ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р4 - 3505

В. Рыбарска

# КОНФИГУРАЦИОННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НУКЛОНОВ, ПРИВОДЯЩЕГО К СВЕРХТЕКУЧЕЙ МОДЕЛИ ЯДРА

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1967.

5345/3 пр.

P4 - 3505

В. Рыбарска

# КОНФИГУРАЦИОННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НУКЛОНОВ, ПРИВОДЯЩЕГО К СВЕРХТЕКУЧЕЙ МОДЕЛИ ЯДРА

## Введение

Гамильтониан сверхтекучей модели ядра состоит, как известно [1], из одночастичного члена соответствующей оболочечной модели и из остаточного взаимодействия между нуклонами последней незаполненной оболочки. Это взаимодействие содержит парную и мультиполь-мультипольную часть. Если написать гамильтониан в первично квантованном виде в конфигурационных переменных

$$H = \sum_{i=1}^{A} H_i + \sum_{i,j=1}^{n} V_{ij}(\vec{r}_i \rho_i, \vec{r}_j \rho_j), \tag{1}$$

где

$$H_i = T_i + U_i(\vec{r}_i \rho_i),$$

$A$ -число нуклонов ядра, $\rho_i$ - спиновая переменная, $n$ - число нуклонов последней оболочки, то нам известен только явный вид мультиполь-мультипольной части. Она состоит из членов типа

$$C_\lambda r_i^\lambda r_j^\lambda P_{\lambda\mu}(\cos\theta_i) P_{\lambda\mu}(\cos\theta_j). \tag{2}$$

Парное взаимодействие было введено [2] по аналогии с модельным гамильтонианом для сверхпроводника с надеждой (которая оправдалась) на получение щели в энергетическом спектре чётных ядер. В сверхпроводнике вначале были известны и учтены все существенные взаимодействия между электронами и между электронами и ионами. Модельный гамильтониан[3] был получен путем пренебрежения в импульсном пространстве некоторыми матричными элементами взаимодействия на основании наглядных физических аргументов. Но и для сверхпроводника не лишен смысла вопрос, какому взаимодействию в $x$ -пространстве отвечает такое обрезанное в $p$ -пространстве эффективное взаимодействие. Кажется, что этот вопрос более интересен для ядра, где мы не знаем природы взаимодействия между нуклонами, и спаривание по квантовым числам момента количества движения в последней оболочке выражает результат разных не известных нам взаимодействий между нуклонами.

## 2. *Переход к $x$ -пространству*

Исходный гамильтониан имеет вид

$$H = \sum_{ij} T_{ij}\, a_i^+ a_j + \frac{1}{4} \sum_{ijk\ell} V_{ijk\ell}\, a_i^+ a_j^+ a_k a_\ell \,, \tag{3}$$

где

$$T^*_{ij} = T_{ji} \,,$$

$$V_{ijk\ell} = -V_{jik\ell} = -V_{ij\ell k} = V^*_{k\ell ij} \,.$$

Одночастичное состояние в "i" -представлении

$| i > = a_i^+ | 0 >$ , где $| 0 >$ -вакуум.

$<i | x> = \phi_i^*(x)$ – волновая функция одночастичного состояния в $x$ -представлении, $x = \vec{r}, \rho$ . Одночастичное состояние в $x$ -представлении

$$| x > = \psi^+(x) | 0 > \,, \quad \text{где} \quad \psi^+(x) = \sum \phi_i^*(x)\, a_i \,.$$

Предполагаем, что $\phi_i(x)$ – это ортонормальная, полная система функций. Переход к $x$ -представлению дает нам:

$$H = \int T(x_1 x_2)\, \psi^+(x_1)\, \psi(x_2)\, dx_1\, dx_2 + \tag{4}$$

$$+ \int V(x_1 x_2 x_3 x_4)\, \psi^+(x_1)\, \psi^+(x_2)\, \psi(x_3)\, \psi(x_4)\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4 \,,$$

где

$$T(x_1 x_2) = \sum_{i,j} T_{ij}\, \phi_i(x_1)\, \phi^*_j\, (x_2), \tag{5}$$

$$V(x_1 x_2 x_3 x_4) = \frac{1}{4} \sum_{ijk\ell} V_{ijk\ell}\, \phi_i(x_1) \phi_j(x_2) \phi^*_k(x_3) \phi^*_\ell(x_4), \tag{6}$$

$\int \ldots dx$ подразумевает интегрирование по $d\vec{r}$ и суммирование по $\rho$ ( $\rho = +-$ ). Вектор состояния системы $|\ \rangle$ можем представить в координатном представлении с помощью следующих его проекций

$$\langle 0 |\ \rangle,\ \langle x_1 |\ \rangle,\ \langle x_1 x_2 |\ \rangle,\ \langle x_1 x_2 x_3 |\ \rangle \ldots \tag{7}$$

Так как нас интересует только двухчастичное взаимодействие, введем функцию

$$\phi(x_1\ x_2) = \langle 0 | \psi(x_1) \psi(x_2) |\ \rangle = \langle x_1 x_2 |\ \rangle = -\phi(x_2\ x_1). \tag{8}$$

Переход от вторичного к первичному квантованию заключается в этом представлении в следующем:

$$\langle x_1 x_2 | H |\ \rangle = \hat{H}\, \phi(x_1, x_2), \tag{9}$$

где $\hat{H}$ –оператор первичного квантования в $x$ –представлении.

