ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р4 - 4108

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

С.Г.Рогозински

О МИКРОСКОПИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ РОТАЦИОННЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ ЯДЕР

1968

P4 - 4108

С.Г.Рогозински*

О МИКРОСКОПИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ РОТАЦИОННЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ ЯДЕР

Направлено в „Acta Phys. Pol."

* Постоянный адрес: Институт теоретической физики Варшавского университета .

I. В в е д е н и е

В последнее время делаются попытки /1,2,3/ получить единую микроскопическую теорию вибрационных возбуждений в сферических ядрах и ротационных возбуждений в ядрах деформированных. Основой для этого является факт, что экспериментальные данные, кажется, показывают /4/, что ротационные возбуждения в деформированных ядрах переходят плавно в вибрационные возбуждения сферических ядер. Поэтому эти попытки, вообще говоря, состоят в том, что делаются улучшения приближения случайной фазы в коммутационных соотношениях для двухквазичастичных или двухчастичных операторов. Предполагается, что учет ангармонизма позволит получить ротационные возбуждения и перейти тем самым от сферических к деформированным ядрам. Конечно, полученные такими методами уравнения движения для двухчастичных недиагональных амплитуд содержат теперь диагональные амплитуды, в частности, квадрупольный момент /2/. Представляет трудности потом извлечь эти диагональные амплитуды из коммутационных соотношений и уравнений движения. В связи с этим возникает вопрос, возможно ли отделить проблему четно-четных ядер от проблемы нечетных ядер. Если ответ отрицательный, то это означает, что надо рассматривать уравнения движения для одночастичных амплитуд. Подобный подход к теории структуры ядра исследовался уже главным образом Клейном и сотрудниками /5,6/.

Настоящая работа посвящена решению уравнений движения для одночастичных амплитуд в случае парных и квадруполь-квадрупольных остаточных взаимодействий. Для простоты мы ограничимся случаем частиц одного сорта, находящихся на одной j -оболочке, но эти ограничения не являются принципиальными в наших рассуждениях. Поскольку мы используем теорию возмущений, наше решение применимо только в случае сильнодеформированных ядер, т.е. мы исследуем теорию только ротационных возбуждений. Мы следуем за работой /5/, в которой построена общая микроскопическая теория момента инерции, но мы не предполагаем сначала, что возбуждения меняются с моментом количества движения по закону $I(I+1)$, так как хотим разработать метод, который позволил бы искать зависимость энергии от момента.

В главе II мы определяем одночастичные амплитуды и строим для них уравнения. Исследуем только одну ротационную полосу в четном ядре и предполагаем, что нет взаимодействия с другими полосами.

Главы III и IV посвящены решению полученных уравнений. Нулевым приближением является приближение Хартри-Фока-Боголюбова, на основе которого мы используем теорию возмущений. В ее втором порядке строим и решаем уравнения для возбуждений, энергетической щели и элементов квадрупольного момента четного ядра. Оказывается, что точным решением этих уравнений является ротационный спектр с моментом инерции Инглиса. Это не относится к нечетным ядрам, где, кроме поправок к моменту инерции, выступающих в кренкинг-модели, возникают поправки, вытекающие из самосогласования.

II. Постановка задачи

Рассматриваем систему нуклонов одного сорта, обладающих тем же самым моментом количества движения[x)] j. Предполагаем остаточные взаимодействия в виде парных и квадуполь-квадрупольных сил. В таком случае гамильтониан принимает вид

$$H = \epsilon \sum_m a^+_m a_m - \frac{1}{4} G \Delta^+_{00} \Delta_{00} - \frac{1}{2} \chi \sum_M Q^+_{2M} Q_{2M} , \tag{1}$$

где a^+_m, a_m – операторы рождения и уничтожения нуклона с проекцией момента m, а

x) Считаем момент j большим.

$$\Delta^+_{00} = \sum_m (-1)^{j-m} a^+_m a^+_{-m} , \tag{2}$$

$$Q_{2M} = q \sum_{m_1, m_2} (j j m_1 - m_2 | 2M)(-1)^{j-m_2} a^+_{m_1} a_{m_2} , \tag{3}$$

причем

$$q = \sqrt{\frac{2j+1}{5}} < || r^2 Y_2 || j > \tag{4}$$

является одночастичным приведенным матричным элементом квадрупольного момента.

Из коммутационных соотношений для операторов рождения и уничтожения вытекают следующие уравнения движения:

$$\begin{aligned} [H, a^+_m] = & (\epsilon - G - \frac{1}{2} \chi q^2 \frac{5}{2j+1}) a^+_m + \\ & + \frac{1}{2} G (-1)^{j+m} a_{-m} \Delta^+_{00} - \\ & - \chi q \sqrt{\frac{5}{2j+1}} \sum_{M', m'} (j 2 m' M' | j m) a^+_{m'} Q_{2M'} , \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} [H, (-1)^{j+m} a_{-m}] = & - (\epsilon + \frac{1}{2} \chi q^2 \frac{5}{2j+1}) (-1)^{j+m} a_{-m}{}^+ \\ & + \frac{1}{2} G a^+_m \Delta_{00} + \\ & + \chi q \sqrt{\frac{5}{2j+1}} \sum_{M', m'} (j 2 m' M' | j m) (-1)^{j+m'} a_{-m'} Q_{2M'} . \end{aligned} \tag{6}$$

Пусть $| N n I M >$ будет состоянием четного ядра с большим числом нуклонов N, моментом I, проекцией момента M, совокупностью других квантовых чисел n и энергией $E(N, n, M)$, а $|N-1 \nu J \mu>$ – состоянием соседнего ядра с энергией $E_{N-1 \nu J}$. Введем следующие приведенные матричные элементы:

$$\langle N-1\,\nu J\mu\,|\,a_m^+\,|\,N-2\,nIM\rangle = (IjMm\,|\,J\mu)\,u_{\nu J}(N-2,nI), \tag{7}$$

$$\langle N-1\,\nu J\mu\,|\,(-1)^{j+m}a_{-m}\,|\,N\,nIM\rangle = (IjMm\,|\,J\mu)\,v_{\nu J}(N,n,I), \tag{8}$$

$$\langle Nn'I'M'\,|\,\Delta_{00}^+\,|\,N-2\,nIM\rangle = \delta_{II'}\,\delta_{MM'}\,\Delta(N,n,n',I), \tag{9}$$

$$\langle Nn'I'M'\,|\,Q_{2M''}\,|\,NnIM\rangle = \frac{(I2MM''|I'M')}{\sqrt{2I'+1}}\,Q(N,n,n',I,I'). \tag{10}$$

В дальнейшем мы будем считать все эти матричные элементы, а также энергии возбуждения состояний плавными функциями числа частиц, т.е. будем пренебрегать различием матричных элементов или энергией возбуждений для двух соседних четных ядер. Поэтому будем пренебрегать всюду и зависимостью от N. Нас будет интересовать только одна ротационная полоса четного ядра с каким-то определенным n (смысл этого n мы уточним позже), и мы предположим, что нет взаимодействия между этой и другими полосами, т.е.

$$\Delta(n,n',I) = \delta_{nn'}\,\Delta(n,I),$$
$$Q(n,n',I,I') = \delta_{nn'}\,Q(n,I,I'); \tag{11}$$

зависимость от n в дальнейшем также не будем принимать в расчет.

При вышеуказанных предположениях уравнения движения (5) и (6) для матричных элементов (7) и (8) принимают вид:

$$[E_{\nu J} - \omega(I) - \epsilon]\,u_{\nu J}(I) = \frac{1}{2}G\,\Delta(I)\,v_{\nu J}(I) - \chi q\sqrt{5}\sum_{I'}(-1)^{J-j}\,W(jjII';2J)\,u_{\nu J}(I')\,Q(I,I'), \tag{12}$$

$$[\mathcal{E}_{\nu J} - \omega(I) + \epsilon]\,v_{\nu J}(I) = \frac{1}{2}G\,\Delta(I)\,u_{\nu J}(I) + \chi q\sqrt{5}\sum_{I'}(-1)^{J-j}\,W(jjII';2J)\,v_{\nu J}(I')\,Q(I,I'), \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\nu J} &= E_{N-1\,\nu J} + \frac{1}{2}G + \frac{1}{2}\chi q^2\frac{5}{2j+1} - \Lambda,\\
\epsilon &= \mathcal{G} - \frac{1}{2}G - \lambda,\\
\omega(I) &= E(N,n,I) - E(N,n,0),\\
\lambda &= \frac{1}{2}[E(N,n,0) - E(N-2,n,0)],\\
\Lambda &= \frac{1}{2}[E(N,n,0) + E(N-2,n,0)].
\end{aligned} \tag{14}$$

Энергетическая щель $\Delta(I)$ и квадрупольные матричные элементы $Q(I,I')$ выражаются через одночастичные амплитуды $u_{\nu J}(I)$ и $v_{\nu J}(I)$ следующим образом:

$$\Delta(I) = \frac{1}{2I+1}\sum_{\nu J}(2J+1)\,u_{\nu J}(I)\,v_{\nu J}(I), \tag{15}$$

$$Q(I,I') = q\sqrt{5}\sum_{\nu J}(-1)^{J-j}(2J+1)\,W(jjII';2J)\,v_{\nu J}(I)\,v_{\nu J}(I'), \tag{16}$$

