ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р4 - 3568

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Ю.С. Поль, В.К. Лукьянов, И.Ж. Петков

ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В РАССЕЯНИИ ЧАСТИЦ НА ЯДРАХ

1967.

Р4 - 3568

Ю.С. Поль, В.К. Лукьянов, И.Ж. Петков

ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В РАССЕЯНИИ ЧАСТИЦ НА ЯДРАХ

Направлено в
Acta Ph. Pol.

1. Введение

Задачу рассеяния частиц высокой энергии на ядрах в феноменологической постановке часто сводят к решению соответствующего волнового уравнения с заданным потенциалом взаимодействия и вычислению амплитуды рассеяния. Однако из-за квазиклассического характера задачи ($kR \gg 1$) при обычном подходе (метод парциальных волн) встречается ряд трудностей, связанных с вычислением большого числа фаз рассеяния, и, с другой стороны, с суммированием знакопеременного медленно сходящегося ряда для амплитуды. Кроме того, этот подход вообще не применим в случае сферически-несимметричных потенциалов, которые необходимо рассматривать для описания рассеяния на деформированных ядрах.

В связи с этим в ряде работ[1,2] развивались приближенные методы, опирающиеся на характерные черты таких задач (в основном это квазиклассичность движения и большая энергия падающих частиц). Общий результат этих работ состоял в том, что амплитуду рассеяния удавалось выразить в виде сравнительно простого интеграла. Однако ряд конкретных сравнений полученных результатов с точными расчетами методом парциальных волн показал[3], что возникали расхождения как для абсолютных значений сечений (от 10% до 50%), так и в детальной картине углового распределения.

Для спинорных релятивистских частиц одна из основных причин таких расхождений связана с необходимостью (в рамках исходных приближений) более точно найти спинорный фактор волновой функции (или амплитуды) рассеиваемой частицы. В наиболее ясной форме эти вопросы были рассмотрены в работе[4] на примере конкретной задачи рассеяния электронов в кулоновском поле ядра, где авторы нашли квазиклассическое решение уравнения Дирака с массой $M_e = 0$, в приближении $\frac{V}{E} \ll 1$.

Настоящая работа посвящена исследованию решения уравнения Дирака в более общем случае, когда потенциал содержит ядерное оптическое взаимодействие, а массой частицы нельзя пренебрегать по сравнению с ее энергией. Этот вопрос важен, например, при рассмотрении рассеяния ядерных частиц.

Так, в разделе 2 получено квазиклассическое, в приближении $\frac{V}{E} \ll 1$, решение уравнения Дирака с $M \neq 0$ в предположении, что потенциал взаимодействия включает мнимую добавку, отвечающую поглощению ядерных частиц. Найденные волновые функции содержат в качестве множителя спинорные функции $u(\vec{r})$, которые существенно модифицируют выражения для амплитуды рассеяния по сравнению с полученными ранее /1,2/, и играют важную роль в детальном описании углового распределения. С другой стороны, в частном случае, когда $M = 0$ и $\mathrm{Im}\, V = 0$, эти функции совпадают с полученными в работе /4/.

Далее в разделе 3 на базе этих функций записываются и исследуются различные выражения для амплитуды и сечения в области малых углов рассеяния $\theta < \frac{1}{kR}$, и в наиболее интересной области больших углов $\theta > \frac{1}{kR}$, где наблюдается дифракционная картина. В этом случае сечение удается выразить через одномерные интегралы, что удобно в практических приложениях.

2. *Решение уравнения Дирака*

Будем решать уравнение Дирака с оптическим потенциалом $\bar{V}(\vec{r}) = V(\vec{r}) + iW(\vec{r})$

$$(-i\vec{\alpha}\vec{\nabla} + \beta M + \bar{V}(\vec{r}) - E)\,\Psi(\vec{r}) = 0 \tag{2.1}$$

при условии, что

$$E \gg |\bar{V}| \qquad kR \gg 1 \tag{2.2}$$

(здесь и далее $\hbar = c = 1$).

Представим решение в виде:

$$\Psi(\vec{r}) = u(\vec{r})\, e^{i\bar{S}(\vec{r})}, \tag{2.3}$$

где $u(\vec{r})$ – спинорная функция; $\bar{S}(\vec{r})=S(\vec{r})+i\rho(\vec{r})$, $S(\vec{r})$, и $\rho(\vec{r})$ – действительные функции. Подставляя (2.3) в (2.1), получим:

$$(\vec{\alpha}\vec{\nabla}\bar{S}+\beta M+\bar{V}-E)u(\vec{r})=i\vec{\alpha}\vec{\nabla}u(\vec{r}) . \tag{2.4}$$

Спинорная функция $u(\vec{r})$ при условии (2.2) слабо зависит от $\vec{r}$, поэтому, пренебрегая правой частью в (2.4), запишем:

$$(\vec{\alpha}\vec{\nabla}\bar{S}(\vec{r})+\beta M+\bar{V}(\vec{r})-E)u(\vec{r})=0 . \tag{2.5}$$

Это уравнение будем считать исходным для определения функций $S(\vec{r})$ и $\rho(\vec{r})$.

