

Б-125

11/II-69

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P4 - 4248



ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В.В.Бабилов

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ  
НЕЛИНЕЙНЫХ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

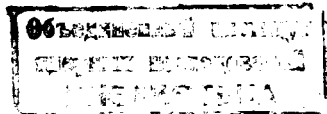
1969

P4 - 4248

В.В.Бабилов

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ  
НЕЛИНЕЙНЫХ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Направлено в "Журнал вычислительной математики  
и математической физики"



4668/2 up

### В в е д е н и е

Рассматриваемый класс уравнений включает два уравнения в частных производных второго порядка. Первое имеет вид

$$\Delta y + y = y^a + \beta \frac{(\nabla y)^2}{y} . \quad (1)$$

Второе уравнение отличается от (1) знаком при членах  $y$  ,  $y^a$  :

$$\Delta y - y = -y^a + \beta \frac{(\nabla y)^2}{y} . \quad (2)$$

Предполагается, что

$$a > 0 , \quad -\infty < \beta < \infty . \quad (3)$$

Краевая задача формулируется в сферической системе координат следующим образом: найти непрерывные и дифференцируемые положительные решения уравнений (1), (2), удовлетворяющие условиям

$$y(0, \theta, \phi) = y_0 < \infty , \quad (4)$$

$$\nabla y(r=0, \theta, \phi) = 0 , \quad (5)$$

$$y(\infty, \theta, \phi) = 0 , \quad (6)$$

$y_0$  - неизвестный положительный параметр.

Подобная задача возникает, например, в статистической теории ядра при обобщении уравнения Томаса-Ферми на случай конечной массы мезона и учета эффекта поверхности<sup>/1,2/</sup>. В<sup>/1/</sup> было показано, что, если  $\alpha = \beta = 3/2$ , краевая задача для уравнения (1) имеет при  $0 < y_0 < 1$  континуум сферически-симметричных решений, соответствующих самосогла-сованному потенциалу сферических ядер. В<sup>/2/</sup> при этих же условиях най-дено общее решение уравнения (1), позволяющее описать потенциал дефор-мированных ядер. Ряд исследований<sup>/3-6/</sup> был посвящен краевым зада-чам для уравнения (2), возникающим в нелинейной теории поля. В част-ности, было найдено, что, если  $\beta = 0$ , рассматриваемая краевая задача имеет для  $\alpha = 3, 2, 3/2$  сферически-симметричные решения соответ-ственно при  $y_0 = 433^{1/3}$ ,  $y_0 = 4,19^{1/4}$ ,  $y_0 = 4,274^{1/6}$ .

В настоящей работе показывается, что при произвольных значениях параметров  $\alpha$  и  $\beta$  можно найти общие критерии существования реше-ний рассматриваемой краевой задачи как для уравнения (1), так и для уравнения (2). В основном обсуждаются сферически-симметричные решения, хотя некоторые результаты относятся также к общему решению, не обла-дающему сферической симметрией. Найдены случаи, когда решение кра-евой задачи может быть получено в явном виде.

Величина параметра  $\beta$  является определяющей при рассмотрении. Поэтому дальнейшее изложение и соответствующие теоремы о существо-вании решений краевой задачи удобно представить отдельно для каждой из областей изменения  $\beta$ .

В §1 рассматривается случай  $1 < \beta < \infty$ . Краевая задача при  $\beta = 1$  исследуется в §2. В §3 содержатся результаты, относящиеся к случаю  $-\infty < \beta < 1$ . Различные области изменения параметра  $\alpha$  вынесены для каждого из параграфов в соответствующие пункты. Полученные результаты кратко обсуждаются в заключительном разделе работы.

### §1. $1 < \beta < \infty$

**Теорема 1.** Если  $\beta > 1$ , краевая задача (4)-(6) для уравнения (1) имеет решения только при  $\alpha > 1$ . При этом существует определя-

емый условием  $0 < y_0 < 1$  континуум решений с асимптотиками  $\rho(r^{1/(\beta-1)} e^{-r/\sqrt{\beta-1}})$ . Если  $\alpha = \beta$ , общее решение уравнения (1) представимо в замкнутом виде.

**Теорема 2.** Если  $\beta > 1$ , краевая задача (4)-(6) для уравнения (2) имеет решения только при  $0 < \alpha < 1$ . При этом существует опре-деляемый условием  $0 < y_0 < 1$  континуум сферически-симметричных решений, обращающихся в нуль вместе с двумя первыми производными в точках  $r_0$ , где  $r_0$  монотонно зависят от  $y_0$  ( $0 < r_0 < \infty$ ), и рав-ных нулю на отрезках  $r > r_0$ .

В связи с формулировкой теоремы 2 заметим, что функции  $y = 0$  и  $y = 1$  во всем интервале  $r \geq 0$ , не будучи решениями краевой за-дачи, являются решениями уравнений (1) и (2).

Для доказательства теорем 1 и 2 сведем рассматриваемую краевую задачу к другой, ей эквивалентной, положив:

$$y(r, \theta, \phi) = z^{-p}(r, \theta, \phi), \quad (1.1)$$

где

$$p = \frac{1}{\beta-1} > 0. \quad (1.2)$$

Уравнения (1) и (2) преобразуются соответственно в уравнения:

$$p \Delta z = z - z^\gamma, \quad (1.3)$$

$$p \Delta z = z^\gamma - z, \quad (1.4)$$

где

$$\gamma = \frac{\beta - \alpha}{\beta - 1}. \quad (1.5)$$

Заметим, что при получении уравнений (1.3), (1.4) было использовано условие  $z \neq \infty$  и что  $z \equiv \infty$  соответствует решению  $y = 0$  уравнений (1), (2).

