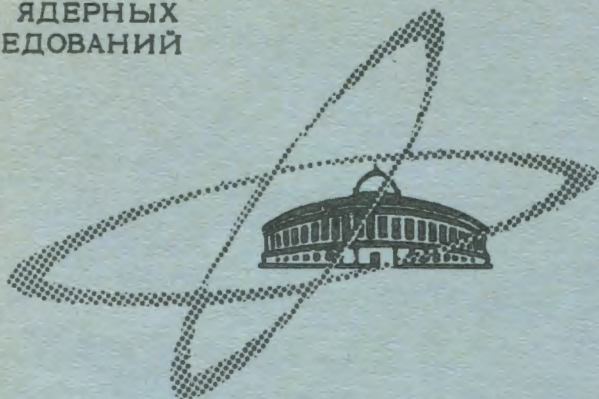


B-384

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна



P4 - 3256

Э.А. Весман

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ

ОБ ОДНОМ МЕХАНИЗМЕ ОБРАЗОВАНИЯ
МОЛЕКУЛЯРНОГО ИОНА МЕЗОДЕЙТЕРИЯ

1967.

P4 - 3256

Э.А. Весман

ОБ ОДНОМ МЕХАНИЗМЕ ОБРАЗОВАНИЯ
МОЛЕКУЛЯРНОГО ИОНА МЕЗОДЕЙТЕРИЯ

ОБЩЕУЧЕБНИК ИНСТИТУТ
УЧЕБНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
БИБЛИОТЕКА

4924/3 mp

В в е д е н и е

Между экспериментальными значениями скорости образования мезомолекулярного иона $(dd\mu)^+$ $w_{\text{э}} = (0,75 \pm 0,11) \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1/1/}$ и теоретическими оценками $w_{\text{т}} \leq 0,34 \cdot 10^5 \text{ сек}^{-1/2/}$ существует большое разногласие, которого нет, например, между экспериментальной и теоретической величинами скорости образования $(pp\mu)^+$: $w_{\text{э}} = (2,55 \pm 0,18) \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1/3/}$ и $w_{\text{т}} = 2,5 \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1/2/}$. К тому же разные эксперименты дают разные скорости образования иона $(dd\mu)^+$. Так, например, величина скорости, полученная из опытов, которые проведены при помощи пузырьковых камер^{/4,5/}, почти на порядок меньше соответствующей величины, полученной при помощи диффузионной камеры^{/1/}. Этот факт наводит на мысль, что скорость образования иона $(dd\mu)^+$ зависит, по-видимому, от температуры среды. В работе^{/6/} был предложен механизм образования $(dd\mu)^+$, объясняющий и большую скорость и температурную зависимость этой реакции. Этот механизм связан с наличием в системе $(dd\mu)^+$ возбужденного вращательно-колебательного уровня $K=1, \nu=1$ с энергией связи в несколько эв, дающего резонансные эффекты, не рассмотренные до сих пор теорией.

Такой уровень с энергией связи $|E_d| = 7 \text{ эв}$ получен^{/2/} в адиабатическом приближении с учетом динамических поправок на движение ядер (будем называть это приближение улучшенным адиабатическим приближением). Вариационные расчеты^{/7/} хотя и не дают непосредственно такого уровня, но и не противоречат его существованию, поскольку наряду с первым решением секулярного уравнения $E_d^0 = -226 \text{ эв}$ (соответствующим $K=1, \nu=0$) получится второе, очень близкое к нулю решение $E_d^1 = +7,5 \text{ эв}$ (соответствующее $\nu=1$).

При этом надо иметь в виду, что в ^{/7/} не решалась специальная задача минимизации E_d^1 , а последняя является просто добавочным результатом минимизации E_d^0 . Ясно, что при решении специальной вариационной задачи величина E_d^1 должна уменьшиться. Любопытно отметить тот факт, что уровни мезомолекул $(pp\mu)^+$, $(dd\mu)^+$ и $(tt\mu)^+$, вычисленные ^{/2/} в улучшенном адиабатическом приближении, с очень хорошей точностью совпадают с результатами вариационных вычислений ^{/7-10/} (см. табл. 1). Лишь для иона $(tt\mu)^+$ в возбужденном состоянии $K=1, \nu=1$ в ^{/7/} получена энергия связи, значительно меньшая, чем дает улучшенное адиабатическое приближение. Однако, как уже указывалось при обсуждении аналогичного уровня $(dd\mu)^+$, энергия связи должна увеличиться при решении специальной задачи минимизации. В то же время для уровней с малой энергией связи в ^{/2/} получился несколько завышенный результат.

