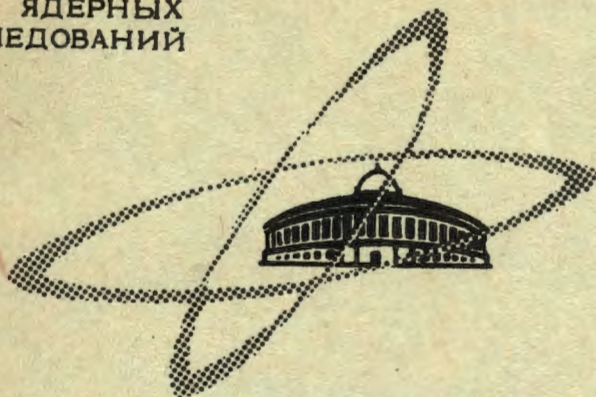


М-69

18/vii

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна



Р4 - 3849

И. Н. Михайлов

СВЯЗЬ МАТРИЦЫ РЕАКЦИИ БРАКНЕРА  
С ОПЕРАТОРОМ ЭФФЕКТИВНОЙ СИЛЫ  
ДЛЯ МЕТОДА СЛУЧАЙНОЙ ФАЗЫ

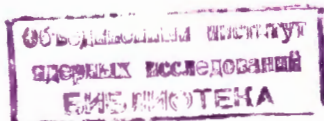
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1968

P4 - 3849

И. Н. Михайлов

СВЯЗЬ МАТРИЦЫ РЕАКЦИИ БРАКНЕРА  
С ОПЕРАТОРОМ ЭФФЕКТИВНОЙ СИЛЫ  
ДЛЯ МЕТОДА СЛУЧАЙНОЙ ФАЗЫ



Формальные результаты, полученные в работе<sup>/1/</sup>, допускают простой анализ процессов, перенормирующих эффективные силы в ядрах, и позволяют использовать результаты расчётов энергии связи ядер и ядерной материи для оценки величины параметров эффективных сил в ядрах. Изучению этих вопросов посвящен первый раздел настоящей работы.

Будучи строгими, соотношения, полученные в работе<sup>/1/</sup>, позволяют также анализировать процессы, описание которых выходит за рамки метода СФ. Как пример возможных применений метода в разделе 2 вычисляется поправка к энергии переходов, в которых участвуют состояния ядра с большой энергией возбуждения.

### *§1. Перенормировка эффективных сил*

Как и в работе<sup>/1/</sup>, под эффективной силой мы понимаем выражения, которые входят в уравнения для операторов перехода  $b^+$  между двумя стационарными состояниями ядра

$$|1\rangle = b^+ |0\rangle. \quad (1)$$

В соответствии с результатами предыдущей работы операторы самосопряженного поля  $H^{c.c.}$  и эффективной силы  $F$  определяются вариационными производными по матрице плотности от функционала

$$\begin{aligned}
 h_0 &= \langle K | V \Omega | K \rangle = \\
 &= \langle K | \left\{ V + V \frac{1-P_m}{E-H_0} V + V \frac{1-P_m}{E-H_0} V \frac{1-P_m}{E-H_0} V + \dots \right\} | K \rangle. \quad (2)
 \end{aligned}$$

В формуле (2)  $|K\rangle$  представляет собой некоторое некоррелированное состояние, принадлежащее модельному пространству состояний, включающему ограниченное число низколежащих конфигураций гамильтониана  $H_0$  модели оболочек;  $V$  - потенциал взаимодействия между свободными нуклонами, матричные элементы которого между некоррелированными состояниями считаются конечными, хотя, быть может, произвольно большими. Оператор  $\Omega$  удовлетворяет уравнению

$$\Omega = 1 + \frac{1-P_m}{E-H_0} V \Omega. \quad (3)$$

В частном случае, когда модельное пространство состоит только из одной конфигурации  $|K\rangle$ , формула (2) определяет ряд теории возмущений для энергии стационарного состояния ядра, волновая функция которого

$$|\Psi\rangle = \Omega |K\rangle. \quad (4)$$

Столь узкое модельное пространство не допускает рассмотрения переходов, и выкладки работы/1/ при таком определении (m) теряют смысл.

