

Р-577

Журнал, 1968, т. 54, к. 6, с. 1785-1798

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р4 - 3602



А.Б.Говорков

О ВОЗМОЖНОСТИ
ПАРАПОЛЕВОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ
ВНУТРЕННИХ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ
ТИПА ИЗОСПИНА И СТРАННОСТИ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

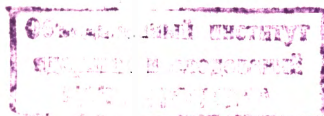
1967.

Р4 - 3602

А.Б.Говорков

О ВОЗМОЖНОСТИ
ПАРАПОЛЕВОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ
ВНУТРЕННИХ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ
ТИПА ИЗОСПИНА И СТРАННОСТИ

Направлено в ЖЭТФ



5556/3 пр.

1. Введение

Хорошо известно, что столь замечательный феномен природы, как существование изоспиновой и SU_3 -внутренних симметрий адронов, был открыт чисто экспериментальным путем, и его описание в современной теории производится феноменологически. В связи с этим представляет интерес любая попытка более последовательного введения внутренних симметрий. В настоящей работе будет показано, что такая возможность открывается, если за основание теории принять обобщенный метод его квантования, предложенный Гринном^{/1/} и Волковым^{/2/}, — так называемые паракоммутационные соотношения (ПКС). Все нижеследующее рассмотрение будет относиться к свободному полю, которое можно представить в виде разложения по положительно и отрицательно частотным решениям соответствующего уравнения (Дирака, Клейна-Гордона и т.д.):

$$\psi(x) = \sum_k \{ b_{k-} \phi_k^{(-)}(x) + b_{k+} \phi_k^{(+)}(x) \}. \quad (1)$$

Состояние k определяется, например, импульсом и спиральностью, а операторы b_{k-} и b_{k+} относятся к частицам и античастицам, соответственно. Ниже знак $\bar{\epsilon}$ указывающий на такую принадлежность, мы будем включать в индекс состояния k . Всю совокупность ПКС можно представить в следующей символической форме:

$$[b_r, [b_s, b_t]_{\bar{\epsilon}}]_{-\bar{\epsilon}} = 2\{b_r, b_s\}_{-\bar{\epsilon}} b_t + 2\epsilon \{b_r, b_t\}_{-\bar{\epsilon}} b_s, \quad (2)$$

в которой на место любого оператора b можно поставить сопряженный оператор b^* . Символы Волкова^{/2/} в правой части (2) имеют числовые значения:

$$\{b_r, b_s^*\}_{-\bar{\epsilon}} = \delta_{rs}, \quad \{b_r, b_s\}_{-\bar{\epsilon}} = \{b_r^*, b_s^*\}_{-\bar{\epsilon}} = 0. \quad (3)$$

а знак ϵ указывает, что в левой части (2) должны быть взяты при

$$\epsilon = \begin{cases} + & \text{антикоммутирует для полей с целым спином.} \\ - & \text{коммутирует для полей с полуполым спином.} \end{cases}$$

В зависимости от последнего соотношения (2) называются парабозонными (ПБС) или парафермионными (ПФС). Оператор числа частиц в состоянии \mathbf{k} имеет вид:

$$N_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} [b_{\mathbf{k}}^* , b_{\mathbf{k}}]_{\epsilon} - \frac{\epsilon p}{2} \quad (4)$$

и, вследствие (2), обладает всеми необходимыми свойствами:

$$[b_{\mathbf{s}} , N_{\mathbf{r}}]_{\epsilon} = \delta_{\mathbf{rs}} b_{\mathbf{r}} , \quad [b_{\mathbf{s}}^* , N_{\mathbf{r}}]_{\epsilon} = -\delta_{\mathbf{rs}} b_{\mathbf{r}}^* . \quad (5)$$

Гамильтониан свободного поля определяется выражением:

$$H = \sum_{\mathbf{k}} |k^0| (N_{\mathbf{k}_-} + N_{\mathbf{k}_+}) . \quad (6)$$

Связь ПКС с обобщенной статистикой тождественных частиц устанавливается дополнительным условием ограниченности максимально возможного числа парафермионов в симметричном или парабозонов в антисимметричном состояниях. Такое число получило наименование порядка парастатистики. Было показано^{/3/}, что выбор определенного порядка и общие соотношения (2), справедливые при любом порядке, могут быть заменены одними лишь коммутационными соотношениями, включающими оба эти требования. Так обычные бинарные соотношения для фермионов и бозонов обращают (2) в тождество. В случае второго порядка возникает соотношение:

$$b_{\mathbf{r}} b_{\mathbf{s}} b_{\mathbf{t}} - \epsilon b_{\mathbf{t}} b_{\mathbf{s}} b_{\mathbf{r}} = 2\{ b_{\mathbf{r}} , b_{\mathbf{s}} \}_{-\epsilon} b_{\mathbf{t}} + 2\{ b_{\mathbf{s}} , b_{\mathbf{t}} \}_{-\epsilon} b_{\mathbf{r}} . \quad (7)$$

Соотношения (2) имеют решения в виде так называемого анзаца (ansatz) Грина^{/1/}:

$$b_{\mathbf{r}} = \sum_{A=1}^p a_{\mathbf{r}}^A , \quad (8)$$

компоненты которого удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$[a_r^A, a_s^{B*}]_{-\epsilon_{AB}} = \delta_{AB} \delta_{rs}, \quad [a_r^A, a_s^B]_{-\epsilon_{AB}} = [a_r^{A*}, a_s^{B*}]_{-\epsilon_{AB}} = 0, \quad (9)$$

где $\epsilon_{AB} = 2\delta_{AB} - 1$. Число p определяет порядок статистики. Например, в случае парафермионов ($\epsilon = -$) легко получить, что $(b_r)^{p+1} = 0$. В работе ^{/4/} изучалось фоковское представление ПКС и было показано, что эти соотношения не могут в случае свободных полей привести ни к чему иному, кроме как к спектру парастатистик с порядками $p = 1, 2, \dots$. Отсюда следует также, что паралоле всегда однозначно (с точностью до унитарной эквивалентности) можно представлять аналогом Грина. Этих сведений о параквантовании будет достаточно для дальнейшего рассмотрения. Подробную библиографию можно найти в работе ^{/4/} или в обзоре ^{/5/}.