После умножения (2.5) на оператор

$$(\vec{\alpha}\vec{\nabla}\bar{S}+\beta M+E-\bar{V})$$

получим:

$$(\vec{\nabla}\bar{S}(\vec{r}))^2+M^2-(E-\bar{V}(\vec{r}))^2=0 ,$$

где отделение действительной и мнимой части приводит к системе двух уравнений на неизвестные функции $S(\vec{r})$ и $\rho(\vec{r})$

$$\vec{\nabla}S+M^2-(E-V)^2-(\vec{\nabla}\rho)^2+W^2=0 \tag{2.6}$$

$$(\vec{\nabla}S\cdot\vec{\nabla}\rho)+(E-V)W=0 . \tag{2.7}$$

Введем действительный "эффективный потенциал" V_{ef} :

$$(E-V_{ef})^2=(E-V)^2+(\vec{\nabla}\rho)^2-W^2 . \tag{2.8}$$

Тогда (2.6) принимает вид:

$$(\vec{\nabla}S)^2=(E-V_{ef})^2-M^2 \tag{2.9}$$

и формально совпадает с классическим релятивистским уравнением Гамильтона-Якоби. Его решения определяют совокупность классических траекторий движения частицы в поле "эффективного потенциала" V_{ef}. Эффективный импульс $\vec{P}_{ef} = \vec{\nabla} S(\vec{r})$ направлен по касательной в каждой точке этой траектории.

Решение уравнения (2.9) можно записать в виде интеграла по траектории:

$$S(\vec{r}) = S(\vec{r}_0) + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \sqrt{(E - V_{ef})^2 - M^2}\, ds, \tag{2.10}$$

где ds - элемент длины вдоль траектории, а константы $S(\vec{r}_0)$ и $\vec{r}_0$ выбираются в соответствии с граничными условиями. В обычной постановке задачи, когда пучок падающих частиц направлен по оси oz, а начало координат совпадает с центром рассеивающего поля, необходимо, чтобы при $\vec{r} \to \infty$ $(z \to -\infty)$, $S(\vec{r}) \to kz$; поэтому следует положить $S(\vec{r}_0) = \vec{k}\vec{r}_0$, $\vec{r}_0 = \infty$, $(z_0 = -\infty)$. Аналогичным образом, из уравнения (2.7), находим

$$\rho(\vec{r}) = \rho(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \frac{(E - V)W}{\sqrt{(E - V_{ef})^2 - M^2}}\, ds. \tag{2.11}$$

Здесь, в силу граничных условий, при $\vec{r} \to \infty$ $(z \to -\infty)$ должно быть $\rho(\vec{r}) \to 0$ и поэтому $\rho(\vec{r}_0) = 0$.

Отметим, что полученные решения (2.10) и (2.11) являются, в некотором смысле, формальными, поскольку сам эффективный потенциал V_{ef} выражается через искомую функцию $\rho(\vec{r})$ (см. 2.8). Отыскание точных функций S и ρ требует совместного решения этих уравнений и является весьма сложной задачей.

Однако в принятом нами приближении (2.2) функции $S(\vec{r})$ и $\rho(\vec{r})$ легко можно найти, разлагая (2.10) и (2.11) в ряд и ограничиваясь членами первого порядка по степеням $\frac{V}{E}$. В этом случае соответствующие траектории интегрирования будут прямыми линиями. Окончательные выражения имеют, таким образом, следующий вид:

$$S(\vec{r}) = \vec{k}\vec{r} - \frac{E}{k} \int_0^{\infty} V(\vec{r} - \hat{k}s)\, ds \tag{2.12}$$

$$\rho(\vec{r}) = -\frac{E}{k} \int_0^{\infty} W(\vec{r} - \hat{k}s) \left(1 + \frac{M^2}{k^2} \frac{V(\vec{r} - \hat{k}s)}{E}\right) ds, \tag{2.13}$$

где $\vec{k}$ – волновой вектор, $|\vec{k}| = k = \sqrt{E^2 - M^2}$, $\hat{k} = \dfrac{\vec{k}}{k}$.

После того как найдены функции $S(\vec{r})$ и $\rho(\vec{r})$, можно перейти к отысканию спинорной части волновой функции (2.3) из уравнения (2.5).

Представим решение этого уравнения в виде:

$$u(\vec{r}) = N(\vec{r})\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{\sqrt{(E - V_{ef})^2 - M^2}}\ (\vec{\alpha}\,\vec{\nabla}\,\bar{S} + \beta M + E - \bar{V})\ v\ , \tag{2.14}$$

где константный спинор v удовлетворяет уравнению

$$(\vec{\alpha}\,\vec{k} + \beta M - E)\ v = 0\ . \tag{2.15}$$

Теперь перейдем к определению нормировочной функции $N(\vec{r})$. Для этого воспользуемся условием сохранения тока, полученного из точного уравнения (2.4):

$$\vec{\nabla}\,(e^{-2\rho}\ u^+\,\vec{\alpha}\,u) = 2\,W\ e^{-2\rho}u^+\ u\ , \tag{2.16}$$

где возникновение правой части связано с мнимой добавкой в оптическом потенциале. Если поглощение отсутствует, то $W = 0$, $\rho = 0$ и (2.16) переходит в обычное уравнение непрерывности $\vec{\nabla}\,(u^+\,\vec{\alpha}\,u) = 0$.

