциала Саксона-Вудса ($b_1 = b\mu = 1,25$ при $b = 0,55$ ферми)

$$y_{sw}(x) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{x - X_0}{b_1}\right)} \quad (6.1)$$

подчеркнем некоторые их отличия. Вдали от края ядра потенциал (4.1) исчезает, несмотря на предэкспоненциальный множитель x^2 , быстрее, чем потенциал (6.1), из-за большего фактора в экспоненте (4.11). Спин-орбитальное взаимодействие (4.14) регулярно в точке $x=0$, в то время как для потенциала Саксона-Вудса (6.1) оно обладает нефизической сингулярностью $1/x$. Аналитические свойства (расположение и кратность полюсов) функций (4.1) и (4.2), продолженных в область комплексных значений x , существенно отличаются от аналитических свойств функции (6.1) в этой области.

Определенные в разделе 4 значения параметров мезонного поля, а именно, масса мезона $\mu = 3,2 \mu_\pi$ и константа связи $g^2/4\pi = 4,5$, имеют ожидаемый порядок величин. Действительно, все современные модели нуклон-нуклонного взаимодействия вводят в рассмотрение обмен между нуклонами нейтральным скалярным мезоном с близкими к данным значениями массы и константы связи, что обеспечивает притягивающий характер ядерных сил (см., например, /8/). Принято считать, что этот гипо-

тетический мезон соответствует определенной параметризации существенной, хотя и нерезонансной, части обмена 2π -системой, находящейся в изосинглетном S -состоянии (см., например, /7/). С таким представлением согласуется тот, полученный в настоящей работе результат, что в отличие от перенормировки массы нуклона перенормировка (увеличение) массы мезона внутри ядерного вещества весьма значительна (шестой член в выражении (2.3) для плотности энергии) и равна $\mu^* = 5\mu$.

Точно решаемые уравнения (3.14), (3.15) получаются в данной модели только при определенных значениях параметров (3.9)-(3.12). Исследование нелинейных уравнений вида (3.19) показывает /3/, однако, что характер их решений сохраняется в широкой области изменения параметров μ и q . Поэтому можно ожидать устойчивости качественных результатов модели при изменении значений ее параметров.

Таким образом, общее представление о мезонной природе самосогласованного ядерного потенциала оказывается весьма плодотворным. Соответствующая статистическая модель приводит к простым, физически наглядным уравнениям в отличие от моделей, использующих конкретный вид нуклон-нуклонного взаимодействия /8/ или феноменологическое выражение для энергии ядра как функционала от одной нуклонной плотности /9/.

Следует, однако, заметить, что мы не учитывали некоторых существенных для реальных многонуклонных систем эффектов: кулоновского взаимодействия, энергии симметрии, корреляции нуклонов, ядерных оболочек и ряда других. Мы думаем, в частности, что безразличие энергии ядра по отношению к изменению формы, т.е. отсутствие поверхностной энергии, объясняется неучетом этих, в первую очередь оболочечных, эффектов. Последние, как известно из опыта, должны существенным образом влиять на форму ядра. Поэтому точно решаемая модель, рассмотренная в настоящей работе, является, по-видимому, первым приближением к решению сложной задачи структуры ядра.

Автор признателен А.М. Газетовой за помощь в вычислениях и К.К. Мусабаеву за полезные замечания.

Л и т е р а т у р а

1. V.V.Babikov, Contr. Intern. Symp. Nucl. Structure, Dubna, p.157, (1968).
2. M.H.Johnson and E.Teller. Phys. Rev., 98, 783 (1955).
3. В.В. Бабиков. Препринт ОИЯИ Р4-4248, Дубна (1969).
4. С. Мошковский. В сб. "Строение атомного ядра", ИИЛ, Москва, 1959.
5. П. Гомбаш. "Проблема многих частиц в квантовой механике", ИИЛ, Москва, 1952.
6. В.В. Бабиков. Изв. АН СССР (сер. физ.) 32, 299 (1968).
7. S.Furuichi. Suppl. Progr. Theor. Phys., No.39, 190 (1967).
8. H.A.Bethe. Phys. Rev., 167, 879 (1968).
9. K.A.Brueckner, J.B.Buchler, S.Jorna, and R.J.Lombard. Phys. Rev., 171, 1188 (1968).

Рукопись поступила в издательский отдел

4 января 1969 года.

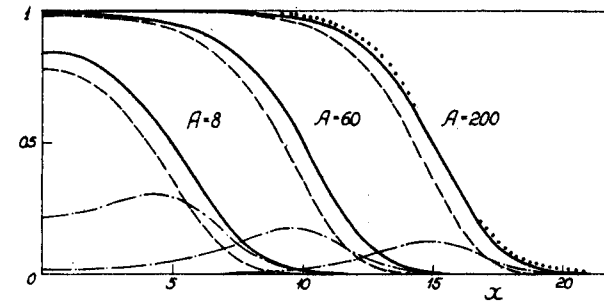


Рис.1. Распределения центрального ядерного потенциала $u(x;a)$ (сплошные линии), ядерной плотности $z(x;a)$ (штрихованные линии) и спин-орбитального потенциала $u_{LS}(x;a)$ (штрих-пунктирные линии) для следующих значений радиуса $X_y: X_y=5, X_y=10, X_y=15$, что соответствует значениям параметра $a: a=8,5 \cdot 10^{-2}, a=5 \cdot 10^{-3}, a=2,2 \cdot 10^{-4}$. Пунктиром показан потенциал Саксона-Вудса (6.1), имеющий тот же радиус $X_y=15$ и ту же величину производной $u'_{SW}(X_y;a)=u'(X_y;a)$ для ядра с числом нуклонов $A=200$.