Обычно рассматриваемым механизмом образования мезомолекулярного иона является электрический дипольный (E1) переход из молекулярного состояния отталкивания Σ_u в состояние притяжения Σ_g . Для молекулы $(dd\mu)^+$ такой механизм дает для скорости образования величину почти на 2 порядка меньшую, чем для $(pp\mu)^+$. Это обусловлено двумя обстоятельствами: 1) уровень $K=1$ лежит в системе $(dd\mu)^+$ примерно в 2 раза глубже, и 2) масса дейтрона вдвое больше массы протона, что приводит к более быстрому затуханию волновых функций в подбарьерной области, а матричный элемент, величина которого определяется перекрытием этих функций соответственно в состояниях Σ_g и Σ_u , оказывается поэтому малым по сравнению с соответствующим матричным элементом для $(pp\mu)^{+x}$.

Электрический монополюсный переход (E0) мог бы дать значительную скорость образования, если бы в системе $(dd\mu)^+$ был уровень $K=0$ с малой энергией связи. Однако уровень $\nu=1$ (см. табл. 1) довольно глубокий, и вычисление E0-перехода на этот уровень дает для этой скорости величину $w = 3 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1/11}$.

x) Отметим, что если бы уровень $K=1, \nu=1$ у $(dd\mu)^+$ был настолько глубоким, что освобождающаяся при образовании мезомолекулы энергия могла вызвать конверсию молекулярного электрона (для этого требуется энергия не меньше 16 эв), то E1-переход мог бы дать величину скорости образования $(dd\mu)^+ w = 4 \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1}$. Однако в таком случае осталась бы непонятной зависимость скорости образования от температуры.

Если предполагать, что для $(dd\mu)^+$ уровень $K=1, \nu=1$ имеет энергию связи порядка 4,6 эв, то имеет смысл рассматривать E1-переход на этот уровень с отдачей энергии связи на диссоциацию молекулы D_2 . Однако вычисления показывают, что скорость образования, даваемая таким механизмом, ничтожно мала и составляет лишь величину $w \approx 10^2 \text{ сек}^{-1}$.

Наконец, если предполагать наличие уровня $K=1, \nu=1$ с энергией связи 1-2 эв, то можно рассматривать механизм образования $(dd\mu)^+$ путем E1-перехода с отдачей энергии связи на возбуждение вращательно-колебательных уровней большой молекулы, состоящей из ядра d , иона $(dd\mu)^+$ и электронов. Такой механизм оказывается резонансным по скоростям мезоатомов $d\mu$. Считая, что мезоатомы $d\mu$ обладают тепловыми энергиями и учитывая их распределение по скоростям, можно получить скорость образования $(dd\mu)^+$ в зависимости от температуры среды в условиях эксперимента ^{/6/}.

Надо отметить, что два последних механизма в случае больших передаваемых энергий дают ничтожный вклад ввиду слабости связи между ядрами, не допускающей передачи значительных энергий.

В данной работе будет рассматриваться механизм образования $(dd\mu)^+$ путем E1-перехода на уровень $K=1, \nu=1$ с отдачей энергии связи на возбуждение большой молекулы, состоящей из ядра d , иона $(dd\mu)^+$ и электронов. (Мы будем пренебрегать разницей энергии между состояниями $K=0, \nu=n$ и $K=1, \nu=n$ в большой молекуле).