Выражения для u^+u и $u^+\vec{\alpha}\,u$, полученные с помощью (2.14), имеют следующий вид:

$$u^+u \cong N(\vec{r})^2\ \frac{1}{2}\,(A(\vec{r}) + B(\vec{r})\,(\hat{k}\,\hat{n}_s)) \tag{2.17}$$

$$u^+\vec{\alpha}\,u \cong N(\vec{r})^2\ \frac{1}{2}\Big(\frac{k}{E}\,(\hat{k}\,\hat{n}_s) + C(\vec{r})\Big)\hat{n}_s\ , \tag{2.18}$$

где

$$A(\vec{r}) = \Big\{1 + \frac{M^2}{(E - V_{ef})^2 - M^2}\Big(1 + \frac{E - V}{E}\Big)\Big\} \approx 1 + 2\,\frac{M^2}{k^2} - \Big(1 - 4\,\frac{E^2}{k^2}\Big)\,\frac{M^2}{k^2}\,\frac{V}{E}\ ,$$

$$B(\vec{r}) = \frac{k}{E}\ \frac{(E - V)}{\sqrt{(E - V_{ef})^2 - M^2}} \approx 1 + \frac{M^2}{k^2}\,\frac{V}{E}\ , \tag{2.19}$$

$$C(\vec{r}) = \frac{(E-V)}{\sqrt{(E-V_{ef})^2 - M^2}}\left(1 + \frac{M^2}{E(E-V)}\right) \approx \frac{E}{k}\left(1 + \frac{M^2}{E^2} + 2\frac{M^2}{k^2}\frac{V}{E}\right).$$

$$\hat{n}_s(\vec{r}) = \frac{\vec{\nabla} S(\vec{r})}{|\vec{\nabla} S(\vec{r})|} \approx \hat{k}\left(1 + \frac{E^2}{k^2}\frac{V}{E}\right) - \frac{E^2}{k^2}\frac{\vec{\nabla}\Phi(\vec{r})}{E}, \quad \Phi(\vec{r}) = \int_0^\infty V(\vec{r} - \hat{k}s)\,ds.$$

При этом для вычисления матричных элементов типа $v^+\hat{Q}\,v$ мы пользовались уравнением (2.15) и условием нормировки $v^+v = 1$ (например, $v^+\vec{\alpha}\,v = \frac{\vec{k}}{E}$, $v^+\beta v = \frac{M}{E}$ и т.д.) и ограничились членами первого порядка по V/E.

Уравнение непрерывности (2.16) принимает теперь вид:

$$\vec{\nabla}\left(N^2 e^{-2\rho}\left(\frac{k}{E}(\hat{k}\hat{n}_s) + C\right)\hat{n}_s\right) = 2WN^2 e^{-2\rho}\left(A + B(\hat{k}\hat{n}_s)\right). \tag{2.20}$$

Проинтегрируем далее обе части уравнения (2.20) по объему трубки тока (см. рис. 1) и преобразуем объемный интеграл от левой части в интеграл по поверхности трубки, используя теорему Гаусса:

$$I_s = \int_s N^2 e^{-2\rho}\left(\frac{k}{E}(\hat{k}\hat{n}_s) + C\right)(\hat{n}_s\hat{n})\,ds, \tag{2.21}$$

где $\hat{n}(\vec{r})$ – внешняя нормаль к поверхности трубки. Скалярное произведение $(\hat{n}_s\hat{n}) \neq 0$ только на боковых поверхностях D_0 и $D(\vec{r})$. Отодвигая поверхность D_0 на $\vec{r}_0 = \infty$ ($z_0 = -\infty$), получим:

$$I_s = Const + D(r)\,N^2 e^{-2\rho}\left(\frac{k}{E}(\hat{k}\hat{n}_s) + C\right). \tag{2.22}$$

Объемный интеграл от правой части (2.20) оценим приближенно, считая, что трубка тока имеет достаточно малое сечение

$$\begin{aligned} I_v &= 2\int_v WN^2 e^{-2\rho}\left(A + B(\hat{k}\hat{n}_s)\right)dv \approx \\ &\approx 2\int_{-\infty}^{z} D(\vec{r}\,')\,W(\vec{r}\,')\,N(\vec{r}\,')^2 e^{-2\rho}\left(A(\vec{r}\,') + B(\vec{r}\,')(\hat{k}\hat{n}_s)\right)dz'. \end{aligned} \tag{2.23}$$

После дифференцирования (2.22) и (2.23) по Z получим уравнение

$$DN^2 e^{-2\rho} 2W(A + B(\hat{k}\hat{n}_s)) = \frac{\partial}{\partial z}\left[DN^2 e^{-2\rho}\left(\frac{k}{E}(\hat{k}\hat{n}_s) + C\right)\right],$$

решение которого относительно $(DN^2 e^{-2\rho})$ дает для нормировочной функции $N(\vec{r})$:

$$N(\vec{r}) = \sqrt{\frac{D_0}{D}}\, e^{\rho} \sqrt{\frac{2k/E}{\left(\frac{k}{E}(\hat{n}_s\hat{k}) + C\right)}}\; e^{\int\limits_{-\infty}^{z} W \frac{(A + B(\hat{k}\hat{n}_s))}{(\frac{k}{E}(\hat{k}\hat{n}_s) + C)} dz'}, \qquad (2.24)$$