Краевая задача для уравнений (1.3), (1.4) формулируется очевидным образом: найти положительные решения уравнений (1.3), (1.4), удовлетворяющие условиям:

$$z(0, \theta, \phi) = z_0 < \infty, \quad (1.6)$$

$$\nabla z(r=0, \theta, \phi) = 0, \quad (1.7)$$

$$z(\infty, \theta, \phi) = 0, \quad (1.8)$$

$z_0$  - неизвестный положительный параметр.

Проблему доказательства существования решений данной краевой задачи будем решать отдельно для каждой из трех областей изменения параметра  $\gamma: -\infty < \gamma < 1, \gamma = 1, 1 < \gamma < \beta/(\beta-1)$ , - что соответствует трем областям изменения параметра  $\alpha: \alpha > 1, \alpha = 1, 0 < \alpha < 1$ .

1.  $-\infty < \gamma < 1$ , т.е.  $\alpha > 1$ . Рассмотрим сферически-симметричные решения  $z(r)$  уравнения (1.3). Правая часть уравнения положительна при всех  $z(r) > 1$ . Поэтому, если  $z_0 > 1$ , его решение монотонно возрастает с увеличением  $r$ . Вследствие этой монотонности нетрудно определить верхнюю и нижнюю границы для величины  $z(r)$ . Действительно, при любом

$$z \left( 1 - \frac{1}{z_0^{1-\gamma}} \right) \leq p \Delta z \leq z, \quad (1.9)$$

откуда с учётом (1.6), (1.7) следует

$$z_0 \frac{\text{Sh}(r \sqrt{(1-z_0^{\gamma-1})/p})}{r \sqrt{(1-z_0^{\gamma-1})/p}} < z(r) < z_0 \frac{\text{Sh}(r/\sqrt{p})}{r/\sqrt{p}}. \quad (1.10)$$

Таким образом, при всех  $z_0 > 1$  существуют сферически-симметричные решения уравнения (1.3), удовлетворяющие краевым условиям (1.6)-(1.8). Асимптотическое поведение этих решений определяется линейным уравнением

$$p \Delta z = z \quad (1.11)$$

и имеет вид

$$z(r) \approx \text{const} \frac{1}{r} e^{r/\sqrt{p}}. \quad (1.12)$$

Соответственно, если  $0 < \gamma_0 < 1$ , краевая задача (4)-(6) для уравнения (1) имеет сферически-симметричные решения, обладающие при  $r \rightarrow \infty$  асимптотиками:

$$y(r) \approx \text{const} r^p e^{-\sqrt{p} r}. \quad (1.13)$$

По-видимому, можно рассмотреть аналогичным образом проблему существования общего решения краевой задачи для уравнения (1.3). Мы приведем здесь лишь один пример, допускающий общее решение в явном виде.

Пусть  $\gamma = 0$ , т.е.  $\alpha = \beta$ . Тогда уравнение (1.3) линейно и искомого общего решения имеет вид

$$z(r, \theta, \phi) = 1 + (z_0 - 1) \frac{\text{Sh}(r/\sqrt{p})}{r/\sqrt{p}} \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} c_{\ell m} i_{\ell}(r/\sqrt{p}) Y_{\ell m}(\theta, \phi). \quad (1.14)$$

Здесь  $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$  - известные сферические функции,  $i_{\ell}(x)$  - сферические функции Бесселя мнимого аргумента с асимптотикой  $i_{\ell}(x) \approx e^x/x$  при  $x \rightarrow \infty$ . Численные коэффициенты  $c_{\ell m}$  в формуле (1.14) являются произвольными параметрами деформации, определяющими величину отклонения функции  $z(r, \theta, \phi)$  от сферической симметрии. Единственные ограничения на параметры  $c_{\ell m}$  следуют из условий вещественности и положительности  $z(r, \theta, \phi)$ :

$$c_{l,-m} = c_{lm}^* \quad (1.15)$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l |c_{lm}| \sqrt{(2l+1)/4\pi} < z_0 - 1.$$

Если потребовать, чтобы "центр тяжести" распределения был расположен в начале координат, то следует положить, как известно,  $c_{1m} = 0$ .

На рис. 1 схематически показано поведение сферически-симметричных решений краевой задачи для уравнения (1):

$$y(r) = \left[ 1 + (y_0^{1-\beta} - 1) \frac{\text{Sh}(r\sqrt{\beta-1})}{r\sqrt{\beta-1}} \right]^{-\frac{1}{\beta-1}} \quad (1.16)$$

соответствующих значениям параметров  $a = \beta > 1$ .

Если  $0 < z_0 < 1$ , т.е.  $1 < y_0 < \infty$ , краевая задача для уравнения (1.3) и соответственно для уравнения (1) не имеет решения. Действительно, правая часть уравнения (1.3) отрицательна при  $z < 1$ . Поэтому, если  $0 < z_0 < 1$ , его решения монотонно убывают с ростом  $r$  до значения  $z(r_0) = 0$  и переходят в область отрицательных значений  $z(r) < 0$ .