1. Механизм и матричный элемент перехода

Пусть атом $d\mu$ приближается к одной из молекул D_2 . Обозначим \vec{R}_1, \vec{R}_2 и \vec{R}_μ радиус-векторы соответственно двух ядер d и μ -мезона, и $\vec{\rho}_1$ - радиус-вектор третьего ядра d . Введем обозначения:

$$\vec{R} = \vec{R}_1 - \vec{R}_2, \quad \vec{r}_1 = \vec{R}_\mu - \vec{R}_1,$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R}_\mu - \vec{R}_2, \quad \vec{\rho} = \vec{\rho}_1 - \vec{R}_2.$$

Возмущением, вызывающим переход в связанное состояние $d d \mu$, является дипольное взаимодействие. Дипольный момент системы $d d \mu$

$$\vec{D} = e (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) / 2, \quad (1,1)$$

энергия взаимодействия его со вторым ядром молекулы D_2 равна (с точностью R/ρ)

$$V = e \vec{D} \vec{\rho} / \rho^3. \quad (1,2)$$

Вычисляя вероятность резонансного процесса, в результате которого возникают только связанные состояния, надо учитывать, что частицы в начальном состоянии имеют распределение по энергиям (см., например, ^{12/}). Пусть плотность распределения $d \mu$ -атомов по энергиям равна $\gamma(E)$. Тогда $\gamma(E) dE$ есть вероятность атому $d \mu$ иметь энергию между E и $E + dE$.

Обозначая волновые функции мезомолекулы и большой молекулы соответственно в начальном состоянии Ψ^i и χ^i , а в конечном состоянии Ψ^f и χ^f , получим дифференциальную скорость перехода:

$$d w = \frac{2 \pi}{h} N \gamma(E) dE \delta(|E_d| + E - E_\nu) \times \quad (1,3)$$

$$\times \sum_{m,m} |\int \Psi^{f*} \Psi^i V \chi^{f*} \chi^i d\vec{R} d\vec{\rho} d\vec{r}_1 d\vec{r}_2|^2,$$

где E_ν - энергия, необходимая для возбуждения ν -го колебательного уровня большой молекулы, $N = 4 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ - плотность ядер, а суммирование производится по всем конечным состояниям.

Выбираем волновые функции в следующем виде:

$$\Psi^i = \frac{f(R)}{R} \Sigma_u(R, r_1, r_2), \quad (1,4)$$

$$\Psi^f = \frac{g(R)}{R} Y_{1,m}(\theta, \phi) \Sigma_g(R, r_1, r_2),$$

$$\chi^i = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} h_0^{(0)}(\rho) / \rho,$$

$$\chi^f = Y_{1,m}(\alpha, \beta) h_\nu^{(1)}(\rho) / \rho, \quad (1,5)$$

а мезонную часть волновых функций в приближении ЛКАО:

$$\Sigma_{g,u} = [2\pi(1 \pm s)]^{-1/2} (e^{-r_1} \pm e^{-r_2}), \quad (1,6)$$

где

$$s = \frac{1}{\pi} \int e^{-r_1} e^{-r_2} dr = (1 + R + \frac{R^2}{3}) e^{-R}.$$

Учитывая, что

$$\int \Sigma_g(R, r_1, r_2) \vec{D} \Sigma_u(R, r_1, r_2) dr_1 dr_2 = (1 - s^2)^{-1/2} \vec{R} / 2 \approx -\vec{R} / 2, \quad (1,7)$$

и статистический вес состояния Σ_u , равный $1/3$, получим после интегрирования по угловым переменным и суммирования по проекциям момента:

$$w = \frac{8\pi^2}{27} N a_0^3 (a_\mu / a_0)^3 \frac{e^4}{a_0^2 h} \gamma(E) |I_1|^2 |I_2(\nu)|^2 \text{сек}^{-1}, \quad (1,8)$$

где a_0 и a_μ - боровские радиусы электрона и μ -мезона и введены обозначения

$$I_1 = \int f(R) g(R) R dR, \quad (1,9)$$

$$I_2(\nu) = \int h_0^{(0)}(\rho) h_\nu^{(1)}(\rho) d\rho / \rho^2. \quad (1,10)$$

Интегралы I_1 и I_2 выражены соответственно в мезоатомных ($h=1, m_\mu=1, e=1$) и атомных ($h=1, m_e=1, e=1$) единицах.