После вычислений получаем:

$$\langle x_1 x_2 | T |\ \rangle = (\hat{T}(x_1) + \hat{T}(x_2))\, \phi(x_1\ x_2), \tag{10}$$

где

$$\hat{T}(x) = -\frac{h^2}{2m} \nabla^2_x + U(x),$$

$U(x)$ -потенциал внешнего (или среднего) поля,

$$\langle x_1 x_2 | V | \rangle = \int \tilde{\tilde{V}}(x_1 x_2 x_3 x_4)\, \phi(x_3 x_4)\, dx_3\, dx_4 , \tag{11}$$

где

$$\tilde{\tilde{V}}(x_1 x_2 x_3 x_4) = V(x_2 x_1 x_3 x_4) - V(x_1 x_2 x_3 x_4) .$$

Взаимодействие локально по определению, если

$$\int \tilde{\tilde{V}}(x_1 x_2 x_3 x_4)\, \phi(x_3 x_4)\, dx_3\, dx_4 = \hat{V}(x_1 x_2)\, \phi(x_1 x_2) . \tag{12}$$

## 3. Парное взаимодействие в неограниченном $p$ - пространстве

В этом случае взаимодействие

$$\frac{1}{4} \sum_{ijk\ell} V_{ijk\ell}\, a_i^+ a_j^+ a_k a_\ell \tag{13}$$

сводится к

$$-G \sum_{\vec{p}_1 , \vec{p}_3} a^+_{\vec{p}_1 +} a^+_{-\vec{p}_1 -} a_{-\vec{p}_3 -} a_{\vec{p}_3 +} \tag{14}$$

если $i \to \vec{p}_i \sigma_i$, а

$$V_{ijk\ell} = -\frac{1}{4} G\, \delta_{\vec{p}_1 \vec{p}_2}\, \delta_{\vec{p}_3 \vec{p}_4}\, \Xi(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4) , \tag{15}$$

где

$$\Xi(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4) = (\delta_{\sigma_1 +} \delta_{\sigma_2 -} - \delta_{\sigma_1 -} \delta_{\sigma_2 +})(\delta_{\sigma_3 -} \delta_{\sigma_4 +} - \delta_{\sigma_3 +} \delta_{\sigma_4 -}) . \tag{16}$$

Соответственно

$$V(x_1 x_2 x_3 x_4) = -\frac{G}{4} \sum_{\substack{\vec p_1 \ldots \vec p_4 \\ \sigma_1 \ldots \sigma_4}} \delta_{p_1 p_2} \delta_{-p_3 p_4} \Xi(\sigma_1 \sigma_4) \phi_{p_1 \sigma_1}(x_1) \phi_{p_2 \sigma_2}(x_2) \times$$

$$\times \phi^*_{p_3 \sigma_3}(x_3) \phi^*_{p_4 \sigma_4}(x_4) = -\frac{G}{4} \sum_{\substack{\vec p_1 \vec p_3 \\ \sigma_1 \ldots \sigma_4}} \Xi(\sigma_1 \ldots \sigma_4) \phi_{\vec p_1 \sigma_1}(x_1) \phi_{\vec p_1 \sigma_2}(x_2)^* \times$$

$$\times \phi^*_{-\vec p_3 \sigma_3}(x_3) \phi^*_{\vec p_3 \sigma_4}(x_4). \tag{17}$$

Допустим, что одночастичные волновые функции являются плоскими волнами

$$\phi_{\vec p \sigma}(\vec r \rho) = c\, \delta_{\sigma \rho}\, e^{i \vec p \vec r} \tag{18}$$

Подставляя в (17), получим

$$V(x_1 x_2 x_3 x_4) = -\frac{G C^4}{4} \sum_{\vec p_1 \vec p_3} e^{i[\vec p_1 (\vec r_1 - \vec r_2) - \vec p_3 (\vec r_3 - \vec r_4)]} \Xi(\rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4) =$$

$$= -\frac{G}{4} \delta(\vec r_1 - \vec r_2) \delta(\vec r_3 - \vec r_4) \Xi(\rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4). \tag{19}$$