Для уравнения (1.4) при любых  $z_0 > 0$  краевая задача (1.6)-(1.8) решения не имеет. Правая часть уравнения отрицательна в области  $z > 1$ , положительна при  $z < 1$ , и все его решения, осциллируя, асимптотически стремятся при увеличении  $r$  к значению  $z = 1$ . Соответственно не имеет решения задача (4)-(6) для уравнения (2).

2.  $\gamma = 1$ , т.е.  $a = 1$ . Оба уравнения (1.3) и (1.4) вырождаются в однородное линейное уравнение:

$$\Delta z = 0 \quad (1.17)$$

ни одно из решений которого не удовлетворяет сразу всем краевым условиям (1.6)-(1.8). Соответственно не имеет решений краевая задача (4)-(6) для уравнений (1) и (2).

3.  $1 < \gamma < \beta/(\beta-1)$ , т.е.  $0 < a < 1$ . Уравнение (1.3) не имеет решения краевой задачи (1.6)-(1.8) ни при каком значении  $z_0 > 0$ . Все его сферически-симметричные решения, осциллируя, стремятся при  $r \rightarrow \infty$  к величине  $z = 1$ , ибо правая часть уравнения (1.3) отрицательна при  $z > 1$  и положительна при  $z < 1$ .

Правая часть уравнения (1.4) положительна в области  $z > 1$  и отрицательна при  $z < 1$ . Поэтому, если  $0 < z_0 < 1$ , решения монотонно убывают, так что не выполняется краевое условие (1.8). При  $z_0 > 1$  решения монотонно возрастают, и при достаточно больших значениях  $r$  их поведение определяется уравнением

$$\Delta z = z^\gamma \quad (1.18)$$

Нелинейность правой части уравнения (1.18) имеет следствием обращение решений в бесконечность не асимптотически при  $r \rightarrow \infty$ , а при конечных значениях  $r = r_0$ . Величина  $r_0$  тем больше, чем меньше  $z_0$ . Легко проверить, что сферически-симметричным решением уравнения (1.18) вблизи точки  $r = r_0$  является выражение

$$z(r) = \left[ \frac{2(\gamma+1)}{(\gamma-1)^2(\beta-1)} \right] \frac{1}{\gamma-1} (r_0-r)^{-\frac{2}{\gamma-1}}, \quad r \rightarrow r_0 = 0 \quad (1.19)$$

Соответственно сферически-симметричное решение уравнения (2) при  $0 < y_0 < 1$  монотонно убывает до значения  $y(r_0) = 0$ , и его поведение около точки  $r_0$  определяется выражением

$$y(r) = \left[ \frac{(1-a)^2}{2(2\beta-1-a)} \right] \frac{1}{1-a} (r_0-r)^{\frac{2}{1-a}}, \quad r \rightarrow r_0 = 0 \quad (1.20)$$

При этом

$$y(r_0) = y'(r_0) = y''(r_0) = 0 \quad (1.21)$$

Поэтому искомым решением краевой задачи для любого  $y_0 < 1$  является при  $r \leq r_0$ , где  $r_0 = r_0(y_0)$ , решение уравнения (2) с начальными условиями (4), (5) и решение  $y(r) \equiv 0$  при  $r > r_0$ .

Таким образом, теоремы 1 и 2 доказаны.

## §2. $\beta = 1$

**Теорема 3.** Если  $\beta = 1$ , краевая задача (4)–(6) для уравнения (1) имеет решения только при  $a > 1$ . При этом существует определяемый условием  $0 < y_0 < 1$  континуум сферически-симметричных решений с асимптотиками  $0(e^{-r^2/6})$ .

**Теорема 4.** Если  $\beta = 1$ , сохраняют силу утверждения теоремы 2. Сделаем подстановку:

$$y(r, \theta, \phi) = \exp[-z(r, \theta, \phi)] \quad (2.1)$$

Тогда краевая задача для уравнений (1), (2) принимает следующий вид: найти положительные решения уравнений

$$\Delta z = 1 - \exp[-(a-1)z] \quad (2.2)$$

$$\Delta z = \exp[-(a-1)z] - 1 \quad (2.3)$$

удовлетворяющие условиям (1.6)–(1.8), где  $z_0$  – неизвестный вещественный параметр. Рассмотрим различные области изменения параметра  $a$ .

1.  $1 < a < \infty$ . Если  $z_0 > 0$ , правая часть уравнения (2.2) положительна. Сферически-симметричное решение с начальными условиями (1.6), (1.7) монотонно возрастает, так что его асимптотика определяется уравнением

$$\Delta z = 1 \quad (2.4)$$

и имеет вид

$$z(r) = \frac{1}{6} r^2, \quad r \rightarrow \infty \quad (2.5)$$

Легко видеть, что верхняя и нижняя границы для функции  $z(r)$  равны.

$$z_0 + \frac{1}{6} [1 - e^{-(a-1)z_0}] r^2 \leq z(r) \leq z_0 + \frac{1}{6} r^2 \quad (2.6)$$

Если  $z_0 < 0$ , правая часть уравнения (2.2) отрицательна и решение  $z(r)$  монотонно убывает, не удовлетворяя краевому условию (1.8).

Следовательно, уравнение (1) имеет при  $a > 1$  континуум  $0 < y_0 < 1$  сферически-симметричных решений краевой задачи с асимптотиками:

$$y(r) = \text{const} e^{-r^2/6}, \quad r \rightarrow \infty \quad (2.7)$$

По-видимому, существуют также решения, не обладающие сферической симметрией.