2. Вычисление интегралов

а) Для вычисления интеграла I_1 надо было бы взять мезомолекулярные волновые функции, полученные, например, в приближении потенциала Морзе ^{12/}, и вычислить интеграл при помощи этих функций. Однако ввиду того, что связанное состояние имеет малую энергию связи, можно волновую функцию этого состояния взять, аналогично элементарной теории дейтрона, в виде

$$g(R) = \sqrt{2} a^{1/4} \exp(-R\sqrt{a}), \quad (2,1)$$

где $a = (M_d |E_d|)^{1/2}$, а M_d - масса дейтрона.

Волновая функция свободного движения при малых энергиях относительного движения атома $d\mu$ и ядра d может быть заменена функцией.

$$f(R) \approx R - a_u \quad (2,2)$$

где $a_u = 5,73$ - длина рассеяния. При такой замене надо положить нижний предел в интеграле равным a_u , но ввиду того, что главный вклад в интеграл дает область больших R , можно просто взять $a_u = 0$. Получим:

$$I_1 \approx 2(2a^{-5})^{1/4} = 3,8 \cdot 10^3 |E_d|^{-5/4} \quad (2,3)$$

(Здесь E_d измеряется в эв).

б) Для вычисления интеграла $I_2(\nu)$ принимаем, что потенциальная яма вблизи равновесного расстояния в большой молекуле в конечном состоянии ($K=1$, молекула $D(d\mu)^+$) не меняется по сравнению с ямой в начальном состоянии ($K=0$, молекула D_2). Введем новую переменную - отклонение x от положения равновесия ρ_0 и разлагаем $1/\rho^2$ по степеням x :

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\rho_0^2} - \frac{2x}{\rho_0^3} + \dots (-1)^m \frac{(m+1)x^m}{\rho_0^{m+2}} + \dots \quad (2,4)$$

При вычислении интеграла $I_2(\nu)$ надо отдельно рассматривать два крайних случая:

1) переход в связанное состояние мезомолекулы быстрый по сравнению с периодом колебаний ядер в большой молекуле и колебания за это время не успевают перестроиться;

2) колебания большой молекулы адиабатически перестраиваются. По-видимому, образованию молекулы $(d\mu)^+$ на самом деле надо присвоить характеристики, лежащие между этими крайними случаями.

Волновые функции выбираем осцилляторные:

$$h_0^{(0)} = (M_1 \omega_1 / \pi)^{1/4} \exp(-M_1 \omega_1 x^2 / 2) \quad (2,5)$$

$$h_\nu^{(1)} = (M_2 \omega_2 / \pi)^{1/4} / (2^\nu \nu!)^{1/2} H_\nu(x\sqrt{M_2 \omega_2}) \times \exp(-M_2 \omega_2 x^2 / 2) \quad (2,6)$$

Здесь $M_1 = M_d / 2$ и $M_2 = 2M_d / 3$ - приведенные массы ядер, а

$$\omega_k = \left[\frac{1}{M_k} \left(-\frac{d^2 U}{d\rho^2} \right)_{\rho=\rho_0} \right]^{1/2} \quad (2,7)$$

$$\omega_1 = 0,388 \text{ эв}^{1/4}, \quad \omega_2 = 0,336 \text{ эв}.$$

Введем обозначение:

$$y = [2M_2 \omega_2 / (M_1 \omega_1 + M_2 \omega_2)]^{1/2} = 1,035 \quad (2,8)$$

Тогда (см. Приложение):

$$I_2(\nu) = \left(\frac{M_1 \omega_1}{M_2 \omega_2} \right)^{1/4} \frac{(\nu+1)\sqrt{\nu!}}{\rho_0^{\nu+2} \sqrt{2^\nu}} (M_2 \omega_2)^{-\nu/2} R(\nu) \quad (2,9)$$

где с точностью до членов 1-го порядка по $1/M_2 \omega_2 = 3,3 \cdot 10^{-2}$:

$$R(2n) = (-1)^n \frac{1}{n! \sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^n \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) y^{2m+1} \times \\ \times (M_2 \omega_2)^{n-m} F\left(-n, m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, y^2\right) \quad (2,10)$$

$$R(2n+1) = (-1)^{n+1} \frac{2}{n! \sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^n \Gamma\left(m + \frac{3}{2}\right) y^{2m+3} \times \\ \times (M_2 \omega_2)^{n-m} F\left(-n, m + \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, y^2\right) \quad (2,11)$$

Здесь гипергеометрические функции сводятся к полиномам, которые разлагаются по степеням $(1-y^2)$ (см. Приложение).