Уравнение (12) принимает вид:

$$\int \tilde V(x_1 x_2 x_3 x_4) \phi(x_3 x_4) dx_3 dx_4 =$$

$$= -\frac{G}{4} \sum_{\rho_3 \rho_4} \int \Xi(\rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4) \delta(\vec r_1 - \vec r_2) \delta(\vec r_3 - \vec r_4) \phi(\vec r_3 \rho_3, \vec r_4 \rho_4) d\vec r_3 d\vec r_4 =$$

$$= -\frac{1}{2} G \delta(\vec r_1 - \vec r_2)(\delta_{\rho_1 +} \delta_{\rho_2 -} - \delta_{\rho_1 -} \delta_{\rho_2 +}) \int \phi(\vec r_3 -, \vec r_3 +) d\vec r_3. \tag{20}$$

Видно, что условие локальности здесь не выполнено. Мы имеем дело с нелокальным взаимодействием.

С другой стороны, локальное $\delta$ -образное взаимодействие между частицами с противоположными проекциями спинов осуществляется потенциалом

$$V(x_1 x_2 x_3 x_4) =$$

$$= -\frac{G}{2} \delta(\vec r_1 - \vec r_2) \delta_{\rho_1 -\rho_2} (\delta(\vec r_1 - \vec r_4) \delta(\vec r_2 - \vec r_3) \delta_{\rho_1 \rho_4} \delta_{-\rho_1 \rho_3} - \delta(\vec r_1 - \vec r_3) \delta(\vec r_2 - \vec r_4) \times$$

$$\times \delta_{\rho_1 \rho_3} \delta_{-\rho_1 \rho_4}). \tag{21}$$

Соответствуюший этому взаимодействию матричный элемент взаимодействия $p$ -пространстве для плоских волн, взятых в качестве $\phi_{\vec{p}\sigma}(x)$, принимает вид

$$V_{\vec{p}_1\sigma_1\,\vec{p}_2\sigma_2\,\vec{p}_3\sigma_3\,\vec{p}_4\sigma_4} = -\frac{-G}{2}\,\delta_{\sigma_1-\sigma_2}\,\delta(\vec{p}_1+\vec{p}_2-\vec{p}_3-\vec{p}_4)(\delta_{\sigma_1\sigma_4}\delta_{\sigma_3-\sigma_1}-\delta_{\sigma_1\sigma_3}\delta_{\sigma_4-\sigma_1}). \qquad (2$$

Подстановка в гамильтониан взаимодействия дает нам

$$-\frac{G}{2}\sum_{\vec{p}_1,\vec{p}_3,\vec{\delta},\sigma} a^{+}_{\vec{p}_1\sigma}\, a^{+}_{\vec{\delta}-\vec{p}_1,-\sigma}\, a_{-\vec{p}_3-\sigma}\, a_{\vec{\delta}+\vec{p}_3,\sigma}. \qquad (2$$

Таким образом, для того, чтобы получить парное взаимодействие (13), мы должны взять только один член из суммы по $\sigma\vec{\delta}$, а именно $\vec{\delta}=0$. Отсюда видно, что пренебрежение другими членами в сумме по $\vec{\delta}$ эквивалентно в $x$ -пространстве переходу от $\delta$ -образного взаимодействия к нелокальному взаимодействию.

## 4. *Парное взаимодействие между нуклонами последней незаполненной оболочки*

Рассмотрим самый простой случай - сферический осцилляторный потенциал. В последней оболочке находятся нуклоны одного сорта, между ними действуют парные силы. Тогда спаривание - это взаимодействие с постоянной константой связи между частицами с противоположными проекциями $m\sigma$. Одночастичные волновые функции:

$$\phi_{n\ell m\sigma}(r\theta\phi\rho) = \frac{1}{r}R_{n\ell}(r)\,Y_{\ell m}(\theta\phi)\,\delta_{\sigma\rho}, \qquad (2$$

где $Y_{\ell m}(\theta,\phi)$ - шаровые функции,

$$R^{(r)}_{n\ell} = \sqrt{\frac{2(2\nu)^{\ell+\frac{3}{2}}(n-1)!}{(\Gamma(n+\ell+\frac{1}{2}))^{3}}}\; r^{\ell+1}\, e^{-\nu r^2}\, L^{\ell+\frac{1}{2}}_{n+\ell-\frac{1}{2}}(2\nu r^2),$$

$\nu = \dfrac{M\omega}{2h}$ , M – масса нуклона, $\omega$ –частота колебаний, $L_n^k$ – полином Лагерра.

