ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р4 - 3300

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Т.Г. Ефименко, В.П. Жигунов, Б.Н. Захарьев

РЕАКЦИИ С ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ЧАСТИЦ
II
(Метод многоканальной связи)

1967.

P4 - 3300

Т.Г. Ефименко, В.П. Жигунов, Б.Н. Захарьев

РЕАКЦИИ С ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ЧАСТИЦ
II
(Метод многоканальной связи)

To be published in Annals of Phys.
47 N2 (1968.)

В в е д е н и е

В настоящее время для описания реакций, сопровождающихся изменением состава сталкивающихся частиц, широко используются методы, основанные на теории возмущений. Такое положение совершенно неудовлетворительно, поскольку в большинстве случаев взаимодействие, вызывающее реакцию, нельзя считать малым.

Представляется заманчивым использовать для изучения реакций с перераспределением частиц технику многоканальной связи, интенсивно развивающуюся после появления работ Фешбаха[1]. Дело в том, что малость потенциалов, ответственных за процесс, не является принципиально важной для этого метода.

К сожалению, непосредственное применение к указанной задаче формализма сильной связи каналов наталкивается на большие трудности[1-3]. Поясним их причину.

В исходном уравнении Шредингера

$$H\Psi = E\Psi \qquad (1)$$

гамильтониан H всей системы может быть представлен в виде различных разбиений соответственно различному составу фрагментов, на которые может разделяться система:

$$H = H_a + V_a = H_b + V_b = \ldots \quad \text{и т.д.} \qquad (2)$$

Здесь $H_{\backslash a}$ –гамильтониан свободного относительного движения фрагментов с составом „a", а V_a –взаимодействие фрагментов. При большом R_a, характеризующем расстояние между фрагментами в каналах „a", взаимодействие V_a исчезает и

$$\lim_{R_a \to \infty} H = H_a = T_a + h_a \quad , \tag{3}$$

где T_a –оператор кинетической энергии относительного движения фрагментов, а h_a–гамильтониан внутреннего движения в фрагментах с собственными функциями ϕ_i^a :

$$h_a \phi_i^a = \epsilon_i^a \phi_i^a \tag{4}$$

(i включает все необходимые квантовые числа).

Волновая функция Ψ, благодаря (3), приобретает при больших R_a вид:

$$\begin{aligned} &\lim_{R_a \to \infty} \Phi = \sum_i{}' \psi_i^d (\vec{R}_a) \phi_i^a (\vec{\rho}_a), \\ &\lim_{R_b \to \infty} \Phi = \sum_i{}' \psi_i^b (\vec{R}_b) \phi_i^b (\vec{\rho}_b), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{5}$$

Суммирование в (5) ведется только по открытым каналам, $\psi_i^a (\vec{R})$ описывают свободное относительное движение фрагментов. При больших R_a функции $\psi_i (\vec{R}_a)$ имеют вид: во входном канале – суммы падающей волны, нормированной на единичный поток, и расходящейся волны, во всех остальных каналах ψ содержит лишь расходящиеся волны.

Если разложить Ψ в ряд по полному набору функций ϕ_i^a, соответствующих какому-то определенному составу частиц „a"

$$\Psi = \sum_n \psi_n^a (\vec{R}_a) \phi_i^a \quad , \tag{6}$$

то для коэффициентов разложения ψ_n^a получаем стандартным образом согласно (1), (4) систему дифференциальных уравнений

$$T_a \phi_n^a + \Sigma K_{nm} \phi_m^a = (E - \epsilon_n)\phi_n^a \quad , \tag{7}$$

аналогичную системе в задаче без перераспределения. Трудность возникает в формулировке граничных условий из-за следующего несоответствия. Асимптотика Ψ содержит, согласно (5), компоненты, отвечающие различному составу фрагментов, базисные же функции, по которым в (6) разлагается Ψ, соответствуют какому-то одному составу „a". Неизвестно, как в Ψ, представленной в форме (6), обеспечить выполнение граничных условий для каналов с составом $\beta \neq a$.

Отметим, что попытки разлагать Ψ одновременно по всем базисным наборам приводят к системам сложнейших интегродифференциальных уравнений из-за неортогональности базисов $\{\phi^a\}, \{\phi^\beta\}$ при $a \neq \beta$ x/.

Возможно, что глубокая математическая причина обсуждаемой трудности заключается в том, что Ψ вообще нельзя разлагать по функциям одного базиса, т.к. Ψ лежит вне области определения любого оператора h_a.