В условиях низкой концентрации дейтерия, когда практически весь дейтерий находится в состоянии молекулы HD , при рассмотрении неадиабатического образования $(dd\mu)^+$ надо взять

$$\gamma = 1,08.$$

Из (2,10), (2,11) и (П,11) видно, что при этом интеграл $I_2(\nu)$ оказывается несколько большим при том же ν . Значения интеграла $I_2(\nu)$ с учетом членов первого порядка по $(1 - \gamma^2)$ приведены в табл. 2 для $\gamma = 1,035$; $\gamma = 1,08$ и $\gamma = 1$.

3. Скорость образования

Как видно, из (1,8) рассматриваемый механизм дает скорость образования иона $(dd\mu)^+$ в зависимости от плотности распределения $d\mu$ -атомов по энергиям. Будем предполагать, что $d\mu$ -атомы тепловые и при температуре T их энергии распределены по Максвеллу:

$$\begin{aligned} \gamma(E) &= \gamma(E, \bar{E}) = 2(E / \pi k^3 T^3)^{1/2} \exp(-E/kT) = \\ &= 3(3E/2\pi \bar{E}^3)^{1/2} \exp(-3E/2\bar{E}). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Максимум этой функции находится в точке $\bar{E} = E$. Максимум скорости образования $(dd\mu)^+$ можно установить по экспериментальным данным. Довольно хорошее согласие с экспериментом достигается при $\bar{E} = 0,016$ эв (см. рис. 1^х). Надо отметить, что, строго говоря, сечение рассматриваемого процесса не имеет определенного смысла, так как процесс идет только между частицами, имеющими вполне определенные относительные энергии $E = E_{\nu} - |E_d|$.

Учитывая значения всех констант в (1,8), а также значение интеграла (2,3), получим максимальную скорость образования $(dd\mu)^+$:

$$w_M = 2 \cdot 10^{13} |E_d|^{-5/2} |I_2(\nu)|^2. \quad (3.2)$$

х) Анализ, проведенный методом наименьших квадратов с учетом опытов, сделанных при большой концентрации дейтерия (см. § 4), дает при $\chi^2_{\text{мин}} = 5,2$: $\bar{E} = 0,0159 \pm 0,0004$ и $w_M = (1,19 \pm 0,18) \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1}$.

Сравнивая с ожидаемым на базе экспериментальных данных результатом $w_M = 1,4 \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1}$, видим, что переход в большой молекуле должен идти на колебательный уровень $\nu = 5-6$ и соответственно уровень мезомолекулы $K = 1$, $\nu = 1$ должен иметь энергию связи $|E_d| \approx (1,5 \div 2)$ эв.

4. Обсуждение

На рис. 1 приведены экспериментальные значения скорости образования $(dd\mu)^+$ как функция средней кинетической энергии относительного движения частиц вместе с зависимостью по данной работе. Экспериментальные данные^{/4,5,14/} пересчитаны к плотности жидкого дейтерия. Скорости образования $(dd\mu)^+$ получены в предположении, что скорость ядерной реакции в молекуле мезодейтерия на несколько порядков больше скорости ее образования.

Три опыта Желепова и др.^{/1/}, а также опыты Фетковича и др.^{/4/} и Дюда^{/5/} проведены в условиях большой концентрации дейтерия (89-99%). В таких условиях можно считать, что количество молекул D_2 намного больше количества молекул HD и что образование иона $(dd\mu)^+$ идет главным образом из состояния D_2 . Кривая на рис. 1 с максимумом в точке $E = 0,016$ эв относится именно к такому типу опытов.