Двухчастичный член (14) напишем в виде:

$$-G \sum_{\substack{2n_1+\ell_1=N_0 \\ 2n_3+\ell_3=N_0 \\ |m_1|=0,1,\ldots\ell_1 \\ |m_3|=0,1,\ldots\ell_3}} a^+_{n_1\ell_1 m_1} a^+_{n_1\ell_1 -m_1} a_{n_3\ell_3 -m_3} a_{n_3\ell_3 m_3} + , \tag{25}$$

значит,

$$V_{ijk\ell} = -\frac{G}{4}\, \delta_{\ell_1\ell_2}\, \delta_{n_1 n_2}\, \delta_{\ell_3\ell_4}\, \delta_{n_3 n_4}\, \delta_{-m_1 -m_2}\, \delta_{m_3 -m_4}\, \Xi(\sigma_1\ldots\sigma_4) \tag{26}$$

Отсюда

$$V(x_1 x_2 x_3 x_4) = -\frac{G}{4} \sum_{\substack{2n_1+\ell_1=N_0 \\ 2n_3+\ell_3=N_0 \\ |m_1|=0,1,\ldots\ell_1 \\ |m_2|=0,1,\ldots\ell_3 \\ \sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4}} \phi_{n_1\ell_1 m_1\sigma_1}(r_1\theta_1\phi_1\rho_1)\,\phi_{n_1\ell_1 -m_1\sigma_2}(r_2\theta_2\phi_2\rho_2)\times \tag{27}$$
$$\times \phi^*_{n_3\ell_3 -m_3\sigma_3}(r_3\theta_3\phi_3\rho_3)\,\phi^*_{n_3\ell_3 m_3\sigma_4}(r_4\theta_4\phi_4\rho_4)\Xi(\sigma_1\ldots\sigma_4)$$

Пользуясь формулой суммирования для шаровых функций, приходим к выражению

$$V(x_1 x_2 x_3 x_4) = -\frac{1}{4}\, G \sum_{2\ell_1+n_1=N_0} \frac{(-1)^{\ell_1}(2\ell_1+1)}{4\pi}\, \frac{1}{r_1}\, \frac{1}{r_2} P_{\ell_1}(\theta_{12}) R_{n_1\ell_1}(r_1)\cdot \tag{28}$$
$$\cdot R_{n_1\ell_1}(r_2) \sum_{2n_3+\ell_3=N_0} \frac{(-1)^{\ell_3}(2\ell_3+1)}{4\pi} P_{\ell_3}(\theta_{34}) \frac{1}{r_3}\, \frac{1}{r_4} R_{n_3\ell_3}(r_3) R_{n_3\ell_3}(r_4)\Xi(\rho_1\ldots\rho_4)$$

Из написанной выше формулы очевидным образом вытекает, что полученное для $V(x_1 x_2 x_3 x_4)$ выражение приведет нас к нелокальному уравнению для двухчастичной функции. Кроме этого – взаимодействие между частицами зависит от формы потенциала оболочечной модели. Видно, что часть $V(x_1 x_2 x_3 x_4)$, зависящая от переменных 1,2, не может быть просуммирована и не приведет нас к $\delta(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$, как это имело место в неограниченном p –пространстве. Таким образом, мы доказали, что спариванию $(nlm\sigma, nl-m-\sigma)$ только в последней незаполненной оболочке $N_0$ нельзя сопоставить локальный двухчастичный короткодействующий потенциал в $x$ –пространстве.

## *5. Заключение*

Известно, что сверхтекучая модель ядра объяснила большое количество экспериментальных фактов /1/, и все время с ее помощью проводятся вычисления основных данных по структуре ядра. Учитывая это, а также вычисления предыдущих параграфов, предполагаем, что мы нуждаемся сейчас в модели с двухчастичным эффективным взаимодействием в $x$ –пространстве, из которой естественным образом вытекала бы сверхтекучая модель. Довольно успешной попыткой введения такого взаимодействия была предложенная Грином и Мошковским /4/ модель с поверхностным $\delta$ –взаимодействием. Несмотря на ее простоту, уже можно сказать, что она представляет собою наглядное обоснование сверхтекучей модели.

В заключение выражаю благодарность профессору В.Г.Соловьеву и сотрудникам группы теории ядра в Дубне за дискуссии и замечания.

## *Литература*

1. В.Г.Соловьев, Структура сложных ядер, Атомиздат, Москва, 1966.
2. В.Г.Соловьев, ЖЭТФ 35, 823 (1958), Nucl. Phys. 9, 655 (1958/59).
   S. T. Belaev. Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 31, N. 11 (1959).
3. J. Bardeen, L. Cooper, J. Schrieffer, Phys. Rev., 108, 1175 (1957).
   Н.Н.Боголюбов, В.В. Толмачёв, Д.В.Ширков, Новый метод в теории сверхпроводимости, Изд. АН СССР, 1958.
4. I. M. Green, S. A. Moszkowski, Phys. Rev., 139, B790 (1965).

Рукопись поступила в издательский отдел
12 сентября 1967 года.