Состояния, учитываемые в существующих моделях ядерной физики, достаточно многочисленны: они включают конфигурации одной или нескольких оболочек, ближайших к заполняющейся. Мы будем считать в соответствии с этим, что модельный гамильтониан  $H_m = H_0 + V \Omega$  также определен в достаточно широком пространстве состояний, не уточняя пока, какие именно конфигурации включены в него.

Введение модельного пространства кажется разумным шагом, позволяющим упростить отыскание решения уравнения для оператора  $\Omega$  в формулах (2) - (4) для систем многих нуклонов, потенциал взаимодействия между которыми имеет отталкивательную часть как это показано на рис.1.

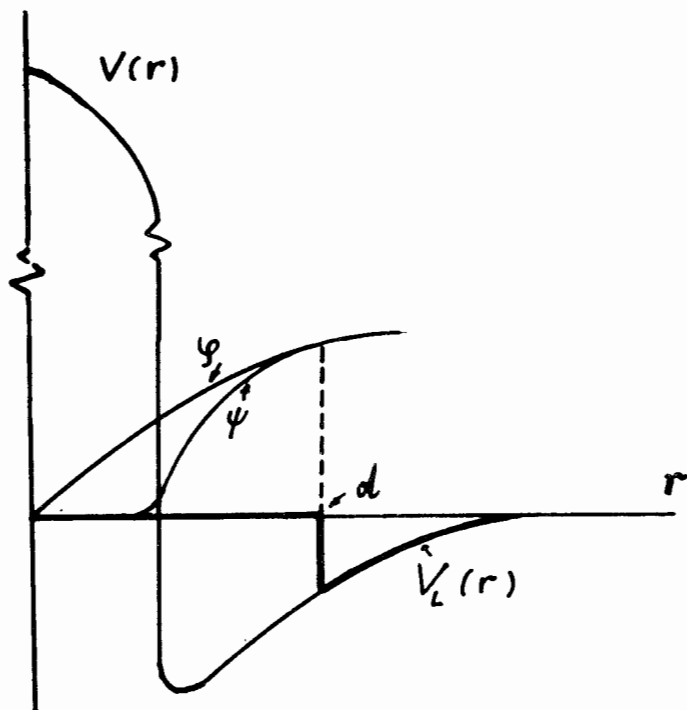


Рис. 1. Разделение потенциала на короткую  $V_s$  и дальнюю  $V_l$  части. Функция  $\phi(r)$  изображает зависимость от расстояния между нуклонами волновой функции свободного движения двух нуклонов. Функция  $\psi(r)$  соответствует наличию корреляций, вызванных  $V_s$ . Параметр сепарации  $d$  в методе Скотта-Мошковского выбирается так, чтобы в этой точке логарифмические производные  $\phi(r)$  и  $\psi(r)$  совпали.

Для того чтобы показать это, разобьем произвольным способом взаимодействие на дальнюю ( $V_l$ ) и короткую ( $V_s$ ) части

$$V = V \chi(d-r) + V \chi(r-d) \equiv V_s + V_l, \quad (5)$$

где  $\chi(\xi)$  - функция Хевисайда (функция ступеньки).

Границу, отделяющую уровни, входящие в модельное пространство ( $\mathfrak{M}$ ), выбираем так, чтобы удовлетворить неравенству

$$\frac{\sum_{\substack{\nu, \nu' \leq \nu_F \\ \mu, \mu' > \nu}} |\langle \nu \mu | V_\rho | \nu' \mu' - \mu' \nu' \rangle|^2}{\epsilon_\mu + \epsilon_{\mu'} - \epsilon_\nu - \epsilon_{\nu'}} = x < 1, \quad (6)$$

$$\frac{|\sum_{\nu, \nu' \leq \nu_F} \langle \nu, \nu' | V_\rho | \nu \nu' - \nu' \nu \rangle|^2}{\dots}$$

в котором  $x$  - наперед заданное число, меньшее единицы. Возможность удовлетворить этому условию обсуждалась в [1]; кажется естественным считать радиус действия сил находящимся в обратной связи с вероятностью возбуждения частиц на высоколежащие уровни.