В работе[2] был предложен "метод усеченных асимптотик", в котором по базисным функциям разлагается не Ψ, а некоторая "исправленная" функция $\Psi - \Phi$, обладающая асимптотикой, соответствующей лишь одному составу фрагментов, а именно, тому же, что и для выбранных базисных функций (Φ вычитает из Ψ все "лишнее"). Граничные условия системы дифференциальных уравнений для коэффициентов разложения $\Psi - \Phi$ формулируются просто и точно. Это позволило обойти указанную выше принципиальную трудность описания столкновений с перераспределением частиц в рамках единой теории ядерных реакций[1].

В данной работе указанный метод существенно усовершенствован. Вместо трудоемкой процедуры последовательных испытаний для нахождения амплитуд рассеяния и реакции[2] предлагается решать простую систему алгебраических уравнений. Конкретные расчеты в этом случае ненамного сложнее, чем для описания реакций без перераспределения.

---

x/ В частном случае проблемы учета тождественности частиц такие уравнения удается решить, например, методом Мариотта[4].

Метод усеченных асимптотик оказался полезным и в применении к старой проблеме учета тождественности рассеивающихся частиц и частиц, входящих в состав сложной мишени [3]. Он позволяет значительно упростить расчеты по сравнению с используемым в настоящее время методом Мариотта [4]. Этот же метод оказался весьма эффективным [5] при обобщении метода Ротенберга для описания неупругих процессов [x].

Во втором разделе излагаются общие идеи метода усеченных асимптотик.

2. Метод усеченных асимптотик

Поскольку использованию разложений типа (6) мешает наличие в асимптотике Ψ компонент с различным составом фрагметов, предлагается убрать из Ψ все компоненты, кроме одной. Построим для этого вспомогательную функцию ϕ такую, например, чтобы:

$$\lim_{R_a \to \infty} \Phi = 0 , \tag{8}$$

$$\lim_{R_b \to \infty} \Phi = \lim_{R_b \to \infty} \Psi \qquad b \neq a$$

Вычтем Φ из Ψ, тогда новая функция X будет удобна для разложения по базису $\{\phi_i^a\}$:

$$X = \sum_n \chi_n^a (\vec{R}_a) \phi_n^a , \tag{9}$$

т.к. граничные условия для χ^a, соответствующие конкретной физической задаче, можно будет сформулировать просто и точно. После того, как X будет найдена, прибавим к ней Φ и получим искомую Ψ.

---

[x] Ротенберг предложил использовать в качестве базиса собственные функции задачи Штурма-Лиувилля, удобные тем, что они образуют чисто дискретный полный набор и обеспечивают, по-видимому, в ряде случаев более быструю сходимость разложений.

Но, чтобы получить уравнения для χ^{*}_{n} , нужно знать уравнение для X. Найдем его.

Сначала построим уравнение для Φ. Согласно (5),(8) будем искать Φ в виде суммы

$$\Phi = \sum_{\beta\neq\alpha} \Phi_\beta = \sum_{\beta\neq\alpha} \sum_{i} \Phi^{\beta}_{i}(\vec{R}_b)\,\phi^{\beta}_{i} = \sum_{\beta\neq\alpha} \sum_{i} \phi_i \sum_{\ell} \frac{\Phi^{\beta}_{i\ell}(R_b)}{R_b} \quad Y_{\ell m}\left(\frac{\vec{R}_b}{R_b}\right), \tag{10}$$

где суммирование по i ведется лишь по открытым каналам. Согласно (3), (8) уравнение для Φ_β при больших R_β должно переходить в $(H_\beta - E)\Phi_\beta = 0$. Однако во всей области изменения R_β такое уравнение нам не подходит: оператор H_β эрмитов и обеспечивает сохранение числа частиц, а согласно (8) функция Φ_β может соответствовать неравным потокам для падающих и расходящихся волн. К тому же Φ должна быть везде конечной, чтобы „не испортить" X^α. Всем этим условиям можно удовлетворить, если ввести в уравнение для Φ_β неоднородный член – источник I, отличный от нуля лишь в области взаимодействия:

$$(H_\beta - E)\,\Phi_\beta = I^\beta , \tag{11}$$

$$I^\beta = \sum_i I^{\beta}_{i}(\vec{R}_\beta)\,\phi^{\beta}_{i}(\vec{R}_\beta) = \sum_i \phi^{\beta}_{i} \sum_{\ell} \frac{I^{\beta}_{i\ell}(R_\beta)}{R_\beta}\, Y_{\ell m}\left(\frac{\vec{R}_\beta}{R_\beta}\right). \tag{12}$$