а возбуждение состояния с моментом I четного ядра связано, в свою очередь, с выражениями (15) и (16) следующим образом:

$$\omega(I) = \frac{1}{4}G\{[\Delta(0)]^2 - [\Delta(I)]^2\} + \frac{1}{2}\frac{\chi}{2I+1}\sum_{I'}\{[Q(0,I')]^2 - [Q(I,I')]^2\}. \tag{17}$$

Некоторые добавочные условия для одночастичных амплитуд вытекают из коммутационных соотношений между операторами рождения и уничтожения, а именно условие "полноты"

$$\sum_{\nu J}(2J+1)\{[v_{\nu J}(I)]^2+[u_{\nu J}(I)]^2\} = (2j+1)(2I+1),$$

$$\sum_{\nu J}(-1)^{J-j}(2J+1)W(jjII';LJ)[v_{\nu J}(I)v_{\nu J}(I')+ u_{\nu J}(I)u_{\nu J}(I')]=0 \quad \text{для} \quad L\neq 0 \tag{18}$$

и условие "ортогональности"

$$\sum_I[u_{\nu J}(I)u_{\nu' J}(I)+v_{\nu J}(I)v_{\nu' J}(I)]=\delta_{\nu\nu'},$$

$$\sum_I(-1)^I\,W(jjJJ';LI)[u_{\nu J}(I)u_{\nu' J'}(I)+ (-1)^L v_{\nu J}(I)v_{\nu' J'}(I)]=0 \quad \text{для} \quad L\neq 0. \tag{19}$$

Наконец, чтобы наше ядро обладало определенным числом частиц, мы требуем:

$$N=\frac{1}{2I+1}\sum_{\nu J}(2J+1)[v_{\nu J}(I)]^2. \tag{20}$$

Теперь уравнения (12) и (13) с добавочными определениями (14)-(17) и условиями (18)-(20) представляют собой систему уравнений, решение которой является решением нашей задачи.

III. Нулевое приближение

Будем изучать только ротационную полосу основного состояния четного ядра, т.е. полосу, характеризуемую проекцией момента количества движения вдоль оси симметрии ядра $K=0$ (при этом выбираем $n=K=0$). В таком случае удобно ввести внутреннюю систему координат, повернутую

относительно лабораторной системы так, что оператор ротации имеет следующий вид (ср. /5/):

$$U=e^{-i\hat J_z\phi}\,e^{-i\hat J_y\theta}, \tag{21}$$

где ϕ, θ - азимутальный и полярный углы лабораторной системы. Тогда приведенные одночастичные амплитуды (7) и (8) выражаются через "внутренние" одночастичные амплитуды следующим образом:

$$u_{\nu J}(I)=\sum_{\kappa',I'}(Ij0\kappa'|J\kappa')\frac{\sqrt{(2I+1)(2I'+1)}}{2J+1}\langle\nu J\kappa'|a^+_{\kappa'}|I'K'=0\rangle, \tag{22}$$

$$v_{\nu J}(I)=\sum_{\kappa',I'}(Ij0\kappa'|J\kappa')\frac{\sqrt{(2I+1)(2I'+1)}}{2J+1}\langle\nu J\kappa'|(-1)^{j+\kappa'}a_{-\kappa'}|I'K'=0\rangle, \tag{23}$$

причем благодаря инвариантности относительно обращения времени суммирование выполняется только по четным I'.

Теперь найдем приближенное решение нашей задачи, которое будем считать нулевым приближением. Основанием этого приближения являются следующие предположения.

1) Модуль проекции момента количества движения нечетного ядра вдоль оси внутренней системы координат $|\kappa|$ является хорошим квантовым числом. Поэтому выбираем x) $\nu=|\kappa|$.

2) "Внутреннее" состояние нечетного ядра не зависит от момента J (кроме нормализационного коэффициента $\sqrt{2J+1}$).

3) Возбуждения состояний четного ядра $\omega(I)$ малы в сравнении с $\mathcal{E}_{\kappa J}$, так что можно положить в уравнениях (12) и (13) $\omega(I)=0$.

Предполагая вышеуказанное, ищем решения в следующем виде:

$$u^{(0)}_{\kappa J}(I)=\sqrt{2}\,P(I)(Ij0\kappa|J\kappa)\sqrt{\frac{2I+1}{2J+1}}\,u_\kappa, \tag{24}$$

---

x) В дальнейшем мы будем пропускать знак абсолютной величины, помня, что κ положительно.

$$v^{(0)}_{\kappa J}(I) = \sqrt{2}\, P(I)(Ij\; 0\kappa \mid J\kappa)\sqrt{\frac{2I+1}{2J+1}}\, v_\kappa , \qquad (25)$$

где

$$P(I) = \frac{1}{2}\left(1+(-1)^{I}\right). \qquad (26)$$

Из условий полноты (18) вытекает тогда

$$u^2_\kappa + v^2_\kappa = 1, \qquad (27)$$

а условия ортогональности (19) принимают вид

$$\sum_I v^{(0)}_{\kappa J}(I)\, v^{(0)}_{\kappa' J}(I) = v^2_\kappa\, \delta_{\kappa\kappa'} ,$$

$$\sum_I u^{(0)}_{\kappa J}(I)\, u^{(0)}_{\kappa' J}(I) = u^2_\kappa\, \delta_{\kappa\kappa'} , \qquad (28)$$

$$\sum_I v^{(0)}_{\kappa J}(I)\, u^{(0)}_{\kappa' J}(I) = u_\kappa v_\kappa\, \delta_{\kappa\kappa'} .$$

В этом приближении число частиц:

$$N = 2\sum_{\kappa>0} v^2_\kappa , \qquad (29)$$

энергетическая щель

$$\Delta^{(0)}(I) = \Delta \equiv 2\sum_{\kappa>0} u_\kappa v_\kappa , \qquad (20)$$

а элементы квадрупольного момента

$$Q^{(0)}(I,I') = P(I)\,P(I')\sqrt{\frac{(2I+1)(2I'+1)}{5}}\,(II'00\mid 20)\, Q^{(0)}_{\text{вн}}(I,I'), \qquad (31)$$

где элементы "внутреннего" квадрупольного момента $Q(I,I')$ равняются:

$$Q^{(0)}_{\text{вн}}(I,I') = Q \equiv 2\sum_{\kappa>0} q_{\kappa\kappa}\, v^2_\kappa , \qquad (32)$$

$$q_{\kappa_1\kappa_2} = (-1)^{j-\kappa_2}\, q\,(jj\kappa_1 - \kappa_2 \mid 20). \qquad (33)$$

Из уравнений (12) и (13) получаем следующее уравнение для u_κ и v_κ:

$$(\mathcal{E}_\kappa - \epsilon_\kappa)\, u_\kappa = \frac{1}{2} G\Delta v_\kappa , \qquad (34)$$

$$(\mathcal{E}_\kappa + \epsilon_\kappa)\, v_\kappa = \frac{1}{2} G\Delta u_\kappa , \qquad (35)$$

где

$$\epsilon_\kappa = \epsilon - \chi Q q_{\kappa\kappa} \qquad (36)$$

являются одночастичными энергиями в деформированном самосогласованном поле, а

$$\mathcal{E}^{(0)}_{\kappa J} \equiv \mathcal{E}_\kappa \qquad (37)$$

не зависят от J в этом случае.

Видно, что в качестве нулевого приближения мы получили версию хорошо известной теории ядерной формы (см.,например, /7/). Мы не будем обсуждать решения этой теории и в дальнейшем будем предполагать, что величины u_κ, v_κ, $\mathcal{E}_\kappa$ известны.

Заметим, что, вычисляя $\omega(I)$ из формулы (17), мы действительно получаем нуль в этом приближении.

IV. Решение задачи в случае сильнодеформированного ядра

Теперь, используя теорию возмущений, попытаемся улучшать приближение, обсуждаемое в предыдущей главе. Величину $\omega(I)$ будем считать "потенциалом возмущения" и будем действовать следующим образом: вначале разлагать решения уравнений (12) и (13) по степеням матричных элементов "потенциала" $\omega(I)$

$$u_{\kappa J}(I) = u^{(0)}_{\kappa J}(I) + u^{(1)}_{\kappa J}(I) + u^{(2)}_{\kappa J}(I) + \ldots,$$
$$v_{\kappa J}(I) = v^{(0)}_{\kappa J}(I) + v^{(1)}_{\kappa J}(I) + v^{(2)}_{\kappa J}(I) + \ldots, \tag{38}$$
$$\mathcal{E}_{\kappa J} = \mathcal{E}^{(0)}_{\kappa J} + \mathcal{E}^{(1)}_{\kappa J} + \mathcal{E}^{(2)}_{\kappa J} + \ldots,$$

а потом из уравнения (17) получать уравнение для этого потенциала.