В настоящей работе рассматривается спинорное поле Дирака, квантуемое согласно ПФС второго и третьего порядков. Схема рассмотрения в обоих случаях одинакова. Сначала указывается способ построения всех неприводимых (сепарабельных) представлений ПФС, в отличие от предыдущих работ, в которых исследовалось лишь единственное фоковское представление. Этот способ заключается в выделении из фоковского пространства представления алгебры \mathcal{A} операторов a^A , удовлетворяющих (9), неприводимых представлений алгебры \mathcal{B} операторов b , удовлетворяющих ПКС (2). Затем в найденных неприводимых представлениях алгебры \mathcal{B} рассматриваются векторы, относящиеся к одинаковому числу частиц f с одним и тем же набором одночастичных состояний k_1, \dots, k_r . Внутреннее состояние системы f частиц определяется тогда либо принадлежностью векторов к различным неприводимым представлениям ПФС, что мы будем отмечать индексом α , либо для векторов из одного представления - их симметрией по отношению к перестановкам индексов одночастичных состояний, которую мы будем отмечать индексом ν . Таким образом, вектор определенного внутреннего состояния системы f частиц изображается в виде $|f, \alpha, \nu\rangle$. Далее показывается, что такая классификация состояний в случае ПФС второго порядка совпадает с классификацией состояний двух обычных фермионных полей, обладающих симметрией типа изоспиновой. Вводится явное матричное преобразование паралоля к этим двум обычным полям. Дается решение известного парадокса Галиндо-Индюрена ^{/6/}.

Разбираются свойства взаимодействия параполя Грина-Волкова с обычным электромагнитным полем, нарушающего "изотопическую" симметрию. В случае ПФС третьего порядка рассматриваются лишь состояния одной, двух и трех частиц. Вышеуказанная классификация внутренних состояний частиц соответствует в этом случае классификации "изомультиплетов" по странности". Состояниям внутри "изомультиплетов" соответствуют векторы эквивалентных представлений, возникающих при выделении из большого представления алгебры \mathfrak{G} представлений алгебры \mathfrak{F} . В этом смысле разделение состояний частиц с различной "странностью" происходит заранее в самой схеме классификации. Наконец, в обоих случаях подчеркивается полная аналогия неприводимых представлений ПФС и алгебры высших спинов ^{/2,3,7-9/}. В заключение вводной части отметим, что возможность описания парафермионным полем второго порядка системы частиц двух различных сортов обсуждалась также в работах ^{/1,9/} и в недавней работе ^{/10/}.

2. Неприводимые представления ПФС второго порядка и "изотопический" спин

2.1⁰. Мы построим все неприводимые представления алгебры Грина-Волкова (7), сначала предполагая, что параполе представляется анзацем Грина:

$$b_r = a_r^1 + a_r^2, \quad (10)$$

а затем обобщая полученный результат таким образом, чтобы он не зависел от этого предположения. Всюду ниже мы будем иметь в виду парафермионный случай ($\epsilon = -$), хотя и будем оставлять символ ϵ для возможного обобщения на случай парабозонов ($\epsilon = +$).

Фоковское представление алгебры \mathfrak{G} строится обычным образом: выдвигается требование единственности вакуумного состояния $|0\rangle$ такого, что

$$a_r^\Lambda |0\rangle = 0 \quad \text{для всех } r \quad \text{и } \Lambda = 1, 2, \quad (11)$$

и все векторы представления получаются действием всевозможных полиномов $\mathcal{P}(a^*)$ от операторов a_r^Λ на состояние $|0\rangle$. Такое представление

неприводимо по отношению к алгебре \mathfrak{G} , но приводимо по отношению к алгебре \mathfrak{B} . Для выделения из него неприводимых представлений алгебры \mathfrak{B} введём вспомогательный оператор:

$$b_{rs} = a_{r1} - a_{r2} \quad /12/$$

Вследствие /9/ имеем:

$$\begin{aligned} b_{rs} b_{st} &= \epsilon b_{st} b_{rs}, & b_{rs} b_{st} &= \epsilon b_{st} b_{rs}, & b_{rs} b_{st}^* &= \epsilon b_{st}^* b_{rs}, & b_{rs} b_{st}^* &= \epsilon b_{st}^* b_{rs}, \\ b_{rs} b_{st} &= \epsilon b_{st} b_{rs}, & b_{rs} b_{st}^* &= \epsilon b_{st}^* b_{rs} + 2\delta_{rs}, & b_{rs} b_{st}^* &= \epsilon b_{st}^* b_{rs} + 2\delta_{rs}. \end{aligned} \quad /13/$$

Заметим, что перестановки операторов b и b^* сопровождаются взаимной заменой этих операторов.

Результаты рассмотрения всех неприводимых представлений соотношений Грина-Волкова /7/ формулируются в виде следующей теоремы:

Теорема. Каждое неприводимое (сепарабельное) представление алгебры Грина-Волкова /7/ получается действием всевозможных полиномов $\mathcal{P}(b^*)$ от операторов b^* на младшие векторы

$$\Phi_{r_1 \dots r_f} = b_{r_1}^* b_{r_2}^* b_{r_3}^* \dots |0\rangle, \quad /14/$$

определяемые свойствами:

$$b_{rs} \Phi_{r_1 \dots r_f} = 0, \quad /15/$$

$$b_{rs}^* \Phi_{r_1 \dots r_f} = \epsilon b_{rs}^* \Phi_{r_1 \dots r_{f-1} s}, \quad /16/$$

$$b_{rs} b_{st}^* \Phi_{r_1 \dots r_f} = 2\delta_{rs} \Phi_{r_1 \dots r_f} + 2\epsilon \delta_{rs} \Phi_{s r_1 \dots r_{f-1} t} + \dots + 2\epsilon \delta_{rs} \Phi_{r_1 \dots r_{f-1} t s}. \quad /17/$$

$$\Phi_{r_1 \dots r_{f-1} k \dots r_f} = \epsilon \Phi_{r_1 \dots r_{f-1} k \dots r_{f-1} r_f}. \quad /18/$$

В частности, при $f=0$ определяется обычное фоковское представление с единственным вектором Φ_0 , удовлетворяющим /15/. Для него /17/ принимает вид:

$$b_{rs} b_{st}^* \Phi_0 = 2\delta_{rs} \Phi_0. \quad /19/$$

Условия /15/ - /18/ однозначно (с точностью до унитарной эквивалентности) определяют неприводимое представление, характеризующееся числом f индексов младших векторов.