Для парциальных гармоник $\Phi^{\beta}_{i\ell}$ получаем:

$$\left(-\frac{1}{2M_\beta}\frac{d^2}{dR^2_\beta} + \frac{\ell(\ell+1)}{2M_\beta R^2_\beta} - E + \epsilon^{\beta}_{i}\right)\Phi^{\beta}_{i\ell}(R_\beta) = I^{\beta}_{i\ell}(R_\beta). \tag{13}$$

Решение такого уравнения сводится к квадратурам; а при специальном выборе $I^{\beta}_{i\ell}(R_{\beta})$ (например, в виде δ -функции) может быть получено в аналитическом виде. Чтобы Φ была конечной, требуем $\Phi^{\beta}_{i\ell}(0)=0$. Можно добиться выполнения (8) выбором постоянного комплексного множителя в каждом парциальном источнике. Этот множитель оказывается пропорциональным соответствующей парциальной амплитуде рассеяния $t^{\beta}_{i\ell}$ (см. /2,3/).

Согласно (1) и (11) получаем уравнение для X^{a} :

$$(H-E)X^{a}=-\sum_{\beta\neq a}(V_{\beta}\Phi_{\beta}+I_{\beta})\equiv J^{a}, \tag{14}$$

Введем проекционные операторы P^{a} и $Q^{a}=1-P^{a}$:

$$P^{a}=\sum_{i\ell m}{}' \left| Y_{\ell m}\left(\frac{\vec{R}_{a}}{R_{a}}\right)\phi^{a}_{i}\right\rangle\left\langle Y_{\ell m}\left(\frac{\vec{R}_{a}}{R_{a}}\right)\phi^{a}_{i}\right| , \tag{15}$$

где суммирование ведется по ограниченному числу каналов. Действуя операторами P и Q на (14), получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned}(E-H_{PP})P^{a}X^{a}&=H_{PQ}Q^{a}X^{a}+P^{a}J^{a},\\ (E-H_{QQ})Q^{a}X^{a}&=H_{QP}P^{a}X^{a}+Q^{a}J^{a},\end{aligned} \tag{16}$$

где $\qquad H_{PQ}=P^{a}HQ^{a}$ и т.д.

Уравнения (16) эквивалентны системе дифференциальных уравнений для парциальных компонент $\chi^{a}_{i\ell m}=\langle Y_{\ell m}\phi^{a}_{i}|X^{a}\rangle$ коэффициентов разложения (9). Граничные условия на $\chi^{a}_{i\ell m}(R_{a})$, благодаря "исправленному" асимптотическому поведению $X^{a}=\Psi-\Phi^{a}$, легко точно сформулировать: они совпадают с условиями для задачи без перераспределения, когда имеются только каналы с составом фрагментов „a". Приближенно можно оборвать такую систему (пренебречь QX), как это делается в обычном методе многоканальной связи. Корректность такой процедуры можно исследовать методом, аналогичным приведенному в [6]. Этот вопрос будет рассмотрен в отдельной работе[x].

Итак, имеется система уравнений для $\chi^{a}_{i\ell}$:

$$
\left[-\frac{1}{2m}\frac{d^2}{dR_a^2}+\frac{\ell(\ell+1)}{R_a^2}-E+\epsilon_i^a\right]\chi^a_{i\ell m}+\sum_{i\ell'}K_{\ell i i\ell'}(R_a)\,\chi^a_{i\ell' m'}=
$$

$$
=\sum_{\beta\neq a,n,\ell'' m''} t^{\beta}_{n\ell'' m''}\,M^{\beta}_{n\ell'' m'' i\ell m}+N_{i\ell m}, \tag{17}
$$

(где M , N , K –известные функции, а суммирование по n ведется по открытым каналам $\beta\neq a$). Она отличается от системы в задаче без перераспределения только наличием источников в правой части (17), ответственных за связь каналов a с другими каналами. Правда, в источники входят неизвестные амплитуды $t^{\beta}_{n\ell m}$. Получается замкнутый круг: чтобы найти Ψ , мы должны решить (17), а для непосредственного решения (17) нужно знать $t^{\beta}_{n\ell}$, т.е. Ψ. Из этого положения имеется, однако, простой выход. Из-за линейной зависимости $I^{\beta}_{i\ell}$ от $t^{\beta}_{i\ell}$, неизвестные амплитуды входят в правую часть (17) тоже линейно. Благодаря этому обстоятельству, общее решение (17) может быть представлено в виде суммы общего решения χ^{0} однородной системы, получающейся из (17), и частного решения (17):

$$
\chi^{a}_{i\ell m}=\chi^{a0}_{i\ell m}+\sum_{\beta\neq a,n,\ell''} t^{\beta}_{n\ell''}\,\chi^{\beta(M)}_{in\ell\ell''}+\chi^{\beta(N)}_{i\ell m}\ , \tag{18}
$$

где $\chi^{(M)}$ и $\chi^{(N)}$ –частичные решения неоднородных систем.