1. Первый порядок теории возмущений. Поправки первого порядка к одночастичным амплитудам ищем в виде

$$u^{(1)}_{\kappa J}(I) = \sum_{\kappa'} a^{J}_{\kappa\kappa'} u^{(0)}_{\kappa' J}(I) + \sum_{\kappa'} b^{J}_{\kappa\kappa'} v^{(0)}_{\kappa' J}(I), \tag{39}$$

$$v^{(1)}_{\kappa J}(I) = \sum_{\kappa'} a^{J}_{\kappa\kappa'} v^{(0)}_{\kappa' J}(I) - \sum_{\kappa'} b^{J}_{\kappa\kappa'} u^{(0)}_{\kappa' J}(I). \tag{40}$$

Предполагая, что поправки первого порядка к энергетической щели $\Delta^{(1)}(I)$ и квадрупольному моменту $Q^{(1)}(I,I')$ равны нулю, из уравнений (12) и (13) получаем

$$(\mathcal{E}_{\kappa} - \mathcal{E}_{\kappa'}) a^{J}_{\kappa\kappa'} + \mathcal{E}^{(1)}_{\kappa J}\,\delta_{\kappa\kappa'} - \xi^{(+)}_{\kappa\kappa'}\,\Omega^{J}_{\kappa\kappa'} = 0, \tag{41}$$

$$(\mathcal{E}_{\kappa} + \mathcal{E}_{\kappa'}) b^{J}_{\kappa\kappa'} - \eta^{(-)}_{\kappa\kappa'}\,\Omega^{J}_{\kappa\kappa'} = 0, \tag{42}$$

где $$\Omega^{J}_{\kappa\kappa'} = 2\sum_{I} P(I)(Ij0\kappa|J\kappa)(Ij0\kappa'|J\kappa') \times \frac{2I+1}{2J+1}\,\omega(I), \tag{43}$$

$$\xi^{(\pm)}_{\kappa\kappa'} = u_{\kappa} u_{\kappa'} \pm v_{\kappa} v_{\kappa'},$$
$$\eta^{(\pm)}_{\kappa\kappa'} = u_{\kappa} v_{\kappa'} \pm v_{\kappa} u_{\kappa'}. \tag{44}$$

Условие нормировки (19) дает

$$a^{J}_{\kappa\kappa} = 0. \tag{45}$$

Из уравнений (41), (42) и (45) вытекает, что коэффициенты $a^{J}_{\kappa\kappa'}$ и $b^{J}_{\kappa\kappa'}$ антисимметричны относительно перестановок индексов κ, κ'. Зато, как это вытекает из формул (15) (16) и (18), поправки первого порядка к энергетической щели и элементам квадрупольного момента выражаются только через симметричные комбинации $a^{J}_{\kappa\kappa'}$ и $b^{J}_{\kappa\kappa'}$. Поэтому $\Delta^{(1)}(I)$ и $Q^{(1)}(I,I')$ действительно равняются нулю. Из формулы (17) сразу видно, что $\omega(I)$ тоже равно нулю. Затем нам нужно искать поправки второго порядка.

2. Второй порядок теории возмущений. Опять ищем поправки второго порядка в виде

$$u^{(2)}_{\kappa J}(I) = \sum_{\kappa'} A^{J}_{\kappa\kappa'} u^{(0)}_{\kappa' J}(I) + \sum_{\kappa'} B^{J}_{\kappa\kappa'} v^{(0)}_{\kappa' J}(I), \tag{46}$$

$$v^{(2)}_{\kappa J}(I) = \sum_{\kappa'} A^{J}_{\kappa\kappa'} v^{(0)}_{\kappa' J}(I) - \sum_{\kappa'} B^{J}_{\kappa\kappa'} u^{(0)}_{\kappa' J}(I). \tag{47}$$

Поправки первого и второго порядков к одночастичным амплитудам вызывают следующие поправки второго порядка к энергетической щели и элементам квадрупольного момента:

$$\Delta^{2}(I) = P(I) \sum_{\kappa_1,\kappa_2,J} (Ij0\kappa_1 | J\kappa_1)(Ij0\kappa_2 | J\kappa_2) D^{J}_{\kappa_1\kappa_2} \quad (48)$$

Здесь

$$D^{J}_{\kappa_1\kappa_2} = \eta^{(+)}_{\kappa_1\kappa_2} (A^{J}_{\kappa_1\kappa_2} + A^{J}_{\kappa_2\kappa_1}) - \xi^{(-)}_{\kappa_1\kappa_2} (B^{J}_{\kappa_1\kappa_2} + B^{J}_{\kappa_2\kappa_1}) + \sum_{\kappa}[\eta^{(+)}_{\kappa_1\kappa_2} (a^{J}_{\kappa\kappa_1} a^{J}_{\kappa\kappa_2} - b^{J}_{\kappa\kappa_1} b^{J}_{\kappa\kappa_2}) - \xi^{(-)}_{\kappa_1\kappa_2} (a^{J}_{\kappa\kappa_1} b^{J}_{\kappa\kappa_2} + a^{J}_{\kappa\kappa_2} b^{J}_{\kappa\kappa_1})] \quad (49)$$

и

$$Q^{(2)}(I, I') = P(I)P(I') \sqrt{5(2I+1)(2I'+1)}\, q \times \sum_{\kappa_1,\kappa_2,J} (-1)^{J-j} W(jjII';2J)(Ij0\kappa_1 | J\kappa_1)(Ij0\kappa_2 | J\kappa_2) K^{J}_{\kappa_1\kappa_2} \quad (50)$$

где

$$K^{J}_{\kappa_1\kappa_2} = -\{\xi^{(-)}_{\kappa_1\kappa_2}(A^{J}_{\kappa_1\kappa_2} + A^{J}_{\kappa_2\kappa_1}) + \eta^{(+)}_{\kappa_1\kappa_2} (B^{J}_{\kappa_1\kappa_2} + B^{J}_{\kappa_2\kappa_1}) + \sum_{\kappa} [\xi^{(-)}_{\kappa_1\kappa_2} (a^{J}_{\kappa\kappa_1} a^{J}_{\kappa\kappa_2} - b^{J}_{\kappa\kappa_1} b^{J}_{\kappa\kappa_2}) + \eta^{(+)}_{\kappa_1\kappa_2}(a^{J}_{\kappa\kappa_1} b^{J}_{\kappa\kappa_2} + a^{J}_{\kappa\kappa_2} b^{J}_{\kappa\kappa_1})]\}. \quad (51)$$

Для получения последней формулы мы используем условия полноты (18).

Уравнения движения (12) и (13) для коэффициентов $A^{J}_{\kappa_1\kappa_2}$, $B^{J}_{\kappa_1\kappa_2}$ принимают вид

$$(\mathcal{E}_{\kappa_1} - \mathcal{E}_{\kappa_2}) A^{J}_{\kappa_1\kappa_2} + \mathcal{E}^{(2)}_{\kappa_1 J} \delta_{\kappa_1\kappa_2} + a^{J}_{\kappa_1\kappa_2} \Omega^{J}_{\kappa_1\kappa_1} + \sum_{\kappa} [\xi^{(+)}_{\kappa\kappa_2} a^{J}_{\kappa\kappa_1} \Omega^{J}_{\kappa\kappa_2} - \eta^{(-)}_{\kappa\kappa_2} b^{J}_{\kappa\kappa_1} \Omega^{J}_{\kappa\kappa_2}] = + \frac{1}{2} G \eta^{(+)}_{\kappa_1\kappa_2} \Delta^{J}_{\kappa_1\kappa_2} - \chi q \sqrt{5}\, \xi^{(-)}_{\kappa_1\kappa_2} Q^{J}_{\kappa_1\kappa_2}, \quad (52)$$

$$(\mathcal{E}_{\kappa_1} + \mathcal{E}_{\kappa_2}) B^{J}_{\kappa_1\kappa_2} + b^{J}_{\kappa_1\kappa_2} \Omega^{J}_{\kappa_1\kappa_2} + \sum_{\kappa} [\eta^{(-)}_{\kappa\kappa_2} a^{J}_{\kappa\kappa_1} + \xi^{(+)}_{\kappa\kappa_2} b^{J}_{\kappa\kappa_1}] \Omega^{J}_{\kappa\kappa_2} = -\frac{1}{2} G \xi^{(-)}_{\kappa_1\kappa_2} \Delta^{J}_{\kappa_1\kappa_2} - \chi q \sqrt{5}\, \eta^{(+)}_{\kappa_1\kappa_2} Q^{J}_{\kappa_1\kappa_2}, \quad (53)$$

где

$$\Delta^{J}_{\kappa_1\kappa_2} = 2 \sum_{I} P(I)(Ij0\kappa_1 | J\kappa_1)(Ij0\kappa_2 | J\kappa_2) \frac{2I+1}{2J+1} \Delta^{(2)}(I), \quad (54)$$

$$Q^{J}_{\kappa_1\kappa_2} = 2 \sum_{I,I'} P(I)P(I')(-1)^{J-j} W(jjII';2J) \times (Ij0\kappa_1 | J\kappa_1)(I'j0\kappa_2 | J\kappa_2) \frac{\sqrt{(2I+1)(2I'+1)}}{2J+1} Q^{(2)}(I,I'). \quad (55)$$

Диагональные коэффициенты $A^{J}_{\kappa\kappa}$ найдены из условия нормировки (19). Они равны следующему:

$$A^{J}_{\kappa\kappa} = -\frac{1}{2} \sum_{\kappa'} [(a^{J}_{\kappa\kappa'})^{2} + (b^{J}_{\kappa\kappa'})^{2}]. \quad (56)$$