Неприводимость полученных представлений доказывается так же, как это было сделано для фоковского представления /4/ с помощью леммы Хаага-Шрёера /11/: представление алгебры неприводимо, если оно содержит циклический вектор, а рассматриваемая алгебра содержит оператор проектирования на него. Роль

циклического вектора может выполнять любой из младших векторов представления. Оператор проектирования на него имеет вид:

$$A_{r_1 \dots r_f} = \frac{\sin[\pi(N_{r_1}-1)]}{\pi(N_{r_1}-1)} \dots \frac{\sin[\pi(N_{r_f}-1)]}{\pi(N_{r_f}-1)} \prod_{s \neq r_1 \dots r_f} \frac{\sin(\pi N_s)}{\pi N_s}. \quad (20)$$

поскольку действие оператора числа частиц ^{/4/} на младший вектор дает:

$$N_r \Phi_{r_1 \dots r_f} = \delta_{r r_1} \Phi_{r_2 \dots r_f} + \dots + \delta_{r r_f} \Phi_{r_1 \dots r_{f-1}}. \quad (21)$$

Отметим, что постоянная в определении оператора числа частиц ^{/4/} выбрана так, что

$$N_r |0\rangle = 0. \quad (22)$$

Здесь же мы подчеркнем, что в силу (21) младший вектор $\Phi_{r_1 \dots r_f}$ описывает состояние f - частиц, хотя и удовлетворяет условию (15).

Остается убедиться, что таким путем мы разложили все большое фоксовское представление алгебры \mathfrak{G} на неприводимые представления алгебры \mathfrak{B} . С помощью (13) можно убедиться в том, что каждое последующее представление ортогонально всем предыдущим, и, следовательно, не содержится в них. Далее, число векторов, содержащих f фиксированных индексов и относящихся к различным представлениям:

$$\Phi_{r_1 \dots r_f}, b_{r_1}^* \Phi_{r_2 \dots r_f}, b_{r_1}^* b_{r_2}^* \Phi_{r_3 \dots r_f}, b_{r_2}^* b_{r_1}^* \Phi_{r_3 \dots r_f}, \dots, b_{r_1}^* \dots b_{r_f}^* |0\rangle, \quad (23)$$

составляет вследствие (7), (16), (18) 2^f , что совпадает с числом линейно-независимых векторов:

$$a_{r_1}^{1*} a_{r_2}^{1*} \dots a_{r_f}^{1*} |0\rangle, a_{r_1}^{2*} a_{r_2}^{1*} \dots a_{r_f}^{1*} |0\rangle, \dots, a_{r_1}^{2*} \dots a_{r_f}^{2*} |0\rangle.$$

2.2°. В нашем рассмотрении несущественно то обстоятельство, что индексы r принимают бесконечный ряд значений. Оно справедливо также и тогда, когда этот ряд конечен $r = 1, 2, \dots, M$. В случае $\epsilon = -$ полученные представления будут тогда неприводимыми представлениями алгебры Даффина-Кеммера в евклидовом пространстве четной размерности $2M$. Действительно, введем операторы:

$$\beta_{2r-1} = 1/2(b_r - b_r^*), \quad \beta_{2r} = 1/2(b_r + b_r^*), \quad r = 1, \dots, M. \quad (24)$$

Легко видеть, что они удовлетворяют алгебре Даффина-Кеммера:

$$\beta_k \beta_\ell \beta_m - \epsilon \beta_m \beta_\ell \beta_k = \delta_{k\ell} \beta_m + \delta_{m\ell} \beta_k, \quad k, \ell, m = 1, 2, \dots, 2M \quad (25)$$

Гриновскому азатцу (10) соответствует даффиновское разложение операторов β на операторы спинорных представлений:

$$\beta_m = 1/2(\gamma_m^1 + \gamma_m^2), \quad \gamma_{2r-1}^\Lambda = i(a_r^\Lambda - a_r^{\Lambda*}), \quad \gamma_{2r}^\Lambda = a_r^\Lambda + a_r^{\Lambda*}, \quad \Lambda = 1, 2. \quad (26)$$

В силу (18) число младших векторов каждого представления составляет ${}_m C_r$, а общая размерность этого представления вследствие (7), (16), (18) равна ${}_{2M+1} C_{M-r}$. Эти результаты были получены ранее в работе^{/8/}. Изоморфность ПФС второго порядка алгебре Даффина-Кеммера отмечалась Волковым^{/2/}, и на этой основе полученные выше неприводимые представления изучались Черниковым^{/8/}. В работах^{/3,7,8/} была показана общая связь парафермионного квантования любого порядка с группой вращений в многомерном пространстве (парабозонного квантования - с симплектической группой^{/3/}).

2.3°. Теперь мы можем дать, согласно сказанному во введении, следующее определение "внутреннего" состояния системы i - частиц. Состояние i - частиц определяется принадлежностью к тому или иному неприводимому представлению ПФС, что мы обозначим индексом α , и описывается, соответственно, одним из векторов (23), симметризованным по индексам r_1, \dots, r_f , в соответствии с определенной схемой Юнга (ν). Вектор состояния теперь можно представить в виде $|i, \alpha, \nu\rangle$. Мы можем ввести далее операторы:

$$I_1 = \sum_k \{ 1/4 [b_{k-}^*, b_{k-}] - 1/4 [b_{k+}^*, b_{k+}] \}, \quad (27)$$

$$I_2 = \sum_k \{ i/4 [b_{k-}^*, b_{k-}] + i/4 [b_{k+}^*, b_{k+}] \}, \quad (28)$$

$$I_3 = \sum_k \{ 1/4 [b_{k-}^*, b_{k-\epsilon}] + 1/4 [b_{k+}^*, b_{k+\epsilon}] \} (-\epsilon), \quad (29)$$

$$Y = \sum_k \{ 1/2 [b_{k-}^*, b_{k-\epsilon}] - 1/2 [b_{k+}^*, b_{k+\epsilon}] \}, \quad (30)$$

подчиняющиеся вследствие (13) алгебре:

$$[I_1, I_j] = i \epsilon_{ijk} I_k, \quad [Y, I_1] = 0, \quad (31)$$

которая, конечно, совпадает с алгеброй "изотопического" спина; оператор Y играет роль аддитивного квантового числа ("гипер-заряда"). Векторы неприводимых представлений могут быть классифицированы теперь по собственным значениям Y , I_3 и I^2 : $|f, a, \nu\rangle = |Y, I^2, I_3\rangle$.