Уравнение (2.3) не имеет решений краевой задачи, ибо в области  $z > 0$  его правая часть отрицательна. Соответственно не имеет решений краевая задача (4)–(6) для уравнения (2).

2.  $a = 1$ . Как и в п.2 предыдущего параграфа, приходим к заключению, что краевая задача не имеет решений ни для уравнения (2.2), ни для уравнения (2.3).

3.  $0 < a < 1$ . Краевая задача для уравнения (2.2) не имеет решений, ибо в области  $z > 0$  правая часть (2.2) отрицательна.

В уравнении (2.3) при  $z > 0$  правая часть положительна. Поэтому, если  $z_0 > 0$ , решение  $z(r)$  уравнения (2.3) монотонно возрастает и обращается в бесконечность в некоторой точке  $r = r_0$ . Величина  $r_0$  тем больше, чем меньше  $z_0$ , так как начальное значение второй производной  $z''(0) = \exp[(1-a)z_0] - 1$ . Нетрудно проверить, что при  $r \rightarrow r_0$

$$z(r) = \frac{1}{1-a} \ln \frac{2}{(1-a)(r_0-r)^2}, \quad r \rightarrow r_0 - 0 \quad (2.8)$$

Соответственно имеем:

$$y(r) = \left[ \frac{1-a}{2} \right]^{\frac{1}{1-a}} (r_0 - r)^{\frac{2}{1-a}}, r \rightarrow r_0 - 0. \quad (2.9)$$

причём

$$y(r_0) = y'(r_0) = y''(r_0) = 0.$$

Этот результат аналогичен результату, изложенному в п.3 предыдущего параграфа.

Теоремы 3 и 4 доказаны.

### §3. $-\infty < \beta < 1$

Теорема 5. Если  $\beta < 1$ , краевая задача (4)-(6) для уравнения (1) при  $a > 1$  и  $\beta > 0$  имеет континуум сферически-симметричных решений, обращающихся вместе с первыми производными в нуль в точках  $r_0 > \bar{r}_0 = \pi / (1 - \beta)$  и тождественно равных нулю на отрезках  $r > r_0$ . При  $2\beta - 1 < a < 1$  существует определяемый условием  $y_0 > \bar{y}_0 > 1$ , где  $\bar{y}_0$  - некоторое граничное значение, континуум сферически-симметричных решений, обращающихся вместе с двумя первыми производными в нуль в точках  $r_0, r_1 < r_0 < \bar{r}_0$  и тождественно равных нулю на отрезках  $r > r_0$ .

Теорема 6. Если  $\beta < 1$ , краевая задача (4)-(6) для уравнения (2) имеет при  $1 < a < 5 - 4\beta$  и  $\beta > 0$  определяемый условием  $y_0 > \bar{y}_0 > 1$  континуум сферически-симметричных решений, причем, если  $y_0 = \bar{y}_0$ , асимптотика решения имеет вид  $O(r^{-1/(\alpha-\beta)} e^{-r/\sqrt{1-\beta}})$ , а при  $y_0 > \bar{y}_0$  решения обращаются вместе с первыми производными в нуль при конечных значениях  $r_0 < \infty$  и тождественно равны нулю на отрезках  $r > r_0$ . При  $\beta > 0$  и  $2\beta - 1 < a < 1$  существует определяемый условием  $0 < y_0 < 1$  континуум сферически-симметричных решений, обращающихся вместе с двумя первыми производными в нуль при конечных зна-

чениях  $r_0 < \infty$  и тождественно равных нулю при  $r > r_0$ .

Положим

$$y(r, \theta, \phi) = z^p(r, \theta, \phi). \quad (3.1)$$

Тогда, если

$$p = \frac{1}{1-\beta} > 0, \quad (3.2)$$

уравнения (1) и (2) переходят соответственно в уравнения

$$p \Delta z = z^p - z, \quad (3.3)$$

$$p \Delta z = z - z^p, \quad (3.4)$$

где

$$p = \frac{a-\beta}{1-\beta}. \quad (3.5)$$

Краевая задача для уравнений (3.3), (3.4) формулируется очевидным образом: найти положительные решения уравнения (3.3), (3.4), удовлетворяющие условиям

$$z(0, \theta, \phi) = z_0 < \infty, \quad (3.6)$$

$$\nabla z(r=0, \theta, \phi) = 0, \quad (3.7)$$

$$z(\infty, \theta, \phi) = 0, \quad (3.8)$$

$z_0$  - неизвестный положительный параметр.



Заметим, что  $z \equiv 0$ , не являясь при  $\gamma \leq 0$  решением уравнений (3.3), (3.4), соответствует согласно (3.1) решению  $y \equiv 0$  уравнений (1), (2).

Рассмотрим различные области изменения параметра  $\gamma$ , т.е.  $\alpha$ .