Из уравнений (41), (42), (49), (51), (52), (53) и (56) получаем

$$\frac{1}{2} D^J_{\kappa_1\kappa_2} = \sum_{\kappa\neq\kappa_1,\kappa_2} \{ -\eta^{(+)}_{\kappa_1\kappa_2} \frac{\eta^{(-)}_{\kappa\kappa_1}\,\eta^{(-)}_{\kappa\kappa_2}}{(\mathcal{E}_\kappa+\mathcal{E}_{\kappa_1})(\mathcal{E}_\kappa+\mathcal{E}_{\kappa_2})} +$$

$$+ \frac{\xi^{(-)}_{\kappa_1\kappa_2}}{\mathcal{E}_{\kappa_1}+\mathcal{E}_{\kappa_2}} [\frac{\xi^{(+)}_{\kappa\kappa_1}\,\eta^{(-)}_{\kappa\kappa_2}}{\mathcal{E}_\kappa+\mathcal{E}_{\kappa_2}} + \frac{\xi^{(+)}_{\kappa\kappa_2}\,\eta^{(-)}_{\kappa\kappa_1}}{\mathcal{E}_\kappa+\mathcal{E}_{\kappa_1}}] \} \Omega^J_{\kappa\kappa_1}\,\Omega^J_{\kappa\kappa_2} + \tag{57}$$

$$+ \frac{\xi^{(-)}_{\kappa_1\kappa_2}\,\eta^{(-)}_{\kappa_1\kappa_2}}{(\mathcal{E}_{\kappa_1}+\mathcal{E}_{\kappa_2})^2}\Omega^J_{\kappa_1\kappa_2}(\Omega^J_{\kappa_1\kappa_1} - \Omega^J_{\kappa_2\kappa_2}) +$$

$$+ \frac{1}{2} G \frac{\xi^{(-)}_{\kappa_1\kappa_2}\,\xi^{(-)}_{\kappa_1\kappa_2}}{\mathcal{E}_{\kappa_1}+\mathcal{E}_{\kappa_2}}\Delta^J_{\kappa_1\kappa_2} + \chi q\sqrt{5}\,\frac{\xi^{(-)}_{\kappa_1\kappa_2}\,\eta^{(+)}_{\kappa_1\kappa_2}}{\mathcal{E}_{\kappa_1}+\mathcal{E}_{\kappa_2}} Q^J_{\kappa_1\kappa_2}$$

$$\frac{1}{2} K^J_{\kappa_1\kappa_2} = \sum_{\kappa\neq\kappa_1,\kappa_2} \{ \xi^{(-)}_{\kappa_1\kappa_2} \frac{\eta^{(-)}_{\kappa\kappa_1}\,\eta^{(-)}_{\kappa\kappa_2}}{(\mathcal{E}_\kappa+\mathcal{E}_{\kappa_1})(\mathcal{E}_\kappa+\mathcal{E}_{\kappa_2})} +$$

$$+ \frac{\eta^{(+)}_{\kappa_1\kappa_2}}{\mathcal{E}_{\kappa_1}+\mathcal{E}_{\kappa_2}} [\frac{\eta^{(-)}_{\kappa\kappa_1}\,\xi^{(+)}_{\kappa\kappa_2}}{\mathcal{E}_\kappa+\mathcal{E}_{\kappa_1}} + \frac{\eta^{(-)}_{\kappa\kappa_2}\,\xi^{(+)}_{\kappa\kappa_1}}{\mathcal{E}_\kappa+\mathcal{E}_{\kappa_2}}] \} \Omega^J_{\kappa\kappa_1}\,\Omega^J_{\kappa\kappa_2} + \tag{58}$$

$$+ \frac{\eta^{(+)}_{\kappa_1\kappa_2}\,\eta^{(-)}_{\kappa_1\kappa_2}}{(\mathcal{E}_{\kappa_1}+\mathcal{E}_{\kappa_2})^2}\Omega^J_{\kappa_1\kappa_2}(\Omega^J_{\kappa_1\kappa_1} - \Omega^J_{\kappa_2\kappa_2}) +$$

$$+ \frac{1}{2} G \frac{\eta^{(+)}_{\kappa_1\kappa_2}\,\xi^{(-)}_{\kappa_1\kappa_2}}{\mathcal{E}_{\kappa_1}+\mathcal{E}_{\kappa_2}}\Delta^J_{\kappa_1\kappa_2} + \chi q\sqrt{5}\,\frac{\eta^{(+)}_{\kappa_1\kappa_2}\,\eta^{(+)}_{\kappa_1\kappa_2}}{\mathcal{E}_{\kappa_1}+\mathcal{E}_{\kappa_2}} Q^J_{\kappa_1\kappa_2}$$

Формула (17) для возбуждения $\omega(I)$ с точностью до второго порядка теории возмущений принимает вид

$$\omega(I) = \frac{1}{2} G\Delta[\Delta^{(2)}(0) - \Delta^{(2)}(I)] +$$

$$+ \frac{\chi}{2I+1}\sum_{I'}[Q^{(0)}(0,I')Q^{(2)}(0,I') - Q^{(0)}(I,I')Q^{(2)}(I,I')]. \tag{59}$$

Соединяя формулы (31), (36) и (50) и помня, что из условия сохранения числа частиц (20) должно вытекать

$$\sum_{\kappa_1,\kappa_2,J}(I\,j\,0\,\kappa_1\,|\,J\,\kappa_1)(I\,j\,0\,\kappa_2\,|\,J\,\kappa_2)K^J_{\kappa_1\kappa_2} = 0,$$

получаем

$$\frac{\chi}{2I+1}\sum_{I'} Q^{(0)}(I,I')Q^{(2)}(I,I') =$$

$$= -\frac{1}{2}P(I)\sum_{\kappa_1,\kappa_2,J}(\epsilon_{\kappa_1}+\epsilon_{\kappa_2})(I\,j\,0\,\kappa_1\,|\,J\,\kappa_1)(I\,j\,0\,\kappa_2\,|\,J\,\kappa_2)K^J_{\kappa_1\kappa_2}. \tag{60}$$

Отсюда уравнение для возбуждения четного ядра имеет вид

$$\omega(I) = \sum_{\kappa_1,\kappa_2,J}[P(I)(I\,j\,0\,\kappa_1\,|\,J\,\kappa_1)(I\,j\,0\,\kappa_2\,|\,J\,\kappa_2) - \delta_{Jj}]E^J_{\kappa_1\kappa_2}, \tag{61}$$

где

$$E^J_{\kappa_1\kappa_2} \equiv \frac{1}{2}(\epsilon_{\kappa_1}+\epsilon_{\kappa_2})K^J_{\kappa_1\kappa_2} - \frac{1}{2}G\Delta D^J_{\kappa_1\kappa_2} =$$

$$= (\mathcal{E}_{\kappa_1}+\mathcal{E}_{\kappa_2})\xi^{(+)}_{\kappa_1\kappa_2}\sum_{\kappa\neq\kappa_1,\kappa_2}\frac{\eta^{(-)}_{\kappa\kappa_1}\,\eta^{(-)}_{\kappa\kappa_2}}{(\mathcal{E}_\kappa+\mathcal{E}_{\kappa_1})(\mathcal{E}_\kappa+\mathcal{E}_{\kappa_2})}\Omega^J_{\kappa\kappa_1}\Omega^J_{\kappa\kappa_2} +$$

$$+ \frac{\mathcal{E}_{\kappa_1}-\mathcal{E}_{\kappa_2}}{(\mathcal{E}_{\kappa_1}+\mathcal{E}_{\kappa_2})^2}\eta^{(-)}_{\kappa_1\kappa_2}\{\sum_{\kappa\neq\kappa_1,\kappa_2}[\frac{\eta^{(-)}_{\kappa\kappa_1}\,\xi^{(+)}_{\kappa\kappa_2}}{\mathcal{E}_\kappa+\mathcal{E}_{\kappa_1}} + \frac{\eta^{(-)}_{\kappa\kappa_2}\,\xi^{(+)}_{\kappa\kappa_1}}{\mathcal{E}_\kappa+\mathcal{E}_{\kappa_2}}]\Omega^J_{\kappa\kappa_1}\Omega^J_{\kappa\kappa_2} +$$

$$+ \eta^{(-)}_{\kappa_1\kappa_2}\Omega^J_{\kappa_1\kappa_2}(\Omega^J_{\kappa_1\kappa_1} - \Omega^J_{\kappa_2\kappa_2}) + \tag{62}$$

$$+ \frac{1}{2}G\,\xi^{(-)}_{\kappa_1\kappa_2}\Delta^J_{\kappa_1\kappa_2} + \chi q\sqrt{5}\,\eta^{(+)}_{\kappa_1\kappa_2}Q^J_{\kappa_1\kappa_2}\}.$$

Здесь мы использовали соотношения между u_κ, v_κ, ϵ_κ и $\mathcal{E}_\kappa$, вытекающие из уравнений (34) и (35).