2.4⁰. Теперь мы хотим показать, что каждому вектору неприводимого представления ПФС можно взаимоднозначно сопоставить вектор состояния двух обычных фермионных полей, подчиняющихся "изотопической" симметрии. Коммутационные соотношения операторов этих полей имеют нормальный вид:

$$\{ p_r, p_s^* \}_{-\epsilon} = \delta_{rs}, \quad \{ p_r, p_s \}_{-\epsilon} = \{ p_r^*, p_s^* \}_{-\epsilon} = 0, \quad \{ n_r, n_s^* \}_{-\epsilon} = \delta_{rs}, \quad (32)$$

$$\{ n_r, n_s \}_{-\epsilon} = \{ n_r^*, n_s^* \}_{-\epsilon} = 0, \quad \{ p_r, n_s^* \}_{-\epsilon} = \{ p_r, n_s \}_{-\epsilon} = \{ p_r^*, n_s^* \}_{-\epsilon} = 0.$$

Введем в рассмотрение алгебру матриц Паули ($\sigma_{\pm} = \sigma_1 + i\sigma_2$, σ_3). Линейные комбинации:

$$b_r = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_- \cdot p_r + \sigma_+ \cdot n_r), \quad b_r^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_+ \cdot p_r^* + \sigma_- \cdot n_r^*), \quad (33)$$

как можно убедиться непосредственной проверкой, удовлетворяют соотношениям Грина-Волкова (7). Вспомогательный оператор, определяемый соотношениями (13), имеет вид:

$$b_r = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_+ \cdot p_r + \sigma_- \cdot n_r), \quad b_r^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_- \cdot p_r^* + \sigma_+ \cdot n_r^*). \quad (34)$$

Здесь следует подчеркнуть, что операторы b_r , b_r^* , $b_{\bar{r}}$, $b_{\bar{r}}^*$ действуют теперь в пространстве прямого произведения алгебр матриц Паули и алгебры фермионных полей (32). Операторы σ и p , n , конечно, коммутируют. Каждый вектор представления также имеет структуру произведения двух векторов, относящихся к представлениям этих двух алгебр. В частности, вакуумный вектор имеет вид:

$$\Phi_0 = \xi_0 \cdot |0\rangle. \quad (35)$$

Матрицы σ действуют на ξ_0 , и этот вектор мы выберем таким, что

$$\sigma_- \xi_0 = 0, \quad \sigma_- \sigma_+ \xi_0 = 4\xi_0, \quad \sigma_8 \xi_0 = -\xi_0, \quad \sigma_8 \sigma_+ \xi_0 = +\sigma_+ \xi_0. \quad (36)$$

Операторы изоспина (27)-(29) и "гиперзаряда" (3) теперь с помощью (34), (33) можно представить в обычном виде:

$$I_1 = \sum_k \{ c_{k-}^* 1/2 T_1 c_{k-} - c_{k+}^* 1/2 T_1 c_{k+} \} = 1/2 \int d^3x [\Psi(x) \gamma^0, 1/2 T_1 \Psi(x)] \quad (37)$$

$$Y = \sum_k \{ c_{k-}^* c_{k-} - c_{k+}^* c_{k+} \} = 1/2 \int d^3x [\Psi(x) \gamma^0, \Psi(x)] \quad (38)$$

где мы ввели обозначения:

$$T_1 = r_1, \quad T_2 = r_2 \times \sigma_3, \quad T_3 = r_3 \times \sigma_3; \quad (39)$$

матрицы r действуют на столбец:

$$c = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}, \quad \Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_p(x) \\ \psi_n(x) \end{pmatrix}; \quad (40)$$

матрицы σ действуют, по-прежнему, на вектор ξ_0 некоторого дополнительного пространства.

Мы имеем следующую классификацию состояний:

одночастичные состояния образуют изодублет:

$$|Y=1, I=1/2, I_3=+1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} b_k^* \Phi_0 = p_k^* |0\rangle \cdot (1/2 \sigma_+ \xi_0);$$

$$|Y=1, I=1/2, I_3=-1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi_k = \frac{1}{\sqrt{2}} b_{\bar{k}}^* \Phi_0 = n_k^* |0\rangle \cdot (1/2 \sigma_+ \xi_0);$$

двухчастичные состояния образуют изосинглет:

$$|Y=1, I=0, I_3=0\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} [b_{k_1}^*, b_{k_2}^*] \Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (n_{k_1}^*, p_{k_2}^* - p_{k_1}^* n_{k_2}^*) |0\rangle \cdot \xi_0$$

и изотриплет:

$$|Y=2, I=1, I_3=-1\rangle = \frac{1}{2} \Phi_{k_1 k_2} = \frac{1}{2} b_{k_1}^* b_{k_2}^* \Phi_0 = p_{k_1}^* p_{k_2}^* |0\rangle \cdot \xi_0;$$

$$|Y=2, I=1, I_3=0\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} [b_{k_1}^*, b_{k_2}^*] \Phi_0 = \frac{1}{[\sqrt{2}]} (n_{k_1}^*, p_{k_2}^* + p_{k_1}^* n_{k_2}^*) |0\rangle \cdot \xi_0$$

$$|Y=2, I=1, I_3=+1\rangle = \frac{1}{2} b_{k_1}^* b_{k_2}^* \Phi_0 = n_{k_1}^* n_{k_2}^* |0\rangle \cdot \xi_0$$