1.  $1 < \gamma < \infty$ , т.е.  $1 < \alpha < \infty$ . В области  $z < 1$  правая часть уравнения (3.3) отрицательна, так что все решения с  $0 < z_0 < 1$  монотонно убывают и пересекают ось  $z = 0$  в точках  $r_0 < \infty$ , причем  $z'(r_0) \neq 0$ . Нетрудно оценить для заданного значения  $z_0$  нижнюю  $r_1$  и верхнюю  $r_2$  границы величины  $r_0$  (рис. 2). Используя очевидные соотношения

$$\rho \Delta z \geq -z, \quad (3.9)$$

$$\rho \Delta z \leq -z(1 - z_0^{\gamma-1}) \quad (3.10)$$

и монотонный характер решений, находим при условиях (3.6), (3.7)

$$z_0 \frac{\sin(r/\sqrt{\rho})}{r/\sqrt{\rho}} \leq z(r) \leq z_0 \frac{\sin(r\sqrt{(1-z_0^{\gamma-1})/\rho})}{r\sqrt{(1-z_0^{\gamma-1})/\rho}} \quad (3.11)$$

Отсюда следует, что

$$\pi\sqrt{\rho} \leq r_0 \leq \pi\sqrt{\rho/(1-z_0^{\gamma-1})} \quad (3.12)$$

Вблизи точек  $r_0$  сферически-симметричное решение  $z(r)$  равно,

$$z(r) \approx \text{const}(r_0 - r), \quad r \rightarrow r_0 - 0, \quad (3.13)$$

так что  $z'(r_0) \neq 0$ . Однако  $z'(r_0) = 0$ , если  $\beta > 0$ , ибо согласно (3.1)

$$y(r) \approx \text{const}(r_0 - r)^{\frac{1}{1-\beta}}, \quad r \rightarrow r_0 - 0, \quad (3.14)$$

$$y'(r) \approx \text{const}(r_0 - r)^{\frac{\beta}{1-\beta}}, \quad r \rightarrow r_0 - 0. \quad (3.15)$$

Поэтому краевая задача (4)-(6) для уравнения (1) имеет континуум сферически-симметричных решений, являющихся в интервале  $0 \leq r \leq r_0$ , где  $r_0 \geq \bar{r}_0 = \pi/\sqrt{1-\beta}$ , решениями задачи Коши с начальными условиями (4), (5) и тождественно равных нулю при  $r > r_0$ . При  $\beta \leq 0$  краевая задача решений не имеет.

Если  $z_0 > 1$ , все решения уравнения (3.3) монотонно возрастают, так как его правая часть положительна в области  $z > 1$ . Решений краевой задачи не существует при  $z_0 > 1$ .

Краевая задача (3.6)-(3.8) для сферически-симметричных решений уравнения (3.4) рассматривалась в работах [3-8]. Поэтому сошлемся на полученные в них результаты. Нетрудно показать [5], что решений краевой задачи нет, если

$$\gamma > 5. \quad (3.16)$$

Из (3.16) и (3.5) следует тогда, что решение краевой задачи для уравнения (2) возможно только в том случае, если

$$\alpha < 5 - 4\beta. \quad (3.17)$$

При  $z \rightarrow 0$  поведение решений краевой задачи для уравнения (3.4) определяется линейным уравнением

$$\rho \Delta z = z, \quad (3.18)$$

решения которого известны. Отсюда находим с учётом (3.1), что асимптотика решений краевой задачи для уравнения (2) равна

$$y(r) = \text{const } r^{-1/(1-\beta)} e^{-r/\sqrt{1-\beta}}, r \rightarrow \infty. \quad (3.19)$$

В работе /6/ было доказано существование по крайней мере одного сферически-симметричного решения уравнения (3.4), обладающего асимптотикой  $0(r^{-1}e^{-r/\sqrt{p}})$  при  $1 < \gamma \leq 3$  и  $z_0 = \bar{z}_0 > 1$ . Величины  $\bar{z}_0$  для нескольких значений  $\gamma$  были найдены путем численных расчётов /3,4,6/. Эти величины приведены во введении.

При  $z_0 > \bar{z}_0$  решения уравнения (3.4) пересекают ось  $z = 0$  при конечных значениях  $r_0$ , причём  $z'(r_0) \neq 0$ . Однако, если  $\beta > 0$ , согласно (3.14), (3.15) имеем  $y(r_0) = y'(r_0) = 0$ . Поэтому краевая задача для уравнения (2) имеет также континуум решений при  $y_0 > \bar{y}_0 = \bar{z}_0^{-1/(1-\beta)}$ . Если  $\beta \leq 0$ , единственным решением является решение при  $y_0 = \bar{y}_0$  имеющее асимптотику (3.19).

2.  $\gamma = 1$ , т.е.  $\alpha = 1$ . Краевая задача (3.6)–(3.8) не имеет решений ни для уравнения (3.3), ни для уравнения (3.4).

3.  $-\beta/(1-\beta) < \gamma < 1$ , т.е.  $0 < \alpha < 1$ . Краевая задача (3.6)–(3.8) для уравнения (3) не имеет решений, если  $0 < z_0 < 1$ , ибо все решения, осциллируя, приближаются асимптотически к прямой  $z = 1$ .

В области  $z > 1$  правая часть уравнения (3.3) отрицательна. Поэтому все сферически-симметричные решения с  $z_0 > 1$  монотонно убывают, переходя в область  $z < 1$ , где правая часть уравнения становится положительной. Если  $z_0$  меньше некоторого критического значения  $\bar{z}_0$ , кривые  $z(r)$  возвращаются, не достигнув оси  $z = 0$ , в область  $z > 1$  и в дальнейшем, осциллируя, приближаются к прямой  $z = 1$ . При  $z_0 = \bar{z}_0$  интегральная кривая касается оси  $z = 0$  в некоторой точке  $r_0$ . Если  $z > \bar{z}_0$ , все решения пересекают ось  $z = 0$  в точках  $r_0 < \bar{r}_0$ , причём  $z'(r_0) \neq 0$  (рис. 3).