3. **Решение для четного ядра.** Уравнения (48), (50) и (61) вместе с соотношениями (49), (51), (62), а также (43), (54), (55) представляют собой систему уравнений для величин $\omega(I)$, $\Delta^{(2)}(I)$ и $Q^{(2)}(I,I')$, характеризующих четное ядро. Решение этой системы будем искать в виде

$$\omega(I) = \frac{1}{2J} P(I)\, I(I+1), \tag{63}$$

$$\Delta^{(2)}(I) = \frac{1}{(2J)^2} P(I)\,[\,\delta_0 + \delta_1 I(I+1)\,], \tag{64}$$

$$Q^{(2)}(I,I') = \frac{1}{(2J)^2}\{k_0 + k_1[\,I(I+1) + I'(I'+1)\,] + k_2[\,I(I+1) - I'(I'+1)\,]^2\}, \tag{65}$$

где $Q^{(2)}(I,I')$ – поправка к элементам внутреннего квадрупольного момента, определенным формулой (31).

Вставляя соотношения (63), (64), (65) в уравнения (48), (50) и (61), получаем для введенных выше постоянных следующее уравнение:

$$J = 2\sum_{\kappa} \frac{[\eta^{(-)}_{\kappa\kappa+1}]^2\, j^2_{\kappa\kappa+1}}{\mathcal{E}_\kappa + \mathcal{E}_{\kappa+1}}\, k \tag{66}$$

где

$$j_{\kappa\kappa+1} = \sqrt{\frac{(j+\kappa+1)(j-\kappa)}{2}} \tag{67}$$

– матричный элемент компоненты одночастичного момента количества движения) и уравнения, данные в таблице.

<u>**Таблица**</u>

Уравнения для постоянных, определяющих поправки к энергетической щели и квадрупольному моменту

$$\delta_0\Big[1 - G\sum_\kappa \frac{(\xi^{(-)}_{\kappa\kappa})^2}{2\mathcal{E}_\kappa}\Big] - \delta_1 G \sum_{\kappa_1,\kappa_2} \frac{(\xi^{(-)}_{\kappa_1\kappa_2})^2}{\mathcal{E}_{\kappa_1} + \mathcal{E}_{\kappa_2}} F^1_{\kappa_1\kappa_2} - 2k_0\chi \sum_\kappa \frac{\xi^{(-)}_{\kappa\kappa}\,\eta^{(+)}_{\kappa\kappa}}{2\mathcal{E}_\kappa} q_{\kappa\kappa} -$$

$$- 2\chi \sum_{\kappa_1,\kappa_2} \frac{\xi^{(-)}_{\kappa_1\kappa_2}\,\eta^{(+)}_{\kappa_1\kappa_2}}{\mathcal{E}_{\kappa_1} + \mathcal{E}_{\kappa_2}}\big[(k_1 - 6k_2)(q_{\kappa_1\kappa_1} + q_{\kappa_2\kappa_2})F^1_{\kappa_1\kappa_2} + 8k_2 j^2_{\kappa_1\kappa_1+1}(q_{\kappa_1+1\,\kappa_1+1} - q_{\kappa_1\kappa_1})\times$$

$$\times (F^1_{\kappa_1+1\,\kappa_2} - F^1_{\kappa_1\kappa_2})\big] = 2\sum_{\kappa_1,\kappa_2} \frac{\xi^{(-)}_{\kappa_1\kappa_2}\,\eta^{(-)}_{\kappa_1\kappa_2}}{(\mathcal{E}_{\kappa_1} + \mathcal{E}_{\kappa_1})^2} F^1_{\kappa_1\kappa_2}(F^1_{\kappa_1\kappa_1} - F^1_{\kappa_2\kappa_2}) +$$

$$+ 2\sum_{\substack{\kappa,\kappa_1,\kappa_2\\ \kappa\neq\kappa_1,\kappa_2}} \Big[\frac{\xi^{(-)}_{\kappa_1\kappa_2}}{\mathcal{E}_{\kappa_1} + \mathcal{E}_{\kappa_2}}\Big(\frac{\xi^{(+)}_{\kappa\kappa_2}\eta_{\kappa\kappa_1}}{\mathcal{E}_\kappa + \mathcal{E}_{\kappa_1}} + \frac{\xi^{(+)}_{\kappa\kappa_1}\eta_{\kappa\kappa_2}}{\mathcal{E}_\kappa + \mathcal{E}_{\kappa_2}}\Big) - \frac{\eta^{(+)}_{\kappa_1\kappa_2}\,\eta^{(-)}_{\kappa\kappa_1}\,\eta^{(-)}_{\kappa\kappa_2}}{(\mathcal{E}_\kappa + \mathcal{E}_{\kappa_1})(\mathcal{E}_\kappa + \mathcal{E}_{\kappa_2})}\Big] F^1_{\kappa\kappa_1} F^1_{\kappa\kappa_2}$$

$$\delta_1\Big[1 - G\sum_\kappa \frac{(\xi^{(-)}_{\kappa\kappa})^2}{2\mathcal{E}_\kappa}\Big] - 4(k_1 + 6k_2)\chi \sum_\kappa \frac{\xi^{(-)}_{\kappa\kappa}\,\eta^{(+)}_{\kappa\kappa}}{2\mathcal{E}_\kappa} q_{\kappa\kappa}$$

$$= 2\sum_\kappa\Big[\frac{\xi^{(-)}_{\kappa+1\,\kappa+1}\,\xi^{(+)}_{\kappa\kappa+1}\,\eta^{(-)}_{\kappa\kappa+1}}{\mathcal{E}_{\kappa+1}(\mathcal{E}_\kappa + \mathcal{E}_{\kappa+1})} - \frac{\eta^{(+)}_{\kappa+1\,\kappa+1}(\eta^{(-)}_{\kappa\kappa+1})^2}{(\mathcal{E}_\kappa + \mathcal{E}_{\kappa+1})^2}\Big] j^2_{\kappa\kappa+1}$$

$$k_0\Big[1-2\chi\sum_{\kappa}\frac{(\eta^{(+)}_{\kappa\kappa})^2}{2\mathcal{E}_\kappa}q^2_{\kappa\kappa}\Big]-\chi\sum_{\kappa_1,\kappa_2}\frac{(\eta^{(+)}_{\kappa_1\kappa_2})^2}{\mathcal{E}_{\kappa_1}+\mathcal{E}_{\kappa_2}}\Big[k_1F^1_{\kappa_1\kappa_2}+k_2(F^2_{\kappa_1\kappa_2}-F^1_{\kappa_1\kappa_2}F^1_{\kappa_1\kappa_2})\Big](q^2_{\kappa_1\kappa_1}+q^2_{\kappa_2\kappa_2})-$$

$$-12(k_1-2k_2)\chi\frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{\kappa}\Big[\frac{(\eta^{(+)}_{\kappa\kappa+1})^2}{\mathcal{E}_\kappa+\mathcal{E}_{\kappa+1}}(q_{\kappa\kappa}-q_{\kappa+1\kappa+1})+\frac{(\eta^{(+)}_{\kappa+1\kappa+1})^2}{2\mathcal{E}_{\kappa+1}}q_{\kappa+1\kappa+1}-\frac{(\eta^{(+)}_{\kappa\kappa})^2}{2\mathcal{E}_\kappa}q_{\kappa\kappa}\Big]q_{\kappa+1\kappa}j_{\kappa\kappa+1}+$$

$$+24k_2\kappa\Big\{\frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{\kappa_1,\kappa_2}\Big[\frac{(\eta^{(+)}_{\kappa_1+1\kappa_2})^2}{\mathcal{E}_{\kappa_1+1}+\mathcal{E}_{\kappa_2}}F^1_{\kappa_1\kappa_2}+\frac{(\eta^{(+)}_{\kappa_1\kappa_2})^2}{\mathcal{E}_{\kappa_1}+\mathcal{E}_{\kappa_2}}F^1_{\kappa_1+1\kappa_2}\Big](q_{\kappa_1\kappa_1}+q_{\kappa_1+1\kappa_1+1})q_{\kappa_1+1\kappa_1}j_{\kappa_1\kappa_1+1}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{6}}\sum_{\kappa_1,\kappa_2}\Big[\frac{(\eta^{(+)}_{\kappa_1-1\kappa_2})^2}{\mathcal{E}_{\kappa_1-1}+\mathcal{E}_{\kappa_2}}q_{\kappa_1-1\kappa_1-1}j^2_{\kappa_1-1\kappa_1}+\frac{(\eta^{(+)}_{\kappa_1+1\kappa_2})^2}{\mathcal{E}_{\kappa_1+1}+\mathcal{E}_{\kappa_2}}q_{\kappa_1+1\kappa_1+1}j^2_{\kappa_1\kappa_1+1}\Big]q_{\kappa_1+1\kappa_1-1}F^1_{\kappa_1\kappa_2}-$$