В нулевом приближении по  $x$  уравнение (3) приобретает вид

$$\Omega = \Omega_0 = 1 + \frac{1 - P_m}{E - H_0} \cdot V_m \cdot \Omega_0. \quad (7)$$

Чем больше  $d$ , тем меньше состояний можно оставить в модельном пространстве и тем проще спектроскопическая часть задачи, сводящаяся с диагонализации модельного гамильтониана.

С другой стороны, решение уравнений (8), (7) можно упростить, если преобладающие матричные элементы  $V_m$  соответствуют достаточно большим возбуждениям, для которых знание точного значения энергетического знаменателя  $\frac{1}{E - H_0}$  несущественно. Свободу в выборе параметра  $d$  (т.е. в определении  $V_m$ ) можно использовать так, чтобы действие оператора  $\Omega_m$  на волновую функцию ядра было близким к действию двухчастичного оператора

$$\Omega_m^{(0)} = 1 - \frac{1 - P_0}{H_0 - E_0} \cdot V_m \cdot \Omega_m^{(0)} \quad (7')$$

с оператором проектирования  $P_0$  и энергией  $E_0$ , определенными для двухчастичных состояний в общем поле, включенном в оператор  $H_0$  (т.е. чтобы уравнение (7) допускало решение в газовом приближении).

Точность газового приближения тем больше, чем меньше  $d$ , а, следовательно, возрастает с увеличением числа конфигураций модельного пространства из-за условия (6). Кажется естественным найти оптимальное значение  $x$  и  $d$ , чтобы учесть возможно большее количество переходов, оставляя в уравнении (7) только ту часть потенциала, которая допускает использование газового приближения.

Расчёты для ядерной материи и конечных ядер (достаточно подробная библиография приведена в работе/1/) показывают, что условия, о которых говорилось выше, являются достаточно слабыми, а именно, что диагональные матричные элементы  $V_{\rho}$  значительно преобладают над недиагональными, если  $d \geq 1$ . При этом все матричные элементы  $V_{\rho}$  между нижайшими конфигурациями малы, так что сравнительно грубые приближения для энергетических знаменателей и замена оператора проектирования  $1 - P_m$  на единицу не сильно влияют на оценку энергии системы нуклонов. Поэтому кажется естественным использовать для оценки параметров эффективного гамильтониана уже имеющиеся расчёты по теории Бракнера, в которых дальняя часть потенциала взаимодействия  $V_{\rho}$  учитывается в первом порядке теории возмущений, а оператор  $(1 - P_m)/(E - H_0)$  учитывается приближенно.

Как и в работе/1/, нас интересуют, в основном, параметры эффективного взаимодействия нуклонов, определенные формулой

$$F_{12} = \frac{\delta^2 h_0}{\delta K(x'_1, x_1) \delta K(x'_2, x_2)}, \quad (8)$$

где  $K(x, x') = \sum_{\nu=\nu_F} \phi_{\nu}^*(x) \phi_{\nu}(x')$  - матрица плотности, однозначно определяющая некоррелированное состояние  $|K\rangle$ .

Эффективная масса нуклона в гамильтониане модели оболочек выбирается обычно равной массе свободного нуклона, и кинетическая энергия

системы нуклонов не перенормируется из-за ограничения пространства состояний. Но кинетическая энергия в некоррелированном состоянии линейна по матрице плотности

$$\bar{T} = \int dx dx' (x | \frac{\vec{p}^2}{2m} | x') K(x'x) \equiv \text{tr} \left( \frac{\vec{p}^2}{2m} K \right). \quad (9)$$

Поэтому вместо формулы (8) можно записать также

$$F_{12} = \frac{\delta^2 E_{\text{pot}}}{\delta K_1 \delta K_2} \quad (8')$$

– выражение, использованное в работе<sup>/2/</sup> Из формулы (8) видно, что точность оценок  $F_{12}$  определяют именно потенциальные энергии взаимодействия нуклонов, а не энергии связи ядра, в которую входит разность двух больших величин ( $E_{\text{bind}} = |E_{\text{pot}}| - \bar{T}$ ).