---

[x] Отметим здесь только, что сходимости разложения (9) будут содействовать такие факторы, как убывание коэффициентов смешивания, благодаря чему на высшие состояния будет забрасываться мало частиц; а, кроме того, то, что попадает на высшие состояния, подавляется: волны экспоненциально затухают в области с отрицательной энергией.

$$\left[-\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dR_a^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{R_a^2} - E + \epsilon^a_{i\ell} \right] \chi^M_{in\ell\ell''} + \Sigma K \chi = M_{n\ell''m''i\ell m} \qquad (19)$$

$$\left[-\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dR_a^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{R_a^2} - E + \epsilon^a_{i\ell} \right] \chi^N_{ilm} + \Sigma K \chi = N_{i\ell m}. \qquad (20)$$

Функции χ^0, χ^N, χ^M мы можем получить численным интегрированием, т.к. в соответствующие уравнения неизвестные t^β не входят. Осталось только определить t.

В задаче[3] об учете принципа Паули при рассеянии для определения t использовалось то обстоятельство, что амплитуды в каналах с различным составом частиц совпадали друг с другом с точностью до знака. С использованием значений χ при больших R_a были получены выражения для t в виде линейных комбинаций от самих же t. Эти соотношения рассматривались как система алгебраических уравнений для t. В общем случае рассеяния с перераспределением частиц такой метод дает лишь уравнения, связывающие амплитуды t^a в канале „a" с амплитудами t^β $(\beta \neq a)$. Для получения остальных уравнений можно применить, например, метод, аналогичный методу, предложенному В.С. Гурьяновым. Подставляем найденные численным интегрированием χ из (18) в (9) и, прибавляя Φ, получаем Ψ как явную линейную неоднородную функцию амплитуд.

Воспользуемся формулой, связывающей T-матрицу с волновой функцией Ψ:

$$T_{\beta a} = \int \Phi^o_\beta V_\beta \Psi \, d\tau . \qquad (21)$$

Здесь Φ^o_β –функция конечного состояния с составом „β".

Подставляя в (21) найденную Ψ, получаем систему неоднородных линейных уравнений относительно t_β

Следует обратить специальное внимание на тот случай, когда между фрагментами имеются дальнодействующие силы. Если при этом строить вспомогательную функцию Φ, удовлетворяющую (11), то в X "лишние" компоненты в асимптотике будут отсекаться лишь на таких больших расстояниях, где взаимодействие между фрагментами становится пренебрежимо малым. Для описания X в этом случае потребуется много членов в разложении (9). Введение в уравнение для Φ дальнодействующих сил позволит убирать из X "лишние" компоненты вплоть до области, где существенны короткодействующие силы. Такая операция, однако, потребует определенного усложнения расчетов.

3. Реакции с числом фрагментов, большим двух

В случае двух фрагментов разложение по шаровым гармоникам $Y_{\ell m}(\frac{\vec{R}_a}{R_a})$, где R_a -расстояние между фрагментами, позволяло аппроксимировать амплитуды рассеяния рядом констант-парциальных амплитуд.

Если количество фрагментов в некоторых каналах превышает 2, то при заданной энергии их внутреннего состояния возможен непрерывный спектр распределения энергии между различными типами относительного движения фрагментов. Так, для трех фрагментов в системе центра масс относительное движение описывается двумя векторами (например, вектором относительного расстояния двух фрагментов $\vec{\eta}$ и вектором расстояния третьего фрагмента от центра масс двух других $\vec{\xi}$) и $E - E_{внутр.} = \epsilon_\eta + \epsilon_\zeta$.