где D_0 – значение сечения $D(\vec{r})$ на $r = \infty$ $(z = -\infty)$, и было использовано, что

$$N_0 = \frac{k}{E}, \quad C_0 = \frac{E^2 + M^2}{kE}, \quad (\hat{k}\hat{n}_s)_0 = 1 .$$

Теперь остается оценить отношение площадей $\frac{D_0}{D}$, что мы сделаем, воспользовавшись условием сохранения углового момента (см. также работу [4])

$$[\vec{r}\ \vec{P}_{ef}]|_{z=-\infty} = [\vec{r}\ \vec{P}_{ef}]|_{z=z'}$$

то есть (см. рис. 1) $r_0 k = r_1\sqrt{(E - V_{ef})^2 - M^2}$.

В действительном эффективном потенциале число трубок сохраняется, поэтому

$$\sqrt{\frac{D_0}{D}} = \frac{r_0}{r_1} = \frac{\sqrt{(E - V_{ef})^2 - M^2}}{k} . \qquad (2.25)$$

Таким образом, задача нахождения нормирочной функции $N(\vec{r})$ завершена, и можно записать окончательное выражение для волновой функции (2.3), ограничиваясь всюду членами первого порядка по V/E :

$$\Psi^{(+)}(\vec{r}, \vec{k}_1) = N_1(\vec{r}, \vec{k}_1)\ \frac{1}{2E}(\vec{\alpha}\vec{\nabla}\bar{S}_1(\vec{r}, \vec{k}_1) + \beta M + E - \bar{V}(\vec{r}))\, e^{i\bar{S}_1(\vec{r},\vec{k}_1)}\ v_1, \quad (2.26)$$

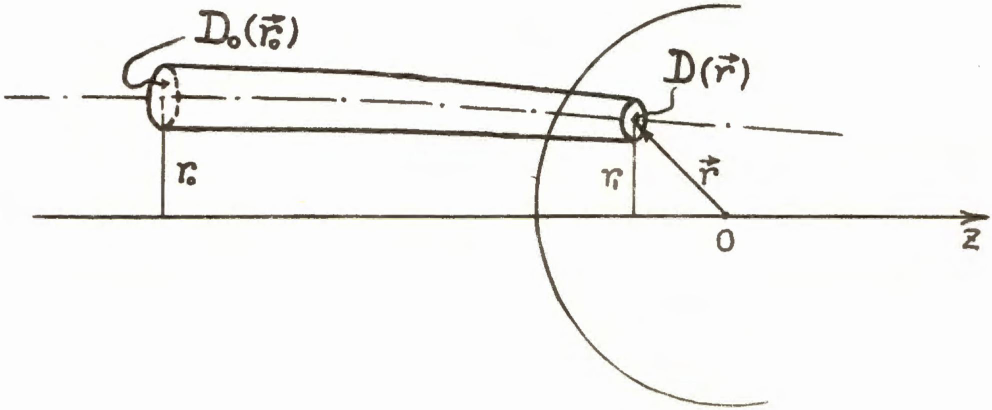
где

$$N_1(\vec{r}, \vec{k}_1) = \left(1 - \frac{1}{4}\frac{V}{E} + \frac{(\hat{k}_1\vec{\nabla}\Phi_1)}{4E} - \frac{1}{2}\frac{M^2}{k^2}\frac{V}{E}\right)$$

и

$$\bar{S}_1 = S_1 + i\rho_1$$

$$S_1=\vec{k}_1\vec{r}-\frac{E}{k}\Phi_1(\vec{r},\vec{k}_1),\quad \rho_1=-\frac{E}{k}\int_0^\infty W(\vec{r}-\hat{k}_1 s)\,ds,\quad \Phi_1=\int_0^\infty V(\vec{r}-\hat{k}_1 s)\,ds\,. \tag{2.27}$$



Р и с. 1.

Итак, получено выражение для волновой функции уравнения Дирака с $M \neq 0$ в квазиклассическом приближении, при этом в фазе и предэкспоненциальном множителе оставлялись члены нулевого и первого порядка разложения по степеням $\frac{V}{E} \ll 1$. В частном случае при $M = 0$ и $W = 0$ это выражение совпадает с волновой функцией, полученной в работе/4/.

Отметим, что, как и обычно в квазиклассическом приближении, эта функция не содержит расходящейся сферической волны на асимптотике и поэтому имеет смысл лишь в области действия потенциала.

Известно, что уравнение Дирака допускает решение как с расходящейся $\Psi^{(+)}(\vec{r})$, так и со сходящейся $\Psi^{(-)}(\vec{r})$ сферической волной на асимптотике. В нашем случае, когда квазиклассическая фаза рассеяния находится интегрированием по траектории, естественно сопоставить волновой функции частицы, движущейся из $z = -\infty$ в направлении центра рассеянии (параллельно оси oz), индекс (+) функции с расходящейся асимптотикой $\Psi^{(+)}(\vec{r})$. Поэтому функция (2.26) и снабжается индексом (+). Второе решение $\Psi^{(-)}(\vec{r})$ можно найти, пользуясь известным соотношением /6/

$$\Psi^{(-)}_{-\vec{k},-\sigma}(\vec{r}) = (\Psi^{(+)}_{\vec{k},\sigma}(\vec{r}))^{R}, \tag{2.28}$$

где R – операция обращения времени. Заметим, что это соотношение получается для эрмитового гамильтониана. В нашем случае, когда имеется комплексный оптический потенциал, соотношение (2.28) остается справедливым при условии, что операция обращения времени включает (кроме сопряжения) изменение знака мнимой части потенциала /7/. Физически это соответствует тому, что и при обращенном движении потенциал остается поглощающим.