Нетрудно проверить, что решения уравнения (3.3) в окрестности точки  $r_0$  имеют при  $-1 < \gamma < 1$ , т.е.  $2\beta - 1 < \alpha < 1$ , вид

$$z(r) = A(r_0)(r_0 - r) + \frac{A(r_0)}{r_0}(r_0 - r)^2 + \frac{1}{p(1+\gamma)(2+\gamma)} A^\gamma(r_0)(r_0 - r)^{2+\gamma} + \dots, r \rightarrow r_0 \rightarrow 0. \quad (3.20)$$

$$+ \left[ \frac{(1-\gamma)^2}{2p(1+\gamma)} \right]^{1-\gamma} (r_0 - r)^{2-\gamma} + \dots, r \rightarrow r_0 \rightarrow 0.$$

Последний член в (3.20) определяет поведение  $z(r)$  в окрестности точки  $r_0$ , когда  $A(r_0) = 0$ . При  $r_0 < \bar{r}_0$   $A(r_0) > 0$ . Существует такая точка  $r_1$ , для которой  $A(r_1) = \infty$ , что соответствует значению  $z_0 = \infty$ . Поэтому для всех значений  $z_0 > \bar{z}_0$  соответствующие значения  $r_0$  лежат в интервале  $r_1 < r_0 \leq \bar{r}_0$ .

Покажем, что для всех  $\gamma < 1$  величина  $r_1 = \pi\sqrt{p}$ . В области  $z \geq 1$ , где уравнения (3.3) с начальными условиями (3.6), (3.7) монотонно убывают, справедливы, очевидно, соотношения

$$-z \leq p \Delta z \leq -z \left( 1 - \frac{1}{z_0^{1-\gamma}} \right), \quad (3.21)$$

откуда:

$$z_0 \frac{\sin [r\sqrt{(1-z_0^{\gamma-1})/p}]}{r\sqrt{(1-z_0^{\gamma-1})/p}} \geq z(r) \geq z_0 \frac{\sin (r/\sqrt{p})}{r/\sqrt{p}}. \quad (3.22)$$

Если  $z_0 \rightarrow \infty$ ,  $z(r)$  имеет конечное, в том числе нулевое, значение только при  $r = r_1 = \pi\sqrt{p}$ . При этом  $z'(r_1) = -\infty$ .

Если  $\gamma \rightarrow 1$ , то, как легко видеть из (3.22), интегральные кривые  $z(r)$  пересекают прямую  $z = 1$  на всем интервале  $r > r_1 = \pi\sqrt{p}$ . Поэтому можно ожидать, что при  $\gamma \rightarrow 1$  соответствующее значение  $\bar{r}_0 \rightarrow \infty$ . Если  $\gamma \rightarrow -1$ , то из (3.20) следует:  $z''(\bar{r}_0) \rightarrow \infty$ , т.е.  $\bar{r}_0 \rightarrow r_1 = \pi\sqrt{p}$ . При  $\gamma < -1$  ни одно решение  $z(r)$  уравнения (3.3) не достигнет

оси  $z = 0$ , так что краевая задача (4)-(6) для уравнения (1) не имеет решений, если  $a < 2\beta - 1$ .

Проиллюстрируем все вышесказанное на решаемом в явном виде примере  $\gamma = 0$ , т.е.  $a = \beta$ . Уравнение

$$\rho \Delta z = 1 - z \quad (3.23)$$

с начальными условиями (3.6), (3.7) имеет сферически-симметричное решение:

$$z(r) = 1 + (z_0 - 1) \frac{\sin(r/\sqrt{\rho})}{r/\sqrt{\rho}} \quad (3.24)$$

Условие  $z(r_0) = 0$  определяет зависимость величины  $r_0$  от  $z_0$ :

$$z_0 = 1 - \frac{r_0/\sqrt{\rho}}{\sin(r_0/\sqrt{\rho})} \quad (3.25)$$

Из условий  $z'(r_0) = z(r_0) = 0$  следует, что  $r_0$  является первым ненулевым корнем уравнения  $(x_0 = r_0/\sqrt{\rho})$

$$x = \operatorname{tg} x \quad (3.26)$$

Это дает

$$x_0 = r_0/\sqrt{\rho} = 4,493; \quad z_0 = 5,603 \quad (3.27)$$

Из (3.24) находим также, что условиям  $z(r_1) = 0, z'(r_1) = -\infty$  соответствуют значения  $r_1 = \pi\sqrt{\rho}, z_0 = \infty$ . На рис. 3 показан ряд интегральных кривых  $z(r)$  уравнения (3.3), соответствующих рассмотренному случаю  $\gamma = 0, \rho = 1$ .

Если  $\beta > 0$ , все решения  $z(r)$  с  $z_0 > \bar{z}_0$  дают искомые решения  $y(r)$  краевой задачи (4)-(6) для уравнения (1) с

$$y_0 > \bar{y}_0 = \bar{z}_0^{1/(1-\beta)}, \quad \text{так как}$$

$$y(r) = z^{\frac{1}{1-\beta}}(r) = A_0^{\frac{1}{1-\beta}}(r_0)(r_0 - r)^{\frac{1}{1-\beta}}, \quad r \rightarrow r_0 - 0, \quad (3.28)$$

$$y'(r) = \frac{1}{1-\beta} A_0^{\frac{1}{1-\beta}}(r_0)(r_0 - r)^{\frac{\beta}{1-\beta}} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow r_0 - 0 \quad (3.29)$$

Если  $\beta \leq 0, y'(r_0) \neq 0$  и краевая задача решения не имеет. Теорема 5 доказана.