и т.д. Таким образом, любой вектор неприводимого представления соотношений Грина-Волкова действительно может быть представлен для чётного числа частиц в виде $\mathcal{P}^{\text{чѐт.}} (p^*, n^*) |0\rangle \cdot \xi_0$; для нечѐтного числа частиц - в виде $\mathcal{P}^{\text{нечѐт.}} (p^*, n^*) |0\rangle \cdot (\sigma_+ \xi_0)$, где чѐтность или нечѐтность полиномов относится к полному числу входящих в них операторов p^* и n^* . Оператор I_3 , содержащий согласно (39) матрицу σ_3 , имеет в этих двух случаях в силу (36) собственные значения $\frac{N_n - N_p}{2}$ и $\frac{N_p - N_n}{2}$ соответственно. Однако ввиду ортогональности векторов ξ_0 и $\sigma_+ \xi_0$ переходы между состояниями с чѐтными и нечѐтным числом частиц запрещены. Поэтому в случае чѐтного числа частиц мы можем переобозначить n^* , p^* . Тогда теория паралоля Грина-Волкова окончательно приводится к теории двух обычных полей с проекциями "изоспина" $+1/2$ для p и $-1/2$ для n . Следует отметить, что аналогичное "матричное" пред-

ставление полей, подчиняющихся обобщенным трилинейным коммутационным соотношениям, использовалось Шарфштейном /12/.

2.5⁰. В связи с вышеизложенным можно дать теперь решение парадокса Галиндо-Индюрена /8/. Парадокс заключается в утверждении, что векторы $b_{k_1}^* \dots b_{k_f}^* \Phi_0$ не образуют представлений группы перестановок операторов b^* (см. также /4, 13/). Например, если рассмотреть в случае $\epsilon = -$ вектор $b_{k_1}^* b_{k_2}^* b_{k_3}^* \Phi_0$, то перестановки второго и третьего операторов $b_{k_2}^*$ и $b_{k_3}^*$ приводят в силу (7) к исчезновению вектора. Решение состоит в том, что такие векторы и не должны образовывать представление группы перестановок, так как им соответствуют различные внутренние состояния частиц v и p , и перестановки состояний k_1, \dots, k_f должны сопровождаться одновременно перестановками этих внутренних состояний. В указанном примере мы имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} b_{k_1}^* b_{k_2}^* b_{k_3}^* \Phi_0 = p_{k_1}^* v_{k_2}^* p_{k_3}^* |0\rangle \cdot (\sigma_{\pm} \xi_0),$$

поэтому перестановка только индексов k и s второго и третьего операторов должна, очевидно, привести к нулю. Обращение некоторых из векторов $b_{k_1}^* \dots b_{k_f}^* \Phi_0$ в нуль соответствует тому, что каждому состоянию системы v и p

частиц должна соответствовать взаимнооднозначно лишь один такой вектор.

2.6⁰. Обсудим теперь возможность введения электромагнитного взаимодействия параполя Грина-Волкова, нарушающего "изосимметрию". Обычно взаимодействие парафермионного поля Грина-Волкова с электромагнитным полем вводилось в виде /3, 14-16/:

$$H = 1/2 e A_{\mu}(x) [\bar{\psi}(x) \gamma^{\mu} \psi(x)] = e A_{\mu}(x) : \bar{\Psi}(x) \gamma^{\mu} \Psi(x) : \quad (41)$$

Такое взаимодействие соответствует тому, что v и p поля имеют одинаковые заряды, а потому оно не нарушает симметрию этих полей. С этим было связано появление фактора 2 в сечении процесса фоторождения пары парачастиц /15, 16/. Однако можно определить это взаимодействие по-иному:

$$\begin{aligned} H &= 1/2 e A_{\mu}(x) \{ \bar{\psi}(x) \gamma^{\mu} \psi(x) - \langle \psi(x) \gamma^{\mu} \psi(x) \rangle_0 \} = \\ &= e A_{\mu}(x) : \bar{\Psi}(x) (1/2 + 1/2 T_3) \gamma^{\mu} \Psi(x) : \end{aligned} \quad (42)$$

Тогда заряд будет иметь лишь одно из полей ρ , ν и тем самым симметрия между ними нарушится. Никаких лишних факторов в сечениях при таком определении, конечно, не возникает.

Поскольку во взаимодействие (41) входит коммутаторный ток паралоля, оно инвариантно относительно обычного определения зарядового сопряжения (см., например, [17]):

$$U_0 \psi(x) U_0^{-1} = \eta_0 C \bar{\psi}^T(x), \quad U_0 \bar{\psi}(x) U_0^{-1} = -\bar{\eta}_0 \psi^T(x) C^+ \quad (43)$$

В случае взаимодействия (42) инвариантность относительно преобразования (43) не имеет места. Однако имеет место инвариантность относительно комбинированного преобразования:

$$U_0 \psi(x) U_0^{-1} = \eta_0 C_{\psi} \bar{\psi}^T(x), \quad U_0 \bar{\psi}(x) U_0^{-1} = -\bar{\eta}_0 \psi^T(x) C_{\psi}^+, \quad (44)$$

когда зарядовое сопряжение сопровождается переходом от поля $\psi(x)$ к полю $\psi_{\psi}(x)$ (операторам b_{ψ}^* и b_{ψ}) и наоборот. Вся вышерассмотренная теория инвариантна относительно взаимной замены $\psi \rightarrow \psi_{\psi}$. Действительно, операторы b_{ψ} , как и b , удовлетворяют соотношениям Грина-Волкова (7), а соответствующие неприводимые представления этих соотношений получаются из старых заменой $b \rightarrow b_{\psi}$.

Отметим, что если мы хотим рассматривать переходы между различными внутренними состояниями ("слабые" распады), то есть переходы между неприводимыми представлениями ПФС, то мы должны вводить во взаимодействие токи, содержащие как поле $\psi(x)$, так и поле $\psi_{\psi}(x)$. Тем самым мы вынуждены здесь выйти за рамки собственно теории паралоля, привлекая поле $\psi_{\psi}(x)$ уже не только в качестве вспомогательного при построении неприводимых представлений, но и в качестве поля, входящего в гамильтониан взаимодействия.