$$-\frac{2}{\sqrt{6}}\sum_{\kappa}\Big[\Big(\frac{(\eta^{(+)}_{\kappa-1\kappa})^2}{\mathcal{E}_{\kappa-1}+\mathcal{E}_\kappa}-\frac{(\eta^{(+)}_{\kappa-1\kappa-1})^2}{2\mathcal{E}_{\kappa-1}}\Big)q_{\kappa-1\kappa-1}j^2_{\kappa-1\kappa}+\Big(\frac{(\eta^{(+)}_{\kappa+1\kappa+1})^2}{2\mathcal{E}_{\kappa+1}}-\frac{(\eta^{(+)}_{\kappa+1\kappa})^2}{\mathcal{E}_{\kappa+1}+\mathcal{E}_\kappa}\Big)q_{\kappa+1\kappa+1}j^2_{\kappa\kappa+1}\Big]\times$$

$$\times\kappa q_{\kappa+1\kappa-1}\Big\}-(\delta_0-3\delta_1)G\sum_{\kappa}\frac{\eta^{(+)}_{\kappa\kappa}\xi^{(-)}_{\kappa\kappa}}{2\mathcal{E}_\kappa}q_{\kappa\kappa}-\frac{1}{2}\delta_1G\sum_{\kappa_1,\kappa_2}\frac{\eta^{(+)}_{\kappa_1\kappa_2}\xi^{(-)}_{\kappa_1\kappa_2}}{\mathcal{E}_{\kappa_1}+\mathcal{E}_{\kappa_2}}(q_{\kappa_1\kappa_1}+$$

$$+q_{\kappa_2\kappa_2})F^1_{\kappa_1\kappa_2}$$

$$=\sum_{\kappa_1,\kappa_2}\frac{\eta^{(+)}_{\kappa_1\kappa_2}\eta^{(-)}_{\kappa_1\kappa_2}}{(\mathcal{E}_{\kappa_1}+\mathcal{E}_{\kappa_2})^2}\Big[(q_{\kappa_1\kappa_1}+q_{\kappa_2\kappa_2})(F^1_{\kappa_1\kappa_1}-F^1_{\kappa_2\kappa_2})-\frac{12}{\sqrt{3}}(q_{\kappa_1\kappa_1-1}j_{\kappa_1-1\kappa_1}+$$

$$+q_{\kappa_2\kappa_2-1}j_{\kappa_2-1\kappa_2})\Big]F^1_{\kappa_1\kappa_2}+24\sum_{\substack{\kappa_1,\kappa_2\\ \kappa_2\neq\kappa_1+1}}\Big[\frac{\xi^{(-)}_{\kappa_1\kappa_2}\eta^{(-)}_{\kappa_1+1\kappa_1}\eta^{(-)}_{\kappa_1+1\kappa_2}}{(\mathcal{E}_{\kappa_1+1}+\mathcal{E}_{\kappa_1})(\mathcal{E}_{\kappa_1+1}+\mathcal{E}_{\kappa_2})}+\frac{\eta^{(+)}_{\kappa_1\kappa_2}}{\mathcal{E}_{\kappa_1}+\mathcal{E}_{\kappa_2}}\Big(\frac{\eta^{(-)}_{\kappa_1+1\kappa_1}\xi^{(+)}_{\kappa_2+1\kappa_2}}{\mathcal{E}_{\kappa_1+1}+\mathcal{E}_{\kappa_1}}+$$

$$+\frac{\eta^{(-)}_{\kappa_1+1\kappa_2}\xi^{(+)}_{\kappa_1+1\kappa_1}}{\mathcal{E}_{\kappa_1+1}+\mathcal{E}_{\kappa_2}}\Big)\Big]q_{\kappa_1+1\kappa_1+1}F^1_{\kappa_1+1\kappa_2}+2\sum_{\substack{\kappa,\kappa_1,\kappa_2\\ \kappa\neq\kappa_1,\kappa_2}}\Big[\frac{\xi^{(-)}_{\kappa_1\kappa_2}\eta^{(-)}_{\kappa\kappa_1}\eta^{(-)}_{\kappa\kappa_2}}{(\mathcal{E}_\kappa+\mathcal{E}_{\kappa_1})(\mathcal{E}_\kappa+\mathcal{E}_{\kappa_2})}+\frac{\eta^{(+)}_{\kappa_1\kappa_2}}{\mathcal{E}_{\kappa_1}+\mathcal{E}_{\kappa_2}}\Big(\frac{\eta^{(-)}_{\kappa\kappa_1}\xi^{(+)}_{\kappa\kappa_2}}{\mathcal{E}_\kappa+\mathcal{E}_{\kappa_2}}+$$

$$+\frac{\eta^{(-)}_{\kappa\kappa_2}\xi^{(+)}_{\kappa\kappa_1}}{\mathcal{E}_\kappa+\mathcal{E}_{\kappa_2}}\Big)\Big]q_{\kappa\kappa}F^1_{\kappa\kappa_1}F^1_{\kappa\kappa_2}$$

$$k_1\Big[1-2\chi\sum_\kappa \frac{(\eta^{(+)}_{\kappa\kappa})^2}{2\mathcal{E}_\kappa} q^2_{\kappa\kappa}\Big] - 2k_2\chi\Big\{\sum_{\kappa_1,\kappa_2}\frac{(\eta^{(+)}_{\kappa_1\kappa_2})^2}{\mathcal{E}_{\kappa_1}+\mathcal{E}_{\kappa_2}}(q^2_{\kappa_1\kappa_1}+q^2_{\kappa_2\kappa_2})F^1_{\kappa_1\kappa_2} - \frac{12}{\sqrt6}\sum_\kappa\Big[\frac{(\eta^{(+)}_{\kappa\kappa+1})^2}{\mathcal{E}_\kappa+\mathcal{E}_{\kappa+1}} +$$

$$+\frac{(\eta^{(+)}_{\kappa\kappa-1})^2}{\mathcal{E}_\kappa+\mathcal{E}_{\kappa-1}} - \frac{(\eta^{(+)}_{\kappa-1\kappa+1})^2}{\mathcal{E}_{\kappa-1}+\mathcal{E}_{\kappa+1}} - \frac{(\eta^{(+)}_{\kappa\kappa})^2}{2\mathcal{E}_\kappa}\Big] q_{\kappa+1\kappa-1} j_{\kappa-1\kappa} j_{\kappa\kappa+1} - \frac{6}{\sqrt6}\sum_\kappa\Big[\Big(\frac{(\eta^{(+)}_{\kappa-1\kappa})^2}{\mathcal{E}_\kappa+\mathcal{E}_{\kappa-1}} - \frac{(\eta^{(+)}_{\kappa-1\kappa-1})^2}{2\mathcal{E}_{\kappa-1}}\Big)\times$$

$$\times q_{\kappa-1\kappa-1} j^2_{\kappa-1\kappa} + \Big(\frac{(\eta^{(+)}_{\kappa+1\kappa+1})^2}{2\mathcal{E}_{\kappa+1}} - \frac{(\eta^{(+)}_{\kappa+1\kappa})^2}{\mathcal{E}_\kappa+\mathcal{E}_{\kappa+1}}\Big) q_{\kappa+1\kappa+1} j^2_{\kappa\kappa+1}\Big]\kappa q_{\kappa+1\kappa-1} +$$

$$+\frac{3}{\sqrt6}\sum_{\kappa_1\kappa_2}\Big[\frac{(\eta^{(+)}_{\kappa_1-1\kappa_2})^2}{\mathcal{E}_{\kappa_1-1}+\mathcal{E}_{\kappa_2}} q_{\kappa_1-1\kappa_1-1} j^2_{\kappa_1-1\kappa_1} + \frac{(\eta^{(+)}_{\kappa_1+1\kappa_2})^2}{\mathcal{E}_{\kappa_1+1}+\mathcal{E}_{\kappa_2}} q_{\kappa_1+1\kappa_1+1} j^2_{\kappa_1\kappa_1+1}\Big] q_{\kappa_1+1\kappa_1-1}F^1_{\kappa_1\kappa_2}\Big\} -$$

$$-\frac12\delta_1 G\sum_\kappa \frac{\eta^{(+)}_{\kappa\kappa}\xi^{(-)}_{\kappa\kappa}}{2\mathcal{E}_\kappa}q_{\kappa\kappa} = 12\Big\{\frac{1}{\sqrt3}\sum_\kappa \frac{\eta^{(+)}_{\kappa\kappa+1}\xi^{(-)}_{\kappa\kappa+1}}{(\mathcal{E}_\kappa+\mathcal{E}_{\kappa+1})^2} q_{\kappa+1\kappa} j_{\kappa\kappa+1} -$$

$$-\frac{2}{\sqrt6}\sum_\kappa\Big[\frac{\eta^{(+)}_{\kappa\kappa+1}\eta^{(-)}_{\kappa\kappa+1}}{(\mathcal{E}_{\kappa+1}+\mathcal{E}_\kappa)^2} + \frac{\eta^{(+)}_{\kappa\kappa-1}\eta^{(-)}_{\kappa\kappa-1}}{(\mathcal{E}_\kappa+\mathcal{E}_{\kappa-1})^2} + \frac{\xi^{(-)}_{\kappa+1\kappa-1}\eta^{(-)}_{\kappa\kappa-1}\eta^{(-)}_{\kappa\kappa+1}}{(\mathcal{E}_\kappa+\mathcal{E}_{\kappa+1})(\mathcal{E}_\kappa+\mathcal{E}_{\kappa-1})} + \frac{\eta^{(+)}_{\kappa+1\kappa-1}}{\mathcal{E}_{\kappa+1}+\mathcal{E}_{\kappa-1}}\times$$