Проделав соответствующие операции, получим для $\Psi^{(-)}$ следующее выражение:

$$\Psi^{(-)}(\vec{r},\vec{k}_f) = N_f(\vec{r},\vec{k}_f)\frac{1}{2E}(\vec{\alpha}\,\vec{\nabla}\bar{S}_f(\vec{r},\vec{k}_f) + \beta M + E - \bar{V}(\vec{r}))\, e^{i\bar{S}_f(r,k_f)} v_f, \tag{2.29}$$

где

$$N_f(\vec{r},\vec{k}_f) = (1 - \frac{1}{4}\frac{V}{E} - \frac{(\hat{k}_f\vec{\nabla}\Phi_f)}{4E} - \frac{1}{2}\frac{M^2}{k^2}\frac{V}{E}), \tag{2.30}$$

$$\bar{S}_f = S_f + i\rho_f, \qquad S_f = \vec{k}_f\vec{r} + \frac{E}{k}\Phi_f,$$

$$\Phi_f(\vec{r},\vec{k}_f) = \int_0^\infty V(\vec{r}+\hat{k}_f s)\,ds, \quad \rho_f = -\frac{E}{k}\int_0^\infty W(\vec{r}+\hat{k}_f s)\,ds. \tag{2.31}$$

3. Дифференциальное сечение

Вычисление амплитуды рассеяния

$$f(\Theta) = \frac{k}{2\pi}\int v_f^{+} e^{-i\vec{k}_f\vec{r}}\,\bar{V}(\vec{r})\Psi^{(+)}(\vec{r},\vec{k}_i)\,d^3r \tag{3.1}$$

требует знания соответствующего точного решения уравнения Дирака $\Psi^{(+)}(\vec{r},\vec{k}_i)$ с расходящейся сферической волной на асимптотике. Однако ввиду сложности этой задачи при нахождении функции $\Psi^{(+)}$ приходится пользоваться теми или иными приближенными методами. Например, Глаубер[2], рассматривая задачу рассеяния нерелятивистских частиц в поле действительного потенциала при условии $\frac{V}{E} \ll 1$, заменил точную функцию $\Psi^{(+)}(\vec{r},\vec{k}_i)$ квазиклассическим решением и получил довольно простое выражение для сечения рассеяния, которое в области малых углов $\Theta < \frac{1}{kR}$ дает хорошее согласие с точными расчетами и экспериментом.

Сделаем аналогичное приближение для нашего случая рассеяния релятивистских частиц с $M \neq 0$ в поле оптического потенциала, где в качестве функции $\Psi^{(+)}(\vec{r})$ используем квазиклассическое решение (2.26) соответствующего уравнения Дирака. Тогда

$$f(\Theta) = \frac{k}{4\pi E} \int v_f^{+} (\vec{\alpha}\vec{\nabla} \bar{S}_i + \hat{\beta} M + E - \bar{V})\, v_i\, N(\vec{r},\vec{k}_i)\, e^{i\vec{q}\vec{r} - i\frac{E}{k}\int_0^{\infty} \bar{V}(\vec{r}-\hat{k}_i s)\,ds}\, \bar{V}(\vec{r})\,d^3 r \qquad (3.2)$$

где

$$\vec{q} = \vec{k}_i - \vec{k}_f . \qquad (3.3)$$

Амплитуда (3.2) в частных случаях сводится к известным результатам работ[2,5]. Действительно, разложим предэкспоненциальную функцию подынтегрального выражения в (3.2) в ряд по степеням $\frac{V}{E}$. Ограничиваясь нулевым членом разложения, получим

$$f(\Theta) = \frac{k}{2\pi} (v_f^{+} v_i) \int e^{i\vec{q}\vec{r} - i\frac{E}{k}\int_{-\infty}^{z} \bar{V}(x,y,z')\,dz'}\, \bar{V}(\vec{r})\,d^3 r . \qquad (3.4)$$

Это выражение можно свести к одномерному интегралу, если ограничиться малыми углами рассеяния $\Theta < \frac{1}{kR}$. Для этого в (3.4) делается переход к цилиндрическим координатам (z, ρ, ϕ), проводится интегрирование по частям по z и, после пренебрежения в показателе экспоненты малой фазой $kz \sin\Theta$, что верно при $\Theta \ll \frac{1}{kR}$, интегрированием по ϕ (3.4) сводится к следующему окончательному результату:

$$f(\Theta) = -ik\,(v_f^+ v_i)\int_0^\infty J_0(k\Theta\rho)\left(e^{-i\frac{E}{k}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{V}(\vec{\rho}+\hat{k}z)\,dz}-1\right)\rho\, d\rho\,. \qquad (3.5)$$

Выражение (3.5) является релятивистским аналогом формулы Глаубера [2] и справедливо, вообще говоря, лишь в области малых углов рассеяния $\Theta < \frac{1}{kR}$. Формула Глаубера следует из (3.5), если положить в ней $W = 0$ и заменить $(v_f^+ v_i) \to 1$, $\frac{E}{k} \to \frac{M}{k}$.