В этом случае разложение функции оказывается удобно производить не по привычным шаровым гармоникам $Y_{\ell m}$, а по обобщенным многомерным гармоническим функциям $Y_{(K)}$ /7/. Если рассматривать два вектора, $\vec{\eta}$ и $\vec{\zeta}$, как некоторый вектор в шестимерном пространстве с квадратом модуля:

$$\rho^2 = \zeta^2 + \eta^2 \quad , \tag{22}$$

зависящим от расстояния между всеми тремя частицами, то $Y_{(K)}$ определяется как функция остальных пяти координат и удовлетворяет уравнению

$$\Delta_6 \rho^K Y_{(K)}(\Omega_5) = (\Delta_\zeta + \Delta_\eta)\rho^K Y_{(K)}(\Omega_5) = 0, \tag{23}$$

где (K) –полный набор квантовых чисел. Пять углов Ω_5 могут быть выбраны различным образом. В случае тождественных частиц наиболее удобны функции, полученные В.В. Пустоваловым и Ю.А. Симоновым /7/.

Описание реакций с тремя фрагментами в отдельных каналах можно проводить на основе метода усечения асимптотик, изложенного в предыдущем разделе. Для этого компоненты вспомогательной функции и источники, соответствующие 3 фрагментным каналам, следует искать в виде

$$\Phi_3 = \sum_{(K)} \Phi^3_{(K)}(\rho)\, Y_{(K)}(\Omega_5); \quad I_3 = \sum_{(K)} I^3_{(K)}(\rho)\, Y_{(K)}(\Omega_5), \tag{24}$$

где $\Phi\ (\rho)$ удовлетворяют аналогично (13) уравнению

$$\left[\frac{1}{\rho^5}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^5\frac{d}{d\rho}\right) - \frac{k(k+4)}{\rho^2} - E\right]\Phi^3_{(K)} = I^3_{(K)}(\rho). \tag{25}$$

В суммах (24) следует оставить конечное число членов, достаточное при данной энергии для описания в нужном приближении асимптотического поведения Ψ в каналах с тремя фрагментами. Парциальные амплитуды трехфрагментных каналов характеризуют наряду с угловым распределением фрагментов также распределение энергии между ϵ_ζ и ϵ_η. Вклад высших K гармоник оказывается малым в силу причин, аналогичных тем, по которым мы ограничиваемся суммированием по небольшому числу ℓ при разложении по $Y_{\ell m}$.

В остальном техника расчетов остается неизменной: из Ψ наряду с Φ_2 (двухфрагментные вспомогательные функции) вычитается Φ_3. Функция $X = \Psi - \Phi_2 - \Phi_3$ разлагается согласно (9), а из уравнений (21) находим парциальные амплитуды двух и трехфрагментных каналов.

Заключение

Итак, от исходного уравнения Шредингера (1) в частных производных мы перешли к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и системе алгебраических уравнений. Это принципиально важный шаг, т.к. он дает нам сравнительно простой алгоритм решения чрезвычайно сложной задачи. При конкретных расчетах на машине используется тот факт, что функциональное пространство решений системы конечного числа дифференциальных уравнений представляет собой обобщенное векторное пространство конечного числа измерений. Численно находим фундаментальную систему решений, соответствующую базису независимых векторов, а затем составляем такую линейную комбинацию этих решений, которая удовлетворяет требуемым граничным условиям. Для уравнений в частных производных пространство решений бесконечномерно, и такой прямой путь использовать нельзя.

Нужно отметить, что существует еще один метод сведения задачи о столкновениях с перераспределением частиц к системе дифференциальных уравнений, предложенной Ченом и Миттельменом /8/. Представляет интерес главная идея их метода, заключающаяся в использовании одной и той же координаты для описания каналов с различным составом частиц. Это очень удобно для расчетов, но пренебрежение частью $Q\Psi$ волновой функции Ψ в методе /8/ оказывается более грубым приближением, чем операция отбрасывания Q -каналов в обычном формализме /1/.

Кроме эффекта влияния неучтенных каналов, в $Q\Psi$ (работы /8/) входят члены, обозначаемые /8/ $O(\frac{1}{r_0})$, которые не малы в области, где разыгрывается динамика процесса, определяющая искомые амплитуды рассеяния.

Выражаем благодарность И.В. Амирханову, С.И. Гришановой, В.С. Гурьянову, И. Ловашу, В.К Лукьянову, О. Лхагва, В.В. Пустовалову, Я.А. Смородинскому, М.Б. Шефтелю за интерес к работе и ценные дискуссии.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Замкнутая система уравнений для элементов T -матрицы могла бы быть получена, в принципе, и следующим путем. Опишем его для лучшего понимания метода. Ограничимся случаем, когда возможны лишь два состава фрагментов: a и b .