Связь эффективной силы из формулы (8), (8') и матрицы реакции Бракнера может быть установлена рассмотрением диаграмм теории возмущений<sup>/3/</sup> для  $\hat{h}_0$ . Выразим энергию  $E_{\text{pot}}$  в виде суммы связанных диаграмм без внешних линий. Легко убедиться, что каждой дырочной линии на диаграммах соответствует матрица плотности  $K(x, x')$  в формуле для энергии (2) и что однократное варьирование по  $K$  соответствует диаграммам, получающимся из исходной разрывом одной дырочной линии. Определим матрицу реакции как сумму всех диаграмм лестничного типа (см. рис. 2), в которых при суммировании по виртуальным состояниям частиц исключаются уровни из модельного пространства ( $m$ ).



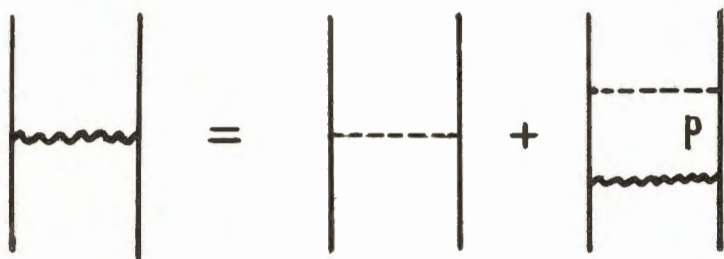


Рис. 2. Диаграммы, учтенные в матрице реакции. Уровни  $p, p'$  не принадлежат модельному пространству.

Диаграммы, дающие наибольший вклад в энергию  $h_0$  при малых плотностях (и учитываемые в расчётах по теории Бракнера), имеют небольшое число дырочных линий. Простейшая из них получается замыканием внешних линий диаграммы 2 и представляет газовое приближение для энергии среды. Двукратное варьирование вклада от нее в  $E_{\text{pot}}$  приводит к матрице реакции  $G$ . Следующие по сложности диаграммы для  $E_{\text{pot}}$  изображены на рис. 3. Они соответствуют дополнительной перенормировке эффективной силы, делающей ее отличной от матрицы реакции. Соответствующие диаграммы для  $F_{12}$  изображены на рис. 4.

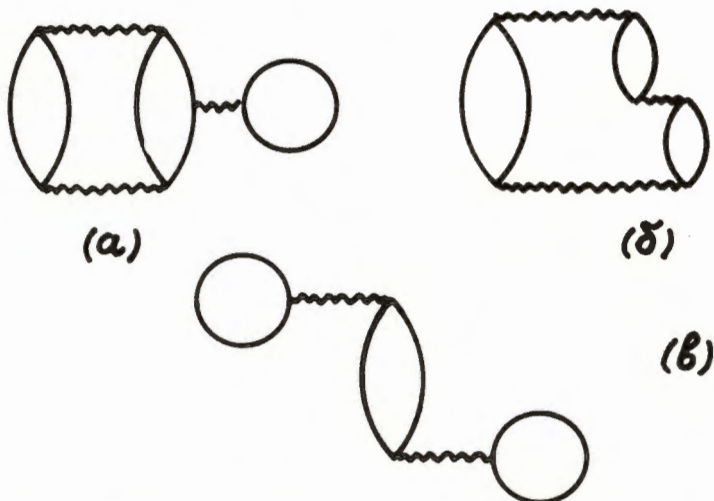


Рис. 3. Поправки к газовому приближению для  $E_{\text{pot}}$ . Диаграммы а) и б) вносят вклад преимущественно из-за короткодействующей части потенциала  $V_s$ , диаграмма в) связана с  $V_f$ .