Опыт Альвареца и др.^{/14/} проведен при низкой концентрации дейтерия (4,3%), то же самое относится и к одному из опытов Желепова и др.^{/1/} (при $\bar{E} = 0,17$ эв), в условиях которого концентрация дейтерия составляла 6,1%. Для такой низкой концентрации при комнатных температурах количество молекул HD превышает количество молекул D_2 примерно в 15 раз^{/15/ х}, и можно считать, что образование иона $(dd\mu)^+$ идет из состояния HD . Образование из состояния HD отличается от образования из состояния D_2 тем, что:

1) точка максимума смещается (по-видимому, она где-то в районе $\bar{E} = 0,25$ эв);

х) При температурах, близких к нулю, молекулы HD отсутствуют, но в условиях, в которых проведен опыт^{/12/} вопрос требует дальнейшего исследования.

2) матричный элемент увеличивается за счет увеличения интеграла $I_2(\nu)$;

3) из-за малого сечения упругого рассеяния $d\mu$ на протонах частицы $d\mu$ не успевают термализоваться, и их распределение, скорей всего, не максвелловское.

Также надо отметить следующий факт: в данной работе мы не учли, что при температурах, при которых работает диффузионная камера, у молекул возбуждены вращательные уровни и, вообще говоря, переходы идут из состояния $K=n$, где $n > 0$ молекулы D_2 (или соответственно HD). А это обстоятельство, в свою очередь, усложняет всю картину.

Но все же, по-видимому, можно сделать вывод, что мезомолекулярный ион $(dd\mu)^+$ имеет действительно возбужденный уровень $K=1$, $\nu=1$ с энергией связи $|E_d| = (1,5-2)$ эв и что рассматриваемый механизм дает главный вклад при образовании иона $(dd\mu)^+$.

Пользуясь случаем выразить свою глубокую благодарность С.С. Герштейну за постоянный стимулирующий интерес к работе и за обсуждения, а также руководство Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ за оказанное мне гостеприимство.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

Имея в виду разложение (2,4), можно интеграл $I_2(\nu)$ выразить в зависимости от четности колебательного квантового числа ν и степени x^m следующими формулами:

$$I_2(2n) \approx \left(\frac{M_1 \omega_1}{\pi^2 M_2 \omega_2} \right)^{1/4} \frac{(2n+1)!}{\rho_0^{2n+2}} [2^{2n} (2n)!]^{-1/4} \times \quad (П,1)$$

$$\times \sum_m \frac{y^{2m+1}}{(M_2 \omega_2)^m} N_g,$$

$$I_2(2n+1) = \left(\frac{M_1 \omega_1}{\pi^2 M_2 \omega_2} \right)^{1/4} \frac{(2n+2)!}{\rho_0^{2n+2}} [2^{2n+1} (2n+1)!]^{-1/4} \times \quad (П,2)$$

$$\times \sum_m \frac{y^{2m+2}}{(M_2 \omega_2)^{m+1/2}} N_u,$$

где

$$N_g = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^{2m} H_{2n}(xy) dx, \quad (П,3)$$

$$N_u = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^{2m+1} H_{2n+1}(xy) dx. \quad (П,4)$$

Учитывая формулы связи между полиномами Эрмита и вырожденными гипергеометрическими функциями:

$$H_{2n}(x) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} F\left(-n, \frac{1}{2}, x^2\right), \quad (П,5)$$

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n 2 \frac{(2n+1)!}{n!} x F\left(-n, \frac{1}{2}, x^2\right), \quad (П,6)$$

сведем интегралы (П,3) и (П,4) к удобному для интегрирования виду. Получим:

$$N_g = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) F\left(-n, m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, y^2\right), \quad (П,7)$$

$$N_u = (-1)^n 2 \frac{(2n+1)!}{n!} y \Gamma\left(m + \frac{3}{2}\right) F\left(-n, m + \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, y^2\right), \quad (П,8)$$

где гипергеометрические функции сводятся к полиномам:

$$F\left(-n, m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, y^2\right) = \frac{y(1-y^2)^{n-m}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \dots \left(\frac{1}{2} + n - 1\right)} \frac{d^n}{dz^n} \left[z^{n-\frac{1}{2}} (1-z)^m \right]_{z=y^2}, \quad (П,9)$$

$$F\left(-n, m + \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, y^2\right) = \frac{y^{-1/2}(1-y^2)^{n-m}}{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \dots \left(\frac{3}{2} + n - 1\right)} \frac{d^n}{dz^n} \left[z^{n+\frac{1}{2}} (1-z)^m \right]_{z=y^2}. \quad (П,10)$$