Такой же результат (3.4) был получен ранее в работе [5] прямым обобщением метода Глаубера на релятивистский случай, и применялся к задаче рассеяния электронов. В этой работе на основе лишь качественных соображений для улучшения согласия с точными расчетами фазового анализа амплитуда (3.5) домножалась на фактор $\frac{E-V(0)}{E} = \frac{E'}{E}$. В нашем случае этот фактор естественно следует из предэкспоненциальной части амплитуды (3.2) и соответствует первому члену ее разложения в точке $r = 0$, где потенциал имеет наибольшее значение. В самом деле, заменяя предэкспоненту ее значением в нуле, т.е.:

$$(\vec{\alpha}\vec{\nabla}\bar{S} + \beta M + E - \bar{V}(\vec{r}))\,v_i\,\Big|_{r=0} = (\vec{\alpha}\vec{k}' + \beta M + E')\,v_i = 2E'\,v_i\,,$$

где

$$k' = \sqrt{E'^2 - M^2}\,, \quad E' = E - \bar{V}(0)\,,$$

получим

$$f(\Theta) = \frac{k}{2\pi}\left(\frac{E-\bar{V}(0)}{E}\right)(v_f^+ v_i)\int e^{i\vec{q}\vec{r} - i\frac{E}{k}\int_{-\infty}^{z}\bar{V}(x,y,z')\,dz'}\,\bar{V}(\vec{r})\,d^3r\,, \qquad (3.6)$$

где фактор $(\frac{E'}{E})$ выделился в явном виде.

Таким образом, можно сделать заключение, что исходная амплитуда (3.2) является достаточно общей и, по крайней мере, в области малых углов рассеяния $\Theta < \frac{1}{kR}$ может давать удовлетворительное описание сечения рассеяния релятивистских частиц.

В случае неполяризованного пучка падающих частиц соответствующее выражение для сечения рассеяния имеет вид:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^2}{4\pi^2}\{(\overline{\Sigma|v_f^+ v_i|^2})|f_0 - \frac{1}{2E}f_1|^2 - \frac{1}{4E^2}[(\vec{K}\vec{F}^*)f_0 + (\vec{K}\vec{F})f_0^*]\}, \qquad (3.7)$$

где обозначено:

$$\vec{F} = \vec{k}_i + \vec{k}_f$$

$$f_0 = \int g(\vec{r})\, e^{i\vec{q}\vec{r} - i\Phi^{(+)}(\vec{r},\vec{k}_i)}\, \bar{V}(\vec{r})\, d^3r$$

$$f_1 = \int \bar{V}(\vec{r})\, g(\vec{r})\, e^{i\vec{q}\vec{r} - i\Phi^{(+)}(\vec{r},\vec{k}_i)}\, \bar{V}(\vec{r})\, d^3r \qquad (3.8)$$

$$\vec{F} = \int (\vec{\nabla}\Phi^{(+)}(\vec{r},\vec{k}_i))\, g(\vec{r})\, e^{i\vec{q}\vec{r} - i\Phi^{(+)}(\vec{r},\vec{k}_i)}\, \bar{V}(\vec{r})\, d^3r,$$

$$g(\vec{r}) = \left(1 - \frac{1}{4}\frac{V(\vec{r})}{F} + \frac{(\hat{k}_i\vec{\nabla}\Phi_i(\vec{r},\vec{k}_i))}{4E} - \frac{1}{2}\frac{M^2}{k^2}\frac{V(\vec{r})}{E}\right)$$

$$\Phi^{(+)}(\vec{r},\vec{k}) = \frac{E}{k}\int_0^\infty \bar{V}(\vec{r} - \hat{k}_i s)\, ds \qquad (3.9)$$

$$\overline{\Sigma|v_f^+ v_i|^2} = \cos^2\frac{\Theta}{2} + \frac{M^2}{F^2}\sin^2\frac{\Theta}{2}. \qquad (3.10)$$

Рассмотрим теперь область углов рассеяния $\Theta > \frac{1}{kR}$. Выше уже упоминалось, что в работе[4] этот вопрос специально исследовался в задаче рассеяния электронов на ядрах и делался вывод, что при работе с квазиклассическими волновыми функциями, которые не имеют правильной асимптотики, в случае больших углов рассеяния более последовательно пользоваться другим выражением для амплитуды:

$$f(\Theta) = \frac{k}{4\pi} \int \psi^{(-)+}(\vec{r}, \vec{k}_f) \bar{V}(\vec{r}) \psi^{(+)}(\vec{r}, \vec{k}_i) d^3 r , \tag{3.11}$$

что совпадает с выражением для амплитуды в методе искаженных волн. Как будет видно из дальнейшего, эта амплитуда близка по форме к найденной в работе Шиффа /1/ методом приближенного суммирования бесконечного борновского ряда. С другой стороны, после подстановки в точное выражение (3.1) квазиклассической функции $\psi^{(+)}$ (см. (3.3)) можно заметить, что амплитуда содержит фазу в виде интеграла только по первой половине траектории частицы от $-\infty$ до z , и поэтому кажется естественным модифицировать амплитуду таким образом, чтобы в нее входила полная фаза по всему пути движения от $-\infty$ до $+\infty$. Фактически это означает, что плоская волна выходного канала в амплитуде (3.1) заменяется соответствующей $\psi^{(-)}$ искаженной волной. Итак, за основу дальнейшего рассмотрения, так же как и в работе /4/, примем амплитуду рассеяния (3.11).