$$\times\Big(\frac{\xi^{(+)}_{\kappa\kappa+1}\eta^{(-)}_{\kappa\kappa-1}}{\mathcal{E}_\kappa+\mathcal{E}_{\kappa-1}} + \frac{\xi^{(+)}_{\kappa\kappa-1}\eta^{(-)}_{\kappa\kappa+1}}{\mathcal{E}_\kappa+\mathcal{E}_{\kappa+1}}\Big)\Big] q_{\kappa+1\kappa-1} j_{\kappa-1\kappa} j_{\kappa\kappa+1}\Big\}$$

$$k_2\Big\{1-2\chi\sum_\kappa \frac{(\eta^{(+)}_{\kappa\kappa})^2}{2\mathcal{E}_\kappa}q^2_{\kappa\kappa} - \frac{4}{\sqrt3}\chi\sum_\kappa\Big[\frac{(\eta^{(+)}_{\kappa\kappa+1})^2}{\mathcal{E}_\kappa+\mathcal{E}_{\kappa+1}}(q_{\kappa+1\kappa+1}-q_{\kappa\kappa}) + \frac{(\eta^{(+)}_{\kappa+1\kappa+1})^2}{2\mathcal{E}_{\kappa+1}}q_{\kappa+1\kappa+1} -$$

$$-\frac{(\eta^{(+)}_{\kappa\kappa})^2}{2\mathcal{E}_\kappa}q_{\kappa\kappa}\Big] q_{\kappa+1\kappa} j_{\kappa\kappa+1} - \frac{4}{\sqrt6}\chi\sum_\kappa\Big[\frac{(\eta^{(+)}_{\kappa\kappa+1})^2}{\mathcal{E}_\kappa+\mathcal{E}_{\kappa+1}} + \frac{(\eta^{(+)}_{\kappa\kappa-1})^2}{\mathcal{E}_\kappa+\mathcal{E}_{\kappa-1}} - \frac{(\eta^{(+)}_{\kappa+1\kappa-1})^2}{\mathcal{E}_{\kappa-1}+\mathcal{E}_{\kappa+1}} -$$

$$-\frac{(\eta^{(+)}_{\kappa\kappa})^2}{2\mathcal{E}_\kappa}\Big] q_{\kappa\kappa} q_{\kappa+1\kappa-1} j_{\kappa-1\kappa} j_{\kappa\kappa+1} - \frac{2}{\sqrt6}\chi\sum_\kappa\Big[\Big(\frac{(\eta^{(+)}_{\kappa-1\kappa})^2}{\mathcal{E}_{\kappa-1}+\mathcal{E}_\kappa} - \frac{(\eta^{(+)}_{\kappa-1\kappa-1})^2}{2\mathcal{E}_{\kappa-1}}\Big) q_{\kappa-1\kappa-1} j^2_{\kappa-1\kappa} +$$

$$+\Big(\frac{(\eta^{(+)}_{\kappa+1\kappa+1})^2}{2\mathcal{E}_{\kappa+1}} - \frac{(\eta^{(+)}_{\kappa+1\kappa})^2}{\mathcal{E}_{\kappa+1}+\mathcal{E}_\kappa}\Big) q_{\kappa+1\kappa+1} j^2_{\kappa\kappa+1}\Big]\kappa q_{\kappa+1\kappa-1} + \frac{\chi}{\sqrt6}\sum_{\kappa_1,\kappa_2}\Big[\frac{(\eta^{(+)}_{\kappa_1-1\kappa_2})^2}{\mathcal{E}_{\kappa_1-1}+\mathcal{E}_{\kappa_2}} q_{\kappa_1-1\kappa_1-1} j^2_{\kappa_1-1\kappa_1} +$$

$$+\frac{(\eta^{(+)}_{\kappa_1+1\kappa_2})^2}{\mathcal{E}_{\kappa_1+1}+\mathcal{E}_{\kappa_2}} q_{\kappa_1+1\kappa_1+1} j^2_{\kappa_1\kappa_1+1}\Big] q_{\kappa_1+1\kappa_1-1} F^1_{\kappa_1\kappa_2}\Big\} = -\frac{2}{\sqrt3}\sum_\kappa \frac{\eta^{(+)}_{\kappa\kappa+1}\eta^{(-)}_{\kappa\kappa+1}}{(\mathcal{E}_\kappa+\mathcal{E}_{\kappa+1})^2} q_{\kappa+1\kappa} j_{\kappa\kappa+1} +$$

$$+\frac{4}{\sqrt6}\sum_\kappa\Big[\frac{\eta^{(+)}_{\kappa\kappa+1}\eta^{(-)}_{\kappa\kappa+1}}{(\mathcal{E}_{\kappa+1}+\mathcal{E}_\kappa)^2} + \frac{\eta^{(+)}_{\kappa\kappa-1}\eta^{(-)}_{\kappa\kappa-1}}{(\mathcal{E}_\kappa+\mathcal{E}_{\kappa-1})^2} + \frac{\xi^{(-)}_{\kappa+1\kappa-1}\eta^{(-)}_{\kappa\kappa-1}\eta^{(-)}_{\kappa\kappa+1}}{(\mathcal{E}_\kappa+\mathcal{E}_{\kappa+1})(\mathcal{E}_\kappa+\mathcal{E}_{\kappa-1})} +$$

$$+\frac{\eta^{(+)}_{\kappa+1\kappa-1}}{\mathcal{E}_{\kappa+1}+\mathcal{E}_{\kappa-1}}\Big(\frac{\xi^{(+)}_{\kappa\kappa+1}\eta^{(-)}_{\kappa\kappa-1}}{\mathcal{E}_\kappa+\mathcal{E}_{\kappa-1}} + \frac{\xi^{(+)}_{\kappa\kappa-1}\eta^{(-)}_{\kappa\kappa+1}}{\mathcal{E}_\kappa+\mathcal{E}_{\kappa+1}}\Big)\Big] q_{\kappa+1\kappa-1} j_{\kappa-1\kappa} j_{\kappa\kappa+1}$$

Чтобы получить эти уравнения, надо было вычислить суммы, стоящие в правой стороне соотношений (48), (50) и (61). Этот расчет мы обсуждаем в приложении. Там даны также определения приведенных в таблице функций.

Видно, что в этом приближении, т.е. во втором порядке теории возмущений, возбуждения четного ядра являются ротационными. Конечно, это приближение хорошо только в случае сильнодеформированных ядер и низких ротационных возбуждений, т.е. в случае, когда $\Omega^{J}_{\kappa\kappa'} \ll \mathcal{E}_{\kappa} \pm \mathcal{E}_{\kappa'}$. Тем же самым методом можно найти поправки высших порядков теории возмущений. Из расчета видно, что мы получали бы тогда для возмущений $\omega(I)$ поправки типа $I^2(I+1)^2$, $I^3(I+1)^3$ и т.д., т.е. выражение в виде ряда по степеням $I(I+1)$. Но этого не стоит делать, так как такое представление $\omega(I)$ является плохим приближением /8/ для высоких возбуждений или малых деформаций.

Для момента инерции мы получили известную формулу Инглиса со спариванием /9/. Хотим подчеркнуть, что мы получили ее в результате точного решения проблемы, и поэтому она является самосогласованной. В нашем случае поправки к энергетической щели $\Delta^{(2)}(I)$ и элементам квадрупольного момента $Q^{(2)}(I,I')$ не влияют на момент инерции, хотя они выступают в уравнении (61). Это неожиданный результат. Постоянные определяющие выражения $\Delta^{(2)}(I)$ и $Q^{(2)}(I, I')$ можно найти из системы линейных неоднородных уравнений, данных в таблице.

4. Возбуждения нечетного ядра. Для полноты наших рассуждений представим еще решение для энергий состояний нечетного ядра $\mathcal{E}_{\kappa J}$ с точностью до второго порядка теории возмущений. Из уравнений (38), (41) и (52) вытекает следующее:

$$\mathcal{E}_{\kappa J} = \mathcal{E}_{\kappa} + \Omega^{J}_{\kappa\kappa} + \sum_{\kappa'\neq\kappa} \left[\frac{(\xi^{(+)}_{\kappa\kappa'})^2}{\mathcal{E}_{\kappa} - \mathcal{E}_{\kappa'}} + \frac{(\eta^{(-)}_{\kappa\kappa'})^2}{\mathcal{E}_{\kappa} + \mathcal{E}_{\kappa'}} \right] (\Omega^{J}_{\kappa\kappa'})^2 + \tag{68}$$

$$+ \frac{1}{2} G\, \eta^{(+)}_{\kappa\kappa} \Delta^{J}_{\kappa\kappa} - \chi q \sqrt{5}\, \xi^{(-)}_{\kappa\kappa} Q^{J}_{\kappa\kappa} .$$