Выпишем несколько первых полиномов:

$n = 1$

$$F(-1, m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, y^2) = (1 - y^2) - 2y^2 m,$$

$$F(-1, m + \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, y^2) = (1 - y^2) - \frac{2}{3} m y^2;$$

$n = 2$

$$F(-2, m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, y^2) = (1 - y^2)^2 - 4y^2 m(1 - y^2) + \frac{4}{3} y^4 m(m - 1),$$

$$F(-2, m + \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, y^2) = (1 - y^2)^2 - \frac{4}{3} y^2 m(1 - y^2) + \frac{4}{15} y^4 m(m - 1); \quad (П.11)$$

$n = 3$

$$F(-3, m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, y^2) = (1 - y^2)^3 + 6y^2 m(1 - y^2)^2 +$$

$$+ 4y^4 m(m - 1)(1 - y^2) - \frac{8}{15} y^6 m(m - 1)(m - 2),$$

$$F(-3, m + \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, y^2) = (1 - y^2)^3 - 2y^2 m(1 - y^2)^2 +$$

$$+ \frac{4}{5} y^4 m(m - 1)(1 - y^2) - \frac{8}{105} y^6 m(m - 1)(m - 2).$$

Видно, что члены со значениями $m = 0, 1, \dots, n - 1$ все одного порядка, поскольку (П.1) и (П.2) содержат множитель $(M_2 \omega_2^{-m})$, а членами $m > n$ можно пренебречь. По $(1 - y^2)$ учитываем в сумме по m только наибольший член.

Интеграл $I_2(\nu)$ получим в виде (2,8-2,11).

Из формул (П.11) легко получить формулы, справедливые при $y = 1$, и при помощи этих формул вычислить интеграл $I_2(\nu)$.

Л и т е р а т у р а

1. В.П. Джелепов, П.Ф. Ермолов, В.И. Москалев, В.В. Фильченков. ЖЭТФ, **50**, 1235 (1966).
2. Я.Б. Зельдович, С.С. Герштейн. УФН, **71**, 581 (1960).
3. G. Conforto, C. Rubbia, E. Zavattini, S. Focardi. Nuovo Cimento **33**, 1001 (1964).
4. J. G. Fetkovich, T.H. Fields, G.B. Yodh, M. Demik. Phys. Rev. Lett., **4**, 570 (1960).
5. J. Doede. Phys. Rev., **132**, 1782 (1963).
6. Э.А. Весман. Письма ЖЭТФ, **5**, 113 (1967).
7. C.W. Scherr, M. Machacek. Phys. Rev., **138**, A371 (1965).
8. W.R. Wessel, P. Phillipson. Phys. Rev. Lett., **13**, 23 (1964).
9. A. Halpern. Phys. Rev. Lett., **13**, 660 (1964).
10. В.Р. Carter. Phys. Rev., **141**, 863 (1966).
11. Я.Б. Зельдович. ДАН, **95**, 493 (1954).
12. П.А. Дирак. Принципы квантовой механики. Физматгиз, М., 1960, стр. 284.
13. B. Rosen. Donnees spectroscopiques concernant les molecules diatomiques. Hermann Co, Paris (1951).
14. L.W. Alvarez, H. Bradner, F.S. Crawford, J.A. Crawford, P. Falk-Vairant, M.L. Good, J.D. Gow, A.H. Rosenfeld, F. Solnitz, M.L. Stevenson, H.K. Ticho, R.D. Tripp; Phys. Rev., **105**, 1127 (1957).
15. М.П. Малков, А.Г. Зельдович, А.Б. Фрадков, И.Б. Данилов. Выделение дейтерия из водорода методом глубокого охлаждения. Госатомиздат, М., 1961.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 марта 1967 г.