Пусть при данной энергии имеется m открытых каналов "a" и $n-m$ открытых каналов "b". Будем теперь писать амплитуды так: t^{aa}, t^{ab}, t^{ba}, $t^{bb'}$. Первый индекс $a(b)$ означает номер входного канала с составом $a(b)$, а второй индекс нумерует канал, которому соответствует данная амплитуда. Все эти амплитуды образуют T-матрицу размерности $n \times n$:

$$T = \left|\begin{array}{c|c} T^{aa'} & T^{ab} \\ m\times m & m\times(n-m) \\ \hline T^{ba} & T^{bb'} \\ (n-m)\times m & (n-m)\times(n-m) \end{array}\right| . \tag{П.1}$$

Решая систему (17) для χ^a, мы можем при больших R_a выразить согласно (18) амплитуды в каналах "a" в виде линейных комбинаций амплитуд в каналах "b". Выбирая последовательно в качестве входных все m каналов "a", получаем m^2 уравнений:

$$t^{aa'} = \sum_b F_b^{aa'} t^{ab} + Q^{aa'} , \tag{П.2}$$

где F и Q – константы, определяемые из асимптотических значений χ. Решения χ, соответствующие различным входным каналам, строим из общего решения (18) должным выбором произвольных констант, входящих в χ^0.

Если в качестве входных каналов последовательно брать $n-m$ каналов "b", то дополнительно получаем $(n-m)$ уравнений:

$$t^{ba} = \sum_{b'} F_{b'}^{ba} t^{bb'} + Q^{ba} , \tag{П.3}$$

Для получения уравнений (П.3) нужно решать (17) с источниками, изменяющимися при изменении входного канала (меняется, правда, только N в (17) и (20)).

Дальнейшие действия аналогичны решению системы (17), но уже для χ^b. Получаем $(n-m)^2$ уравнений:

$$t^{bb'} = \sum_a F_a^{bb'} t^{ba} + Q^{bb'} \qquad (П.4)$$

и $m(n-m)$ уравнений:

$$t^{ab} = \sum_{a'} F_{a'}^{ab} t^{aa'} + Q^{ab} \qquad (П.5)$$

Итак, мы имеем n^2 уравнений (П.2)-(П.5) для n^2 неизвестных t x/.

Теорема взаимности и унитарность матрицы рассеяния сокращает число независимых параметров, определяющих матрицу T. (Только $\frac{n(n+1)}{2}$ параметров из $2n^2$ являются независимыми).

Литература

1. Г. Фешбах. Единая теория ядерных реакций. Ann.of Phys.,5,357(1958); 19, 287 (1962).
2. И.В. Амирханов, В.П. Жигунов, Б.Н. Захарьев. Столкновения с перераспределением частиц. Доклад на 17-ом совещании по ядерной спектроскопии, Харьков, 1967. Препринт Р4-2983, Дубна, 1966.
3. Т.Г. Ефименко, В.П. Жигунов, Б.Н. Захарьев. К вопросу о тождественности частиц в теории рассеяния. Препринт Р-3209, Дубна, 1967.
4. R.Mariott, Proc.Phys.Soc., 72, N 463, 121 (1958).
5. Б.Н. Захарьев, О. Лхагва. Доклад на 17-ом совещании по ядерной спектроскопии, Харьков, 1967;
   M.Rotenberg. Ann. of Phys., 19, 262 (1962).
6. Б.Н. Захарьев, С.Н. Соколов. Ann.der Phys.,15, 183 (1965);
   Б.Н. Захарьев, Р.К. Калинаускас. Ann.der Phys.,16, 305 (1965);
   И.В. Амирханов, Л.Г. Заставенко, Б.Н. Захарьев. Препринт Р-2310, Дубна, 1965.

x/ Следует иметь в виду, что t -величины комплексные, т.е. фактически имеется $2n^2$ алгебраических уравнений для $2n^2$ вещественных неизвестных.

7. Ю.А. Симонов, ЯФ, 3, 630 (1966);
В.В. Пустовалов, Ю.А. Симонов. ЖЭТФ, 51, 345 (1966);
Н.Я. Виленкин. Специальные функции и теория представлений групп. Москва, 1965;
М.Б. Шефтель. Препринт, Дубна, 1966.

8. J.C.Y.Chen. Phys.Rev., 152, N 4, 1454 (1966);
J.C.Y.Chen, M.H.Mittleman. Ann.of Phys., 37, 264 (1966).

Рукопись поступила в издательский отдел
24 апреля 1967 г.