3. Неприводимые представления парафермионного поля третьего порядка и "странность"

3.1. Паралоле третьего порядка представляется аналогом Грина:

$$\psi(x) = \sum_{A=1}^3 \psi^A(x), \quad b_r = \sum_{A=1}^3 a_r^A. \quad (45)$$

Построение большого пространства представления алгебры \mathfrak{G} компонент ан-затца Грина производится опять стандартным методом. Выделение из него неприводимых представлений алгебры \mathfrak{F} вновь происходит путем построения в нем младших векторов, удовлетворяющих условиям:

$$b_r f = 0 \quad \text{для всех } r, \quad (46)$$

и затем действием всевозможных полиномов $\mathcal{P}(b^*)$ на эти младшие векторы. Ниже мы выделим лишь несколько первых из них.

Фоковское представление строится на векторе $|0\rangle$ — единственном векторе в этом представлении, удовлетворяющем (46). Для вектора $|0\rangle$ имеет место:

$$b_r b_s^* |0\rangle = 3 \delta_{rs} |0\rangle. \quad (47)$$

Следующие два младших вектора имеют вид:

$$f'_r = (a_r^{1*} - a_r^{2*}) |0\rangle, \quad f''_r = (a_r^{2*} - a_r^{3*}) |0\rangle. \quad (48)$$

Оба они удовлетворяют соотношению (46) и

$$b_r b_s^* f_t = 3 \delta_{rs} f_t - 2 \delta_{rt} f_s, \quad (49)$$

$$b_r^* b_s^* f_t + b_r^* b_t^* f_s + b_s^* b_r^* f_t + b_s^* b_t^* f_r + b_t^* b_r^* f_s + b_t^* b_s^* f_r = 0. \quad (50)$$

Взяв ортогональные комбинации векторов (48) (например, их сумму и разность) Φ'_r и Φ''_r , мы получим два эквивалентных ортогональных неприводимых представления алгебры \mathfrak{F} . Отметим, что в силу (46) и (49) действие оператора числа частиц (3) ($p=3$) на эти младшие векторы дает

$$N_r \Phi_s^{(i)} = \delta_{rs} \Phi_r^{(i)}, \quad (i=1,2). \quad (51)$$

Мы видим, что младшие векторы $\Phi_r^{(1)}$ описывают одночастичные состояния.

Три следующих младших вектора имеют вид:

$$f'_{rs} = (a_r^{1*} - a_r^{2*})(a_s^{1*} + a_s^{2*})|0\rangle, f''_{rs} = (a_r^{2*} - a_r^{3*})(a_s^{2*} + a_s^{3*})|0\rangle, f'''_{rs} = (a_r^{1*} - a_r^{3*})(a_s^{1*} + a_s^{3*})|0\rangle \quad (52)$$

и удовлетворяют соотношениям:

$$b_r b_s^* f_{tu} = 3 \delta_{rs} f_{tu} - 2 \delta_{rt} f_{su} - 2 \delta_{ru} f_{ts} \quad (53)$$

$$f_{rs} = -f_{sr} \quad (54)$$

Взяв три ортогональных комбинации этих векторов $\Phi_r^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) и действуя на них всевозможными полиномами $\mathcal{P}(b^*)$, получим три эквивалентных ортогональных неприводимых представления алгебры \mathfrak{B} . В силу (46) и (53) действие оператора числа частиц (4) дает:

$$N_r \Phi_{st} = \delta_{rs} \Phi_{st} + \delta_{rt} \Phi_{st} \quad (55)$$

и, следовательно, младшие векторы $\Phi_{rs}^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) описывают двухчастичные состояния.

Следующие четыре младших вектора имеют вид:

$$f'_{rst} = (a_r^{1*} - a_r^{2*})(a_s^{1*} + a_s^{2*})(a_t^{1*} - a_t^{2*})|0\rangle, f''_{rst} = (a_r^{1*} - a_r^{3*})(a_s^{1*} + a_s^{3*})(a_t^{1*} - a_t^{3*})|0\rangle \quad (56)$$

$$f'''_{rst} = (a_r^{2*} - a_r^{3*})(a_s^{2*} + a_s^{3*})(a_t^{2*} - a_t^{3*})|0\rangle, f^{IV}_{rst} = \{ -(a_r^{1*} - a_r^{2*})(a_s^{1*} - a_s^{3*})(a_t^{1*} + a_t^{3*}) + (a_r^{1*} - a_r^{3*})[(a_s^{1*} - a_s^{2*})(a_t^{1*} + a_t^{2*}) + (a_s^{2*} + a_s^{3*})(a_t^{2*} - a_t^{3*})] \} |0\rangle.$$

Они удовлетворяют условиям (46), антисимметричны по индексам r, s, t ,

$$f_{rst} = -f_{srt} = -f_{rts} \quad (57)$$

$$b_u b_v^* f_{rst} = 3 \delta_{uv} f_{rst} - 2 \delta_{ur} f_{vst} - 2 \delta_{us} f_{rvt} - 2 \delta_{ut} f_{rsv} \quad (58)$$

Ортогонализируя векторы (56), найдем четыре ортогональных комбинации ($\Phi_{rst}^{(i)} = 1, 2, 3, 4$) и далее построим четыре ортогональных эквивалентных неприводимых представления. Аналогично предыдущему легко убедиться, что $\Phi_{rst}^{(i)}$ описывают трехчастичные состояния. Мы ограничимся проделанным построением, поскольку в дальнейшем рассмотрим лишь состояния с числом частиц не большим трех.

3.2⁰. Внутреннее состояние системы l -частиц будет определяться теперь вектором состояния $|f, \alpha, \nu, \beta\rangle$, в котором 1) индекс α указывает принадлежность вектора к той или иной группе эквивалентных представлений, 2) индекс ν указывает симметрию (схему Юнга) вектора относительно перестановок одночастичных состояний, 3) индекс β указывает принадлежность вектора к определенному представлению из группы α эквивалентных. Векторы, отличающиеся признаками 1) и 2), будем называть существенно различными. Состояния, изображаемые этими векторами, как мы увидим ниже, можно сопоставить в обычной классификации по симметрии SU_3 состояниям с различной странностью. Для векторов же, отличающихся лишь признаком 3), можно составлять любые ортогональные комбинации, не нарушая неприводимость представлений. Иначе говоря, в пространстве эквивалентных представлений можно производить любые повороты, и поэтому векторы этих представлений можно сопоставить состояниям с различными изоспиновыми состояниями при одинаковом значении странности.