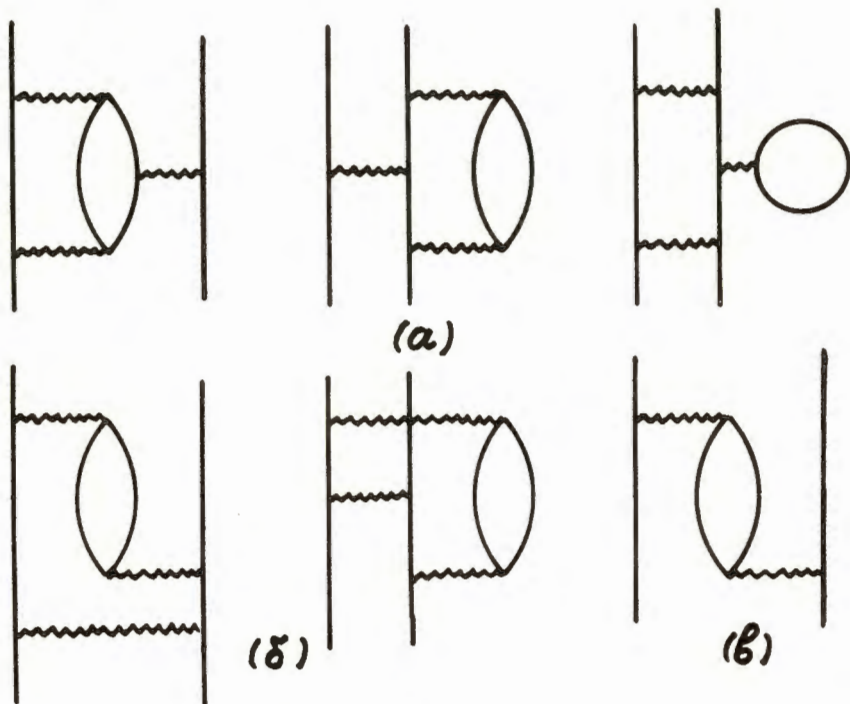


Рис. 4.

Диаграммы на рис. 4 и в книге Брауна<sup>/4/</sup> описывают существенно различные процессы перенормировки. Перенормировка по Брауну возникает из-за сужения модельного пространства до конфигураций, принадлежащих только одной оболочке, и вызвана только дальней частью потенциала взаимодействия  $V_f$ . Перенормировка, рассматриваемая здесь, вызвана преимущественно компонентой  $V_n$  и включает большое число виртуальных переходов из основного состояния модели оболочек на высоколежащие уровни.

Формулы (8), (8'), допуская анализ на языке диаграмм, дают также возможность получать оценки параметров сил непосредственно по данным расчёта ядерной материи. Эта возможность была использована ранее<sup>/2/</sup> для оценки эффективных сил в приближении нулевого радиуса действия<sup>x/</sup>.

<sup>x/</sup>Заметим, что нормировка силы в<sup>/2/</sup> отличается от принятой в работах группы Мигдала. В этом отношении сравнение вычисленных параметров  $\delta$  — силы и амплитуды рассеяния Мигдала в таблице 1 работы<sup>/2/</sup> неправильно: если придерживаться нормировки Мигдала, теоретические оценки следует разделить на 2.

Расчёты, проделанные в работе/2/, показали, что эффекты перенормировки, обсуждавшейся выше, велики<sup>x/</sup>.

Перенормировка сил должна изменить мультипольный состав сил, исследованный Брауном. Оценку дополнительных мультипольных компонент в эффективной силе можно получить, не прибегая к результатам работы/2/. Воспользуемся методом сепарации Скотта и Мошковского/4/ и запишем потенциальную энергию взаимодействия  $E_{pot}$  в виде

$$\begin{aligned}
 E_{pot} &= \frac{1}{2} \int d x_1 d x_2 d x'_1 d x'_2 (x_1 x_2 | V (| \vec{r}_1 - \vec{r}_2 | \chi (r-d) | x'_1 x'_2 - x'_2 x'_1) \\
 &\times K (x'_1, x_1) K (x'_2, x_2) \equiv \\
 &= \frac{1}{2} tr_1 tr_2 V_{\ell}^{AS} (1,2) K_1 K_2 .
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