Используя формулы (43), (54), (55), а также (63), (64), (65), получаем:

$$\mathcal{E}_{\kappa J} = \mathcal{E}_{\kappa} + \frac{1}{(2J)^2} \left[\frac{1}{2} G\, \eta^{(+)}_{\kappa\kappa} \delta_0 - \chi \sqrt{5}\, \xi^{(-)}_{\kappa\kappa} k_0 q_{\kappa\kappa} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2J} \Big\{ 1 + \frac{1}{2J} \Big[\frac{1}{2} G\, \eta^{(+)}_{\kappa\kappa} \delta_1 - 2\chi\sqrt{5}\, \xi^{(-)}_{\kappa\kappa} (k_1 q_{\kappa\kappa} -$$

$$- 2 k_2 q_{\kappa\kappa} + 4 k_2 \sqrt{5}\, q_{\kappa+1\,\kappa}\, j_{\kappa\kappa+1}) \Big] \Big\} \Big[J(J+1) +$$

$$+ j(j+1) - 2\kappa^2 + (-1)^{J+1} (j + \tfrac{1}{2})(J + \tfrac{1}{2}) \delta_{\kappa \frac{1}{2}} \Big] +$$

$$+ \frac{40\chi}{(2J)^2} \xi^{(-)}_{\kappa\kappa} k_2 q_{\kappa+1\,\kappa}\, j_{\kappa\kappa+1} (-1)^{J-\kappa} [J(J+1) - \kappa(\kappa+1)] +$$

$$+ \frac{2}{(2J)^2} \sum_{\kappa} \Big\{ [J(J+1) - \kappa(\kappa-1)] \Big[\frac{(\xi^{(+)}_{\kappa\kappa-1})^2}{\mathcal{E}_{\kappa} - \mathcal{E}_{\kappa-1}} + \frac{(\eta^{(-)}_{\kappa\kappa-1})^2}{\mathcal{E}_{\kappa} + \mathcal{E}_{\kappa-1}} \Big] j^2_{\kappa-1\,\kappa} + \tag{69}$$

$$+ [J(J+1) - \kappa(\kappa+1)] \Big[\frac{(\xi^{(+)}_{\kappa\kappa+1})^2}{\mathcal{E}_{\kappa} - \mathcal{E}_{\kappa+1}} + \frac{(\eta^{(-)}_{\kappa\kappa+1})^2}{\mathcal{E}_{\kappa} + \mathcal{E}_{\kappa+1}} \Big] j^2_{\kappa\kappa+1} \Big\} .$$

Отсюда видно, что эта формула дает в первом порядке теории возмущений ротационноый спектр с моментом инерции таким же, как для соседнего четного ядра, а во втором – поправки к этому моменту. Но эти поправки не тождественны поправкам, возникающим в кренкинг-модели /9/. Здесь самосогласование оказывается существенным.

В заключение автор благодарит Р.В. Джолоса за сотрудничество и многочисленные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Расчет сумм в выражениях, стоящих в правой стороне уравнений (48), (50), (61), довольно трудоемкий. Мы приведем только главные этапы этого расчета. Вначале мы заменим пары коэффициентов Клебша-Гордана [x)] в суммах выражениями типа [xx)]

$$(Ij0\kappa|J\kappa)(I'j0\kappa|J\kappa) =$$

$$= (-1)^{J-j}(2J+1)\sum_L (-1)^{j-\kappa}(jj\kappa{-}\kappa|L0)(II'00|L0) \times \qquad (\text{П}.1)$$

$$\times W(jkII';LJ).$$

Это позволяет просуммировать по J [xxx)]. Дальше следует вычислить суммы по моментам, стоящим внутри выражений (43), (54) и (55). Чтобы это сделать, подставим в них

$$I'(I'+1) =$$

$$= 2(-1)^L\sqrt{L(L+1)(2L+1)I(I+1)(2I+1)}\,W(IILL;1I') + \qquad (\text{П}.2)$$

$$+ L(L+1) + I(I+1),$$

---

x) Все стандартные формулы для коэффициентов Клебша-Гордана и Рака можно найти, например, в /10/.

xx) В этой формуле и во всех следующих считаем I, I' четными числами.

xxx) При расчете квадрупольного момента появляются четыре коэффициента Рака, содержащие J. Чтобы совершить суммирование, надо два из них заменить суммой из трех по стандартной формуле, стараясь, чтобы в этой сумме только один коэффициент содержал J.

$$I'^2(I'+1)^2 =$$

$$= \frac{2}{3}(-1)^L\sqrt{L(L+1)(2L+3)(2L+1)(2L-1)I(I+1)(2I+3)(2I+1)(2I-1)} \times$$

$$\times W(IILL;2I') + 2(-1)^L[1-2L(L+1)-2I(I+1)] \times$$

$$\times\sqrt{L(L+1)(2L+1)I(I+1)(2I+1)}\,W(IILL;1I') + \qquad (\text{П}.3)$$

$$+[L(L+1)+I(I+1)]^2 + \frac{4}{3}L(L+1)I(I+1),$$

помня, что эти формулы справедливы только в том случае, когда I, I', L удовлетворяют неравенству треугольника. В конце остаются суммы по моментам L. Они могут быть сведены к трем следующим выражениям:

$$F^0_{\kappa_1\kappa_2} = 2\sum_L P(L)(-1)^{j-\kappa_1}(jj\kappa_1{-}\kappa_1|L0) \times$$

$$\times (-1)^{j-\kappa_2}(jj\kappa_2{-}\kappa_2|L0) = \delta_{\kappa_1\kappa_2}, \qquad (\text{П}.4)$$

$$F^1_{\kappa_1\kappa_2} = 2\sum_L P(L)L(L+1)(-1)^{j-\kappa_1}(jj\kappa_1{-}\kappa_1|L0) \times$$

$$\times (-1)^{j-\kappa_2}(jj\kappa_2{-}\kappa_2|L0) \qquad (\text{П}.5)$$

$$F^2_{\kappa_1\kappa_2} = 2\sum_L P(L)L^2(L+1)^2(-1)^{j-\kappa_1}(jj\kappa_1{-}\kappa_1|L0) \times$$

$$\times (-1)^{j-\kappa_2}(jj\kappa_2{-}\kappa_2|L0) =$$

$$= \frac{2}{3} \{ [3\kappa_1^2 - j(j+1)]^2 \delta_{\kappa_1 \kappa_2} +$$

$$+ [6(\kappa_1 + \frac{1}{2})^2 (j+\kappa_1+1)(j-\kappa_1) + \frac{3}{2}(j+\frac{1}{2})^2 (j-\frac{1}{2})(j+\frac{3}{2}) \delta_{\kappa_1 \frac{1}{2}}] \delta_{\kappa_2 \kappa_1 + 1} +$$

$$+ [6(\kappa_2 + \frac{1}{2})^2 (j+\kappa_2+1)(j-\kappa_2) + \frac{3}{2}(j+\frac{1}{2})^2 (j-\frac{1}{2})(j+\frac{3}{2}) \delta_{\kappa_2 \frac{1}{2}}] \delta_{\kappa_1 \kappa_2 + 1} +$$

$$+ \frac{3}{2}(j-\kappa_1-1)(j-\kappa_1)(j+\kappa_1+1)(j+\kappa_1+2) \delta_{\kappa_2 \kappa_1 + 2} +$$

$$+ \frac{3}{2}(j-\kappa_2-1)(j-\kappa_2)(j+\kappa_2+1)(j+\kappa_2+2) \delta_{\kappa_1 \kappa_2 + 2} \} +$$

$$+ 2 [j(j+1) + \frac{2}{3} j^2 (j+1)^2] F^0_{\kappa_1 \kappa_2} -$$

$$- [1 - 4j(j+1)] F^1_{\kappa_1 \kappa_2} , \qquad (\text{П.6})$$

которые присутствуют в уравнениях таблицы. Они справедливы только для положительных κ_1, κ_2.

В расчетах, кроме стандартных формул суммирования коэффициентов Клебша-Гордана и Рака, мы также употребляли рекурентные формулы для коэффициентов Клебша-Гордана, цитированные в /11/.

Литература

1. T. Marumori, Y. Shono, M. Yamamura, A. Tokunaga, Y. Miyanishi. Physics Lett. 25B, 249 (1967).
2. T. Marumori, M. Yamamura, Y. Miyanishi, S. Mishiyama. Contr. Int. Symp. Nucl. Str., 74, Dubna, 1968.
3. С. Т. Беляев. Доклад на Международном симпозиуме по структуре ядра, Дубна, 1968.
4. M. Sakai. Nuclear Phys. A104, 301 (1967).

5. A. Klein, L. Celenza, A.K. Kerman. Phys.Rev. 140, B245 (1965).
6. G. Do Dang, A. Klein. Phys. Rev., 156, 1159 (1967); R.M. Dreizler, A. Klein, Chi-Shiang Wu, G. Do Dang. Phys.Rev., 156, 1167 (1967).
7. M. Baranger, K. Kumar. Nuclear Phys., 62, 113 (1965).
8. T. Udagawa, R.K. Sheline. Phys. Rev., 147, 671 (1966).
9. S.T. Belyaev, Kgl. Danske Vid. Sels. Mat. Fys. Medd., 31, No.11 (1959).
10. A.R. Edmonds. Angular Momentum in Quantum Mechanics. Princeton University Press, Princeton, 1957.
11. M. Rotenberg, R. Bivis, N. Metronolis, J.K. Wooten, Jr. The 3-j and 6-j Symbols, The Technology Press MIT, Cambridge, 1959.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 октября 1968 года.