Мы получаем следующую классификацию.

Одночастичные состояния образуют изотриплет $\frac{1}{\sqrt{3}} b_{r\pm}^* |0\rangle$ и изодублет $\Phi_{r\pm}^{(i)}$ ($i = 1, 2$).

Состояния системы частица - античастица составляют два изодублета

$$\frac{1}{2\sqrt{6}} [b_{r-}^* + b_{s+}^*] |0\rangle \quad \text{и} \quad -\frac{1}{2\sqrt{3}} [b_{r-}^* - b_{s+}^*] |0\rangle,$$

два изотриплета

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (b_{r-}^* \Phi_{s+}^{(i)} + b_{s+}^* \Phi_{r-}^{(i)}), \quad (i = 1, 2) \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{10}} (b_{r-}^* \Phi_{s+}^{(i)} - b_{s+}^* \Phi_{r-}^{(i)}), \quad (i = 1, 2),$$

один изотриплет $\Phi_{r-s}^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$).

При классификации трехчастичных состояний учет свойств симметрии несколько сложнее. Для произвольной функции f_{xyz} можно составить шесть комбинаций, принадлежащих к различным неприводимым представлениям группы перестановок индексов x, y, z : к симметричному и антисимметричному представлениям при-

надлежит по одной комбинации; к 1-ому двумерному представлению смешанной симметрии принадлежат: комбинация, симметричная по x и y , $2f_{xyx} + 2f_{xyy} - f_{xyx} - f_{yux} - f_{yux} - f_{yux} - f_{yux}$ и комбинация, антисимметричная по x и y ,

$$f_{xyx} + f_{yxy} - f_{yxy} - f_{yxy};$$

ко II - му двумерному представлению смешанной симметрии, эквивалентному первому, принадлежат: комбинация, симметричная по x и y , $2f_{xyx} + 2f_{yxx} - f_{xyx} - f_{yux} - f_{yux} - f_{yux} - f_{yxy}$,

и комбинация, антисимметричная по x и y , $f_{yux} + f_{yux} - f_{yux} - f_{yxy}$.

При конструировании трехчастичных состояний следует учитывать соотношения Грина (2) ($\epsilon = -$):

$$b_r^* b_s^* b_t^* - b_r^* b_s^* b_t^* - b_r^* b_s^* b_t^* + b_r^* b_s^* b_t^* = 0 \quad b_r^* b_s^* b_t^* - b_r^* b_s^* b_t^* - b_r^* b_s^* b_t^* + b_r^* b_s^* b_t^* = 0, \quad (50)$$

а также соотношение (50) и свойства антисимметрии младших векторов по своим индексам. Мы получаем следующую классификацию.

Единственный симметричный вектор образует синглет:

$$1/2 \sqrt{6} (1 + \delta_{rs} + \delta_{ta} + \delta_{rt} + 2\delta_{st}) (b_r^* b_s^* b_t^* + b_t^* b_s^* b_r^*) |0\rangle.$$

Антисимметричные векторы образуют декуплет

- изосинглет $(1/6\sqrt{5})(2b_r^* b_s^* b_t^* = 2b_r^* b_t^* b_s^* - b_r^* b_s^* b_t^* + b_t^* b_r^* b_s^*) |0\rangle,$
 изодублет $(1/\sqrt{5})(b_r^* b_s^* \Phi_t^{(i)} + b_t^* b_r^* \Phi_s^{(i)} + b_s^* b_t^* \Phi_r^{(i)}), (i=1,2),$
 изотриплет $(1/\sqrt{21})(b_r^* \Phi_{st}^{(i)} - b_s^* \Phi_{rt}^{(i)} - b_t^* \Phi_{sr}^{(i)}), (i=1,2,3)$
 изоквартет $\Phi_{rst}^{(i)} (i=1,2,3,4).$

Векторы смешанной симметрии, но симметричные по r и s образуют октет:

- изосинглет $(1/2\sqrt{6}(\dots))(b_r^* b_s^* b_t^* - b_t^* b_s^* b_r^*) |0\rangle,$
 два изодублета $(1/\sqrt{2}(1+4/\sqrt{21})(\dots))[(1/2\sqrt{3})(b_r^* b_s^* \Phi_t^{(i)} + b_s^* b_r^* \Phi_t^{(i)}) \pm (1/\sqrt{7})(b_r^* b_t^* \Phi_s^{(i)} + b_s^* b_t^* \Phi_r^{(i)})], (i=1,2)$
 изотриплет $(1/\sqrt{(\dots)})(b_r^* \Phi_{st}^{(i)} + b_s^* \Phi_{rt}^{(i)}), (i=1,2,3)$
 здесь $(\dots) = (2 - \delta_{rt} + 2\delta_{rs} - \delta_{st} - 2\delta_{st} \delta_{rt}).$

Векторы смешанной симметрии, но антисимметричные по r и s , также образуют октет:

- изосинглет $(1/6\sqrt{2}(\dots))(2b_r^* b_t^* b_s^* - b_s^* b_r^* b_t^* - b_t^* b_s^* b_r^*) |0\rangle,$
 два изодублета $(1/\sqrt{2}(1+4/\sqrt{21})(\dots))[(1/6)(b_r^* b_t^* \Phi_s^{(i)} + b_t^* b_r^* \Phi_s^{(i)} - b_t^* b_s^* \Phi_r^{(i)} - b_s^* b_t^* \Phi_r^{(i)}) \pm (1/\sqrt{21})(b_r^* b_s^* \Phi_t^{(i)} + b_t^* b_s^* \Phi_r^{(i)} - b_s^* b_r^* \Phi_t^{(i)} - b_t^* b_r^* \Phi_s^{(i)})], (i=1,2),$

изотриплет $(1/\sqrt{3}(\dots))(2b_t^* \Phi_{tr}^{(1)} + b_r^* \Phi_{tr}^{(1)} - b_p^* \Phi_{tr}^{(1)})$, $(i=1,2,3)$.

Здесь $(\dots) = (2 + \delta_{rt} - 2\delta_{ra} + \delta_{ra} - 2\delta_{at} \delta_{rt})$.