Для уравнения (3.4) краевая задача (3.6)-(3.8) не имеет решений, если  $z_0 > 1$ . Действительно, правая часть уравнения положительна в области  $z > 1$ , и при  $z_0 > 1$  все решения монотонно возрастают с увеличением  $r$ .

При  $0 < z_0 < 1$  все сферически-симметричные решения уравнения (3.4) монотонно убывают и пересекают ось  $z = 0$  в точках  $r = r_0$ , причём  $z'(r_0) = 0$ . Поведение решений в окрестности точки  $r_0$  определяется при  $\gamma > -1$ , т.е. при  $a > 2\beta - 1$ , выражением  $(r \rightarrow r_0 - 0)$

$$z(r) = B(r_0)(r_0 - r) + \frac{1}{r_0} B(r_0)(r_0 - r)^2 - \frac{1}{\rho(1+\gamma)(2+\gamma)} B^\gamma(r_0)(r_0 - r)^{2+\gamma}, \quad (3.30)$$

которое отличается от (3.20) знаком перед третьим членом и отсутствием члена, не зависящего от  $B(r_0)$ . Соответственно  $B(r_0) > 0$  всегда.

Если  $\gamma = -1$ , поведение решения около точки  $r_0$  дается выражением

$$z(r) = \sqrt{2} (r_0 - r) \ln \frac{1}{r_0 - r}, \quad r \rightarrow r_0 - 0 \quad (3.31)$$

Если  $\gamma < -1$ ,

$$z(r) = \left[ -\frac{2(1+\gamma)}{(1-\gamma)^2} \right]^{\frac{1}{1-\gamma}} (r_0 - r)^{\frac{2}{1-\gamma}}, \quad r \rightarrow r_0 - 0, \quad (3.32)$$

так что при  $\gamma < -1$   $z'(r_0) = -\infty$  для всех  $r_0$ .

Справедливость выражений (3.30)-(3.32) легко проверяется прямой подстановкой в (3.4).

При всех значениях  $\gamma < 1$  и  $\beta > 1/2$  краевая задача (4)-(6) для уравнения (2) имеет сферически-симметричные решения  $y(r)$ , совпадающие на отрезках  $0 \leq r \leq r_0$  с решением задачи Коши с начальными условиями (4), (5) при  $y_0 < 1$  и равные решению  $y(r) \equiv 0$  в интервалах  $r > r_0$ . Действительно, даже если  $\gamma < -1$ , т.е.  $0 < \alpha < 2\beta - 1$ , когда  $z(r)$  в окрестности точки  $r_0$  имеет вид (3.32), для функции  $y(r)$  находим с учётом (3.1), (3.5):

$$y(r) = z^{\frac{1}{1-\beta}}(r) = \left[ \frac{2(2\beta-1-\alpha)(1-\beta)}{(1-\alpha)^2} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} (r_0 - r)^{\frac{2}{1-\alpha}}, \quad r \rightarrow r_0 - 0, \quad (3.33)$$

так что  $y'(r_0) = y''(r_0) = 0$ .

Если  $\beta > 0$ , решения краевой задачи (4)-(6) для уравнения (2) существуют при  $\gamma \geq -1$ , т.е.  $\alpha \geq 2\beta - 1$ , когда  $y'(r_0) = 0$ . Если  $\beta \leq 0$ , решений краевой задачи нет. Теорема 6 доказана.

В качестве решаемого в явном виде примера рассмотрим случай  $y = 0$ , т.е.  $\alpha = \beta$ . Решение уравнения (3.4) тогда равно

$$z(r) = 1 - (1 - z_0) \frac{\text{Sh}(r/\sqrt{p})}{r/\sqrt{p}}. \quad (3.34)$$

Из условия  $z(r_0) = 0$  находим связь величин  $z_0$  и  $r_0$ :

$$z_0 = 1 - \frac{r_0/\sqrt{p}}{\text{Sh}(r_0/\sqrt{p})}. \quad (3.35)$$

Таким образом,  $r_0$  монотонно увеличивается от нуля до бесконечности при изменении  $z_0$  в интервале  $0 \leq z_0 \leq 1$ .

### З а к л ю ч е н и е

Основным физическим результатом работы является установление того факта, что включение в уравнения (1), (2) члена  $\beta(\nabla y)^2/y$  учитывающего поверхностные эффекты, кардинальным образом расширяет область существования решений краевой задачи в статистической теории ядра и в нелинейной теории поля.

Это связано, во-первых, с тем, что наличие данного члена в уравнении (1) приводит при  $\beta \geq 1, \alpha > 1$  к существованию непрерывного спектра спадающих при  $r \rightarrow \infty$  экспоненциальным образом решений, невозможных при  $\beta = 0$ .

Во-вторых, целый ряд решений уравнений (1) и (2), для которых при заданном  $y_0$   $y(r_0) = 0, y'(r_0) \neq 0$ , если  $\beta = 0$ , удовлетворяет при  $\beta > 0$  условиям  $y(r_0) = y'(r_0) = 0$ , т.е. представляет непрерывные и дифференцируемые решения краевой задачи. Правые части уравнений (1) и (2) при  $y = 0$  не удовлетворяют условию Липшица, так что значения  $y(r_0) = y'(r_0) = 0$  соответствуют не только тривиальному решению  $y(r) \equiv 0$ . Можно надеяться, что уравнения (1) и (2) найдут широкое применение при описании самосогласованного ядерного потенциала, частицеподобных решений нелинейной теории поля и в ряде других задач.