Таблица 1

Уровни мезомолекул с одинаковыми ядрами (энергии связи в эв)

Молекула	K = 0		K = 1	
	$\nu = 0$	$\nu = 1$	$\nu = 0$	$\nu = 1$
$(pp\mu)^+$	252, a	-	108 a	-
	254,3 c		106,8 b	
	250,8 e		107,23 d	
$(dd\mu)^+$	330 a	40 a	228 a	7a
	323,8 e	34,2 e	226 b	
			226,55	
$(tt\mu)^+$	367 a	86 a	288 a	45a
	361,5 e	75,3 e	289 b	31,7 b
			288,72 d	

a - взято в работе /2/
 b - " " /7/
 c - " " -/8/
 d - " " /8/
 e - " " /10/

Таблица 2
Значения интегралов $I_2(\nu)$

ν	$y = 1,035$	$y = 1$	$y = 1,08$
	0	$5,07 \cdot 10^{-1}$	$5,10 \cdot 10^{-1}$
1	$-1 \cdot 10^{-1}$	$-9,4 \cdot 10^{-2}$	-0,108
2	$8 \cdot 10^{-2}$	$1,8 \cdot 10^{-2}$	0,12
3	$-1,4 \cdot 10^{-2}$	$-3,9 \cdot 10^{-3}$	$-2,9 \cdot 10^{-2}$
4	$5,3 \cdot 10^{-3}$	$8,9 \cdot 10^{-4}$	$2,1 \cdot 10^{-2}$
5	$-1,4 \cdot 10^{-3}$	$-2,2 \cdot 10^{-4}$	$-8,10^{-3}$
6	$4,8 \cdot 10^{-4}$	$5,7 \cdot 10^{-5}$	$3,1 \cdot 10^{-3}$
7	$-1,5 \cdot 10^{-4}$	$-1,6 \cdot 10^{-5}$	$-1,1 \cdot 10^{-3}$

Таблица 3

Разность энергии (эв) между состояниями:

- (а) $\nu = 0$ молекулы D_2 и $\nu = n$ молекулы $D(dd\mu)^+$,
 (б) $\nu = 0$ " $D(dd\mu)^+$ и $\nu = n$ " $D(dd\mu)^+$,
 (в) $\nu = 0$ " HD и $\nu = n$ " $H(dd\mu)^+$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
а	-0,026	0,310	0,647	0,99	1,32	1,66	1,99	2,33
б	0	0,673	0,673	1,01	1,34	1,68	2,01	2,35
в	-0,016	0,427	0,870	1,31	1,75	2,19	2,63	3,07

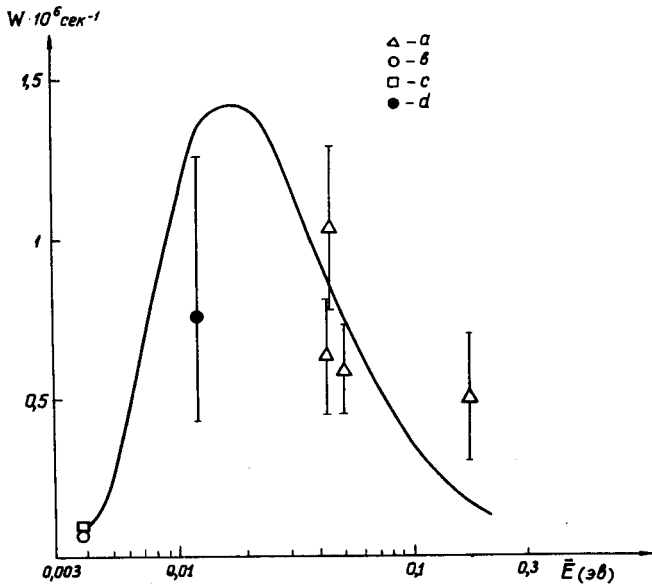


Рис. 1. Зависимость образования иона $(d d \mu)^+$ от средней кинетической энергии атома $d \mu$. а - по работе Желепова и др. /1/; б - по работе Фетковича и др. /4/; в - по работе Доуда /5/; д - по работе Альвареса и др. /15/. Кривая - зависимость по данной работе.