3.3⁰. Итак, при указанной выше классификации состояний парчастиц возникли те же мультиплеты, что и в случае классификации согласно составной модели SU_8 симметрии физических частиц, когда все частицы строятся из триплетов кварков. Однако здесь следует отметить, что возникшее раньше, в согласии с классификацией неприводимых представлений ПКС, разделение состояний на существенно различные и эквивалентные соответствует расщеплению состояний с различной странностью. Так, в триплете одночастичных состояний одно из состояний $(1/\sqrt{3})b_r^* |0\rangle$ выделено по отношению к двум другим $\Phi_r^{(i)} (i=1,2)$, относящимся к эквивалентным представлениям, что соответствует выделенности λ -кварка по отношению к p и n -кваркам.

Теперь мы вновь хотели бы подчеркнуть аналогию между представлениями ПФС и алгеброй высших спинов в многомерном пространстве четного числа измерений. Как и в случае параквантования второго порядка, можно определить эрмитовы операторы:

$$\beta_m = \gamma_m^1 + \gamma_m^2 + \gamma_m^3, \quad (80^1)$$

где операторы γ_m^A определяются (28) при $A=1,2,3$. Построению неприводимых представлений ПФС будет тогда соответствовать выделение представлений с определенным "спином". Так, в случае аналогии с четырехмерным пространством представлению спина 3/2 и двум эквивалентным представлениям спина 1/2, получающимся из-за двух различных способов сложения трех половинных спинов в половинный спин, соответствуют представления, образованные на младших векторах $|0\rangle$, Φ_r' и Φ_r'' . В этом смысле выделенности λ -кварка по отношению к p - и n -кваркам отвечает различие представления со "спином" 3/2 от двух эквивалентных представлений со "спином" 1/2.

4. Заключение

Произведенное рассмотрение показывает, что действительно схемы ПФС второго и третьего порядков можно использовать для введения таких внутренних переменных частиц, как "изоспин" и "странность". С другой стороны, оно пока-

зывает, что в этих схемах не содержится иных обобщений статистик тождественных частиц, кроме учёта для обычных статистик внутренних степеней свободы. Поэтому заманчивое предложение^{/18/} считать кварковые поля подчиняющимися ПФС третьего порядка, по-видимому, эквивалентно предположению наличия у них внутренней дополнительной степени свободы. Это же относится и к предположению^{/13/} рассматривать электрон и μ -мезон отличающимися схемами квантования соответствующих полей.

Наконец, отметим различие схем ПФС второго и третьего порядков. В первом случае удалось не только построить полную классификацию состояний парачастиц и показать ее тождественность с классификацией по "изоспину", но также ввести электромагнитное взаимодействие, нарушающее "изоспиновую" симметрию. В случае ПФС третьего порядка, хотя классификация состояний по "странности" и "изомультиплетам" возникла автоматически, возможность введения взаимодействия, нарушающего симметрию, представляется вопросом открытым. Это связано с тем, что в случае ПФС второго порядка оба тока, взятые в виде коммутатора и в виде антикоммутатора, локальны. Поэтому в электромагнитном взаимодействии (42) оказалось возможным ввести их сумму. В случае же ПФС третьего порядка локален лишь коммутаторный ток. Антикоммутаторный ток в этом случае нелокален и может входить, как показано в работе^{/4/}, лишь во взаимодействие с парабозонным полем также третьего порядка. По крайней мере, можно утверждать, что хотя обе схемы оказались во многом схожими при классификации состояний частиц, они могут оказаться существенно различными при введении взаимодействий, нарушающих внутреннюю симметрию этих частиц. Автор отдаёт себе также отчёт в том, что всё вышележащее может носить характер лишь предварительных наводящих соображений о возможности последовательного введения в теорию поля внутренних симметрий с помощью обобщенных схем квантования.

В заключение автор хотел бы выразить глубокую благодарность А.М.Балдину и С.Б. Герасимову за неоднократное обсуждение изложенных выше вопросов.

Замечание при корректуре: В недавно опубликованном препринте^{/19/} также рассматривается замена трilinearных соотношений Грина-Волкова (7) билинейными соотношениями, аналогичными соотношениям (13) настоящей работы.

Л и т е р а т у р а

1. H.S.Green, Phys. Rev., 90, 170 (1953).
2. Д.В. Волков, ЖЭТФ, 36, 1560 (1959); 38, 518 (1960).
3. S.Kamefuchi, Y.Takahashi, Nucl. Phys., 36, 177 (1962).
4. O.W.Greenberg, A.M.L.Messiah, Phys. Rev., 138B, 1155 (1965).
5. А.Б.Говорков, в сборнике "Физика высоких энергий и теория элементарных частиц", из-во "Наукова Думка"; Киев, 1967 г., стр. 770.
6. A.Galindo, F.J.Indurain, Nuovo Cim., 30, 1040 (1963).
7. C.Ryan, E.C.G.Sudarshan, Nucl.Phys., 47, 207 (1963).
8. T.F.Jorden, N.Mukunda, S.V.Pepper, J.Math.Phys., 4, 1089 (1963).
9. N.A.Chernikov, Acta Phys. Polonica, 21, 51 (1962).
10. P.V.Landshoff, H.P.Stapp, "Identical particles and parastatistics", preprint UCRL-17310, 1967.
11. R.Haag, D.Schroer, J.Math. Phys., 3, 248 (1962).
12. H.Scharfstein, Phys. Rev., 158, 1254 (1967).
13. O.W.Greenberg, in "Mathematical Theory of Elementary Particles", MIT Press, 1966, p. 29.
14. J.C.McCarty, Proc. Camb. Phil. Soc., 51, 131 (1955).
15. S.Kamefuchi, J.Strathdee, Nucl. Phys., 42, 166 (1963).
16. А.П.Аматуни, ЖЭТФ, 47, 925 (1964).
17. С.Швебер, "Введение в релятивистскую квантовую теорию поля", ИИЛ, Москва, 1963 г.
18. O.W.Greenberg, Phys. Rev. Lett., 13, 598 (1964).
19. H.Feshback, N.Toljjanovich, preprint "Selection rules for parefields" (submitted to Annals of Physics), MIT, September, 1967.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 ноября 1967 года.