В формуле (10)  $\chi (\xi)$  - функция Хевисайда;  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ . Параметр сепарации  $d$  зависит от распределения нуклонов. Эта зависимость выбирается в очень специальной форме: параметр  $d$  полностью определяется величиной

$$\bar{r}_2 = \frac{1}{N} \hbar v^2 K .
 \tag{11}$$

Вычисляя первую вариационную производную от  $E_{pot}$  (т.е. самосогласованный потенциал), получим

---

<sup>x/</sup> Определить точность этих расчётов можно пока лишь по расчётам вероятности  $\mu$  - захвата в ядрах  $^{16}O$ , приведенным в/5/:  $\delta$  - силы (см. работу/2/) позволяют описать захват на уровнях 0-, 1- ядра  $^{16}N$  и дают завышенную в 2,5-3 раза величину вероятности захвата на уровне 2-.

$$V^{a.c.} = \frac{\delta E_{pot}}{\delta K_1} = \tag{12}$$

$$= \text{tr}_2 V_{\ell}^{A.S.} (1,2) K_2 + \frac{1}{2} \text{tr}_2 \text{tr}_3 \frac{\delta V_{\ell}^{A.S.} (2,3)}{\delta K_1} K_2 K_3.$$

Второй член в правой стороне формулы (12) представляет собой вклад энергии перестройки в среднее поле. Учитывая, что зависимость от  $K$  в  $V_{\ell}$  входит только через  $\bar{r}^2$  (см. формулу (11)), запишем этот член в виде

$$\frac{\partial E_{pot}}{\partial \bar{r}^2} \cdot \frac{\delta \bar{r}^2}{\delta K_1} = \frac{1}{N} \frac{\partial E_{pot}}{\partial \bar{r}^2} \cdot r_1^2. \tag{13}$$

Если величина  $V_3 = \text{tr}_2 V_{\ell} (1,2) K_2$  в конфигурационном пространстве может быть аппроксимирована формулой

$$V = \frac{k}{2} r^2 \tag{14}$$

с коэффициентом жесткости, являющимся функцией от  $d$  или  $\bar{r}^2$ , то учёт перестройки приводит просто к перенормировке  $k$ . Вычисление второй вариационной производной от  $E_{pot}$  при тех же предположениях дает

$$F_{12} = V_{\ell}^{A.S.} (1,2) + \kappa r_1^2 r_2^2, \tag{15}$$

где

$$\kappa = \frac{1}{2N} \frac{dk}{dr^2} + \frac{1}{N^2} \frac{\partial^2 E_{\text{pot}}}{\partial (r^2)^2} \quad (16)$$

Большой вклад энергии перестройки в одночастичный потенциал  $V^{a.c.}$  дает основание думать, что добавка к монополярной компоненте сил в формуле (15) не мала. Ее расчёт производится.

## §2. Поправка к методу СФ для переходов с большим изменением энергии

Поправки к методу СФ, возникающие из-за зависимости модельного гамильтониана  $H_m(z) = H_0 + V \Omega(z)$  от энергетической переменной  $z$ , могут оказаться существенными для описания переходов на высоколежащие состояния ядра. Зависимость от  $z$  влияет как на энергию состояний, так и на вероятности переходов, однако, рассмотрение последних требует анализа перенормировки зарядов и представляет самостоятельную задачу, которую мы оставляем здесь без рассмотрения.

Предполагая зависимость от  $z$  слабой, разложим  $H_m(z)$  по степеням  $z - E_0$  ( $E_0$  - энергия основного состояния системы). При этом уравнения для оператора перехода  $b^+$  и частоты перехода  $\hbar\omega$  (см. (1) формула (20)) приобретают вид

$$[H, b^+] = \hbar\omega \left\{ 1 - \frac{z - E_0}{\hbar\omega} (H_0' + \frac{1}{2} (z - E_0) H_0'' + \dots) \right\} b^+ + \pi, \quad (17)$$

$$(\pi | 0 \rangle = 0, \quad z - E_0 = \hbar\omega),$$

где

$$H_0^{(n)} = \left( \frac{\partial^n H(z)}{\partial z^n} \right)_{z=E_0} \quad (18)$$