Для неполяризованного пучка падающих частиц после подстановки (2.36) и (2.29) в (3.11), взятия соответствующего шпура и при ограничении членами первого порядка по $\frac{V}{E}$, получим следующее дифференциальное сечение:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^2}{4\pi^2} \{ (\overline{\Sigma | v_f^+ v_i |^2}) | \underline{f}_0 - \frac{1}{E} \underline{f}_1 |^2 - \frac{1}{2F^2} [(\vec{K} \underline{\vec{F}}^*) \underline{f}_0 + (\vec{K} \underline{\vec{F}}) \underline{f}_0^*] \} , \tag{3.12}$$

где

$$\begin{gathered} \underline{f}_0 = \int \underline{g}(r)\, e^{i\vec{q}\vec{r} - i\Phi^{(+)}(\vec{r},\vec{k}_i) - i\Phi^{(-)}(\vec{r},\vec{k}_f)}\, \bar{V}(\vec{r})\, d^3 r \\ \underline{f}_1 = \int g(\vec{r})\, \bar{V}(\vec{r})\, e^{i\vec{q}\vec{r} - i\Phi^{(+)}(\vec{r},\vec{k}_i) - i\Phi^{(-)}(\vec{r},\vec{k}_f)}\, \bar{V}(\vec{r})\, d^3 r \\ \underline{\vec{F}} = \int (\vec{\nabla}\Phi^{(-)}(\vec{r},\vec{k}_f) - \vec{\nabla}\Phi^{(+)}(\vec{r},\vec{k}_i))\, g(\vec{r})\, e^{i\vec{q}\vec{r} - i\Phi^{(+)}(\vec{r},\vec{k}_i) - i\Phi^{(-)}(\vec{r},\vec{k}_f)}\, \bar{V}(\vec{r})\, d^3 r \\ g(\vec{r}) = \left(1 - \frac{1}{2}\frac{V(\vec{r})}{E} + \frac{\hat{k}_i \vec{\nabla}\Phi_i - \hat{k}_f \vec{\nabla}\Phi_f}{4E} - \frac{M^2}{k^2}\frac{V(\vec{r})}{E}\right) \end{gathered} \tag{3.13}$$

$$\Phi^{(+)}(\vec{r},\vec{k}_i)=\frac{E}{k}\int_0^{\infty}V(\vec{r}-\hat{k}_i s)\,ds\,,\quad \Phi^{(-)}(\vec{r},\vec{k}_f)=\frac{E}{k}\int_0^{\infty}V(\vec{r}+\hat{k}_f s)\,ds\,. \tag{3.14}$$

Анализируя этот результат ., заметим, во-первых, что первое слагаемое в (3.12) в нулевом порядке разложения по $\frac{V}{E}$ имеет вид:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0=\frac{k^2}{4\pi^2}\left(\overline{\Sigma\,|\,v_f^+\,v_i\,|^2}\right)\left|\int e^{i\vec{q}\vec{r}-i\Phi^{(+)}(\vec{r},\vec{k}_i)-i\Phi^{(-)}(\vec{r},\vec{k}_f)}\,V(\vec{r})\,d^3r\right|^2 \tag{3.15}$$

и совпадает с результатом работы Шиффа/1/, если положить еще $W=0$. Остальные слагаемые имеют порядок V/E и изменяют как абсолютную величину сечения, так и форму углового распределения. Отметим также, что спинорный фактор $\Sigma\,|\,v_f^+\,v_i\,|^2$ в сечении, вообще говоря, целиком не выделяется в отличие от формы Шиффа/1/, где, по-видимому, непоследовательно проводилось приближение $\frac{V}{E}\ll 1$.

В самом деле, простая оценка

$$\vec{\nabla}\Phi^{(+)}(\vec{r},\vec{k}_i)\approx\hat{k}_i\,\bar{V}(\vec{r})\,,\quad \vec{\nabla}\Phi^{(-)}(\vec{r},\vec{k}_f)\approx-\hat{k}_f\,\bar{V}(\vec{r})$$

дает для второго слагаемого в (3.12) следующее выражение:

$$\left(f_{-0}\frac{1}{E}f^*_{-1}+f^*_{-0}\frac{1}{E}f_{-1}\right)\cos^2\frac{\Theta}{2}$$

и имеет порядок V/E .