В заключение заметим, что аналогичные доказанным выше теоремы могут быть подобным же образом получены для уравнений вида (1) и (2), в которых знаки при членах  $y$  и  $y^{\alpha}$  противоположны.

Автор благодарен Е.П.Жидкову за полезное обсуждение результатов работы и ценные замечания.

Л и т е р а т у р а

1. V.V.Babikov. A peculiar Thomas-Fermi equation for nucleus, Contr. Intern. Symp. Nucl. Structure, Dubna, 1968, p. 157.
2. В.В.Бабиков. Уравнение для самосогласованного ядерного потенциала. Препринт ОИЯИ, Р4-4249, Дубна, 1969.
3. В.Б.Гласко, Ф.Лерюст, Я.П.Терлецкий, С.Ф.Шушурин. Исследование частицеподобных решений нелинейного уравнения скалярного поля. ЖЭТФ, 35, №2 (8), 452-457 (1958).
4. I.L.Synge. On a certain non-linear differential equation. Proc. Royal Irish. Acad. A62, No. 3, 17-41 (1961).
5. Z.Nehari. On a non-linear differential equation arising in nuclear physics. Proc. Royal Irish. Acad. A62, No. 9, 118-135 (1963).
6. Е.П.Жидков, В.П.Шириков. Об одной краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. "Журнал вычислительной математики и математической физики", 4, № 5, 804-816 (1964).

Рукопись поступила в издательский отдел  
4 января 1969 года.

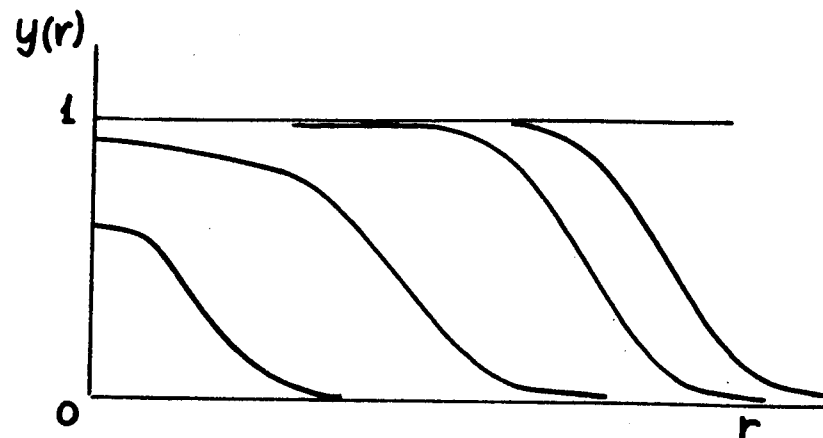


Рис.1

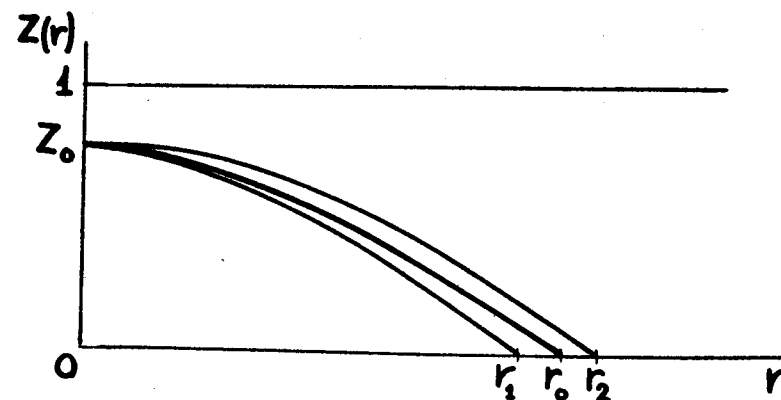


Рис.2

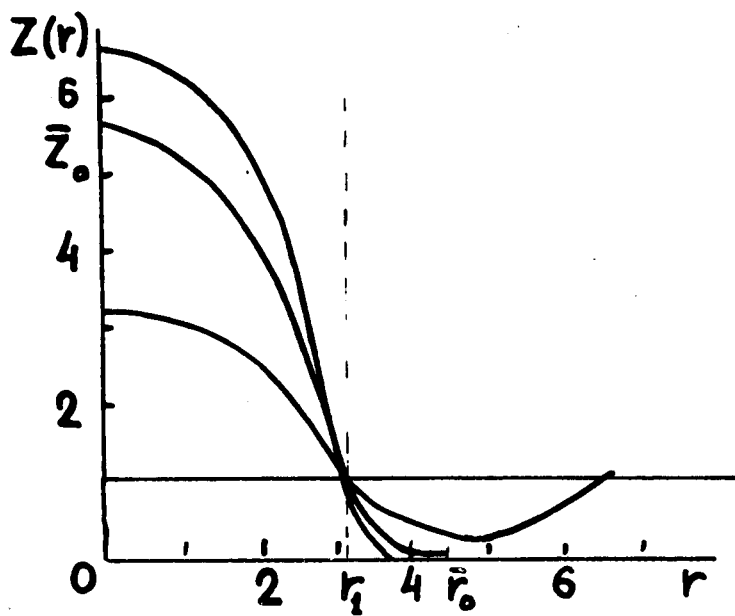


Рис.3