Рассмотрим случай, когда оператор  $b^+$  связывает состояния с разными квантовыми числами, общими для операторов  $H, H_0, P_m$  (например, состояния разной четности). В этом случае условие ортогональности полных функций имеет простой вид

$$\langle \Phi_0 | b^+ | \Phi_0 \rangle = 0. \quad (19)$$

Пусть известно решение уравнений метода СФ

$$[H, b_0^+] = \hbar \omega_0 b_0^+ + \pi \quad (20)$$

$$[b_0, b_0^+] = 1 + Q,$$

где

$$b_0 | \Phi_0 \rangle = 0, \quad \pi | \Phi_0 \rangle = \pi^T | \Phi_0 \rangle = 0. \quad (21)$$

$$\langle \Phi_0 | Q | \Phi_0 \rangle = 0.$$

Заметим, что

$$\langle \Phi_0 | b_0 [H, b^+] | \Phi_0 \rangle = - \langle \Phi_0 | [b_0 H] b^+ | \Phi_0 \rangle = 0. \quad (22)$$

Коммутаторы в формуле (22) можно определить при помощи уравнения (17) и эрмитовски сопряженного уравнению (20). При этом получаем:

$$\begin{aligned}
 (\hbar\omega - \hbar\omega_0) \langle \Phi_0 | b_0 b_0^\dagger | \Phi_0 \rangle = \\
 = \hbar\omega \langle \Phi_0 | b_0 (H' + \frac{1}{2} \hbar\omega H'' + \dots) b_0^\dagger | \Phi_0 \rangle.
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

Отсюда первая поправка к энергии находится заменой  $b \rightarrow b_0^\dagger$ ,  $\hbar\omega \rightarrow \hbar\omega_0$  в правой части формулы.

### §3. Заключительные замечания

Сделаем несколько замечаний об отношении результатов, полученных здесь и в работе/1/, к другим подходам в проблеме описания структуры ядер с использованием реалистических сил взаимодействия нуклонов.

Деталь, отличающая предлагаемый формализм от подхода к проблеме в теории Бракнера, состоит в исключении из уравнения для матрицы реакции ряда низколежащих состояний частиц. По-видимому, количественные изменения в оценках энергии  $E_{\text{pot}} = \langle K | V \Omega | K \rangle$  из-за такого исключения должны быть очень невелики. Аргументация в § 1 показывает, что сходимость рядов для  $E_{\text{pot}}$  должна улучшиться вследствие такого исключения. В то же время так определенная матрица реакции и энергия  $E_{\text{pot}}$  имеют непосредственное отношение к параметрам, используемым в моделях структуры ядра.

Выражения для эффективных сил, полученные выше, относятся к ядрам без парных корреляций. Последние могут быть без труда включены в рассмотрение введением в определение нормального произведения связи из-за аномального спаривания  $\mu = \langle K_B | \Phi(x) \Psi(x') | K_B \rangle$ . Такое обобщение дает возможность включить в рассмотрение переходы, в которых ядро получает или отдает пару нуклонов. Силы, определяющие энергию

отрыва пары нуклонов, получаются варьированием  $E_{pot}$  по  $\mu$  и значительно ближе к оператору, исследованному в работах Брауна/4/.

Вопросы, рассмотренные здесь и в работе/1/, неоднократно обсуждались мною с З.Бохнацки и В.Рыбарской, а также с Е.Б.Бальбуцевым, которым я искренне благодарен.

### Л и т е р а т у р а

1. И.Н.Михайлов. Эффективные силы для ядерного варианта метода случайной фазы. Препринт ОИЯИ, Дубна, 1968.
2. Z.Bochnacki, I.M.Holgar, I.N.Mikhailov. Nucl. Phys., A97, 33 (1967).
3. Д.Таулесс. Квантовая механика систем многих тел. ИЛ Москва, 1964.
4. G.Brown. Unified Theory of Nuclear Models and Forces, N.H.Publ. 1967.
5. M.TRho. Muon Capture in Nuclei and Migdal Theory, Lectures at the Summer School, Mc.Gill Univ., Canada (1967).

Рукопись поступила в издательский отдел

5 мая 1968 года.