Итак, выражение (3.12) фактически является обобщением результата работы/4/ на более общий случай, когда $M\neq 0$ и $W\neq 0$. Рассмотрим теперь специально случай больших углов рассеяния $\Theta>\frac{1}{kR}$, где обычно наблюдается дифракционная картина углового распределения. Воспользовавшись условием $kR\Theta\gg 1$ в (3.13), можно интегрированием по частям по $\mu=\cos(\hat{\vec{r}\vec{q}})$ (ось $oz\parallel\vec{q}$) получить асимптотический ряд по степеням $\frac{1}{kR}$. Ограничиваясь первым членом этого ряда, получим следующее выражение для характерного в нашем случае интеграла типа:

$$\int g(\vec{r})\, e^{i\vec{q}\vec{r}+i\Phi(\vec{r})}\, \bar{V}(\vec{r})\, d^3r = 2\pi \sum_{\epsilon=\pm 1} \epsilon \int_0^\infty G(r,\epsilon)\, e^{iqr\epsilon+i\Phi(r,\epsilon)}\, \bar{V}(r)\, r^2 dr, \quad (3.16)$$

где

$$G(r,\epsilon) = \frac{g(r,\epsilon)}{g\, r + \frac{\partial}{\partial\mu}\Phi(r,\mu)\Big|_{\mu=\epsilon}} .$$

Здесь существенным оказалось то, что для сферически симметричных потенциалов интегрирование по азимутальному углу ϕ снимается, ибо в функциях:

$$\Phi(r,\mu,\phi) = \frac{E}{k}\int_0^\infty \{\bar{V}(u_i) + \bar{V}(u_f)\}\, ds$$

$$\frac{\partial\Phi(r,\mu,\phi)}{\partial\mu} = \frac{E}{k}\int_0^\infty \left\{ \frac{d\bar{V}(u_i)}{du_i}\frac{\partial u_i}{\partial\mu} + \frac{d\bar{V}(u_f)}{du}\frac{\partial u_f}{\partial\mu} \right\} ds,$$

где

$$u_i = \sqrt{r^2+s^2-2s(\hat{k}_i\vec{r})}, \quad u_f = \sqrt{r^2+s^2+2s(\hat{k}_f\vec{r})}$$

в точках $\mu=\epsilon=\pm 1$ исчезает зависимость от переменной ϕ. В самом деле, при нашем выборе системы координат, когда $oz \parallel \vec{q}$, имеем:

$$(\hat{k}_i\vec{r}) = r(\mu a + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-a^2}\cos\phi) \to \pm r a \quad (\mu=\pm 1)$$

$$(\hat{k}_f\vec{r}) = r(-\mu a + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-a^2}\cos\phi) \to \mp r a \ (\mu=\pm 1),$$

где $a = \mathrm{Sin}\frac{\Theta}{2}$, Θ углы рассеяния, и, следовательно,

$$\Phi(r,\epsilon) = 2\frac{E}{k}\int_0^\infty \bar{V}(\sqrt{r^2+s^2-2rs\,a\epsilon})\, ds$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}\Big|_{\mu=\epsilon} = -2ra\frac{E}{k}\int_0^\infty \frac{d\bar{V}(u)}{du}\frac{s\, ds}{\sqrt{r^2+s^2-2rs\,a\epsilon}} .$$

Таким образом, сечение рассеяния выражается через ряд простых одномерных интегралов, где все функции записаны в явном виде. Это позволяет, в принципе, проводить численные расчеты и конкретные сравнения с экспериментальными данными. Однако из-за того, что $kR \gg 1$, подынтегральное выражение в (3.16) сильно осциллирует и это заставляет в ряде случаев прибегать к дальнейшим упрощениям и асимптотическим оценкам. Так, в работе /8/ в задаче рассеяния электронов кулоновским полем ядра был использован тот факт, что распределение плотности заряда фермиевского вида $(1 + \exp\frac{r-R}{b})^{-1}$ имеет полюса в точках $r = R \pm i(2n+1)\pi b$. Это позволило существенно упростить окончательный результат, записав его в явном виде.

В заключение отметим, что для перехода к нерелятивистскому пределу в полученных формулах для сечений (3.7) и (3.12) необходимо заменить $E \to M + E_k$, $(\Sigma|v_f^+ v_i|^2) \to 1$ и воспользоваться условием $M \gg E_k \gg V$ (E_k – кинетическая энергия, $E_k = \frac{k^2}{2M}$). Тогда, например, из (3.12), получим следующее выражение сечения рассеяния:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^2}{4\pi^2} \left| \int \left(1 - \frac{V(\vec{r})}{E_k}\right) e^{i\vec{q}\vec{r} - i\frac{M}{k}\int_0^\infty [\bar{V}(\vec{r} - \hat{k}_i s) + \bar{V}(\vec{r} + \hat{k}_f s)]\, ds} \bar{V}(\vec{r})\, d^3 r \right|^2 \quad (3.17)$$

Литература

1. L.J.Schiff, Phys. Rev. 103, 443 (1956).
2. R.J.Glauber, Lectures in Theoretical Physics, vol.1, p.315, N.Y.(1959).
3. J.J.Tiemann, Phys.Rev., 109, 183 (1958).
4. D.R.Yennie, F.L.Boos, D.C.Ravenhall, Phys. Rev., 137, B882 (1965).
5. A.Baker, Phys.Rev., 134, B240 (1964).
6. К. Нишиджима. Фундаментальные частицы. Изд. "Мир" (1965).
7. L.C.Biedenharn, Nucl.Phys., 10, 620 (1959).
8. И.Ж. Петков, В.К. Лукьянов, Ю.С. Поль. Ядерная физика 4, 57 (1966).

Рукопись поступила в издательский отдел
31 октября 1967 г.