

С 341 а

*Nucl. Phys, 1968, 5/6-672.  
v A 107, n 1, p. 92-98.*

Н-175  
ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р4 - 3204



Э. Наджаков , И.Н. Михайлов

ОПИСАНИЕ ВРАЩЕНИЯ ЯДЕР  
МЕТОДОМ КОЛЛЕКТИВНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1967.

4958/1, 28.

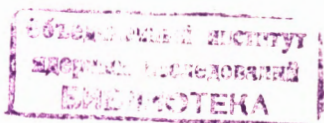
Э. Наджаков\*, И.Н. Михайлов

ОПИСАНИЕ ВРАЩЕНИЯ ЯДЕР  
МЕТОДОМ КОЛЛЕКТИВНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Направлено в "Nucl. Phys."

---

<sup>x/</sup> Институт физики, Академия наук БНР, София.



## 1. Введение

В 1956–1958 г.г. Липкин, Де-Шалит, Талми а также О. Бор и Моттельсон показали, что формулу Инглиса для момента инерции  $J$  можно получить, не делая предположений кренкинг-модели. Это достигается следующим образом.

Рассмотрим для простоты двумерную модель и определим угловую переменную  $\theta$ , канонически сопряженную моменту количества движения  $I$ , т.е. такую переменную, что

$$[I, \theta] = I\theta - \theta I = 1 \quad (1)$$

(множитель  $\hbar/i$  включен в определение переменной  $\theta$ ). Предположим, что гамильтониан системы можно приближенно разбить на две части:

$$H = H_1 + I^2/2J \quad (2)$$

где  $H_1$  зависит от внутренних переменных, коммутирующих с величинами  $\theta$  и  $I$ . Рассмотрим, далее, видоизмененный гамильтониан

$$H' = H_1 + I^2/2J + V(\theta), \quad (3)$$

последний член которого не коммутирует с  $I$ . Собственные состояния  $H'$  соответствуют некоторой ориентации системы в пространстве. Если  $|k\rangle$  и  $E_k$  обозначают собственные состояния  $H'$  и их энергии, то

$$\theta_{k_0} = \langle k | \theta | 0 \rangle = \frac{i}{J} \frac{I_{k_0}}{E_k - E_0}, \quad (4)$$

Подставляя (4) в формулу (1), получаем формулу Инглиса

$$J = 2 \sum_{k \neq 0} \frac{I_{ok} I_{ko}}{E_k - E_0} . \quad (5)$$

Приближение, связанное с таким выводом формулы (5) и заключающееся в том, что вектор  $\theta |k\rangle$  определен в пространстве более широком, чем совокупность векторов  $|k\rangle$ , изучалось в работе<sup>/1/</sup>.

В формуле (5) собственные векторы и энергии оператора не совпадают, вообще говоря, с аналогичными величинами, описывающими движение независимых квазичастиц в деформированной потенциальной яме, которые обычно и используются в формуле Инглиса. Однако описанный вывод формулы Инглиса обладает преимуществом по сравнению с обычным, поскольку он не использует классической интерпретации вращения ядер. Другой современный подход, имеющий то же преимущество, дан Вилларсом<sup>/3/</sup>. Этот метод дает общее формальное обоснование известным формулам для момента инерции, но практически не дает возможности получать новые результаты.

Цель данной работы заключается в обобщении описанного выше подхода для описания зависимости энергии состояний от момента количества движения  $I$  в широком интервале значений величины  $I$ . Хорошо известно, что в настоящее время накоплено много экспериментальных данных о такой зависимости<sup>/4/</sup> и были предприняты попытки дать теоретическое обоснование этой зависимости в терминах центробежного растяжения ядер<sup>/4/</sup> и уменьшения спаривания в результате действия сил Кориолиса<sup>/5/</sup>. Однако в этих работах принимались предположения кренкинг-модели или использовался вариационный подход, в котором минимум энергии отыскивался в состоянии с заданным средним значением  $I$  (так что последняя величина не являлась собственным числом оператора момента количества движения). Интерпретация явления в рамках определенной динамической модели также обладает некоторыми недостатками, поскольку результаты, полученные таким путем, не являются достаточно общими. Все эти трудности оказывается возможным преодолеть при помощи метода коллективной переменной.

## 2. Коллективная переменная и основное уравнение

Наиболее слабым местом в приведенных выше рассуждениях является выделение вращательного движения в гамильтониане. Может случиться, что теория,

основанная на предположении о выделении, оказывается достаточно точной для описания предельного (при малых значениях момента количества движения) значения момента инерции ядер и оказывается несостоятельной при больших значениях  $I$ . В данной работе особое внимание уделено тому, чтобы не использовать предположение о сепарируемости гамильтониана. С этой целью рассмотрение ограничивается только одной ротационной полосой ядра, построенной на основном состоянии, все другие ротационные полосы оставлены без внимания.

Пусть рассматриваемое ядро имеет ротационную полосу, энергии состояний которой описываются формулой

$$E = E_0 + f(\sqrt{I(I+1)}) . \quad (6)$$

Функция  $f(x)$  в формуле (6) описывает в общем случае зависимость энергии от момента количества движения. Предполагается, что эта функция может быть разложена в ряд:

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} x^{2\nu} , \quad (7)$$

обладающий достаточно быстрой сходимостью в точке  $x = 0$ . Определим оператор  $H_1$  при помощи уравнения

$$H = H_1 + f(I) , \quad (8)$$

в котором  $f(I)$  является такой же функцией от оператора  $I$ , как и числовая функция  $f(x)$  в формулах (6), (7). Отметим, что формула (8) представляет собой определение оператора  $H_1$  и не содержит предположения о сепарируемости гамильтониана (предположения, выраженного формулой (2)). Из формул (6), (8) следует, что так определенный оператор  $H_1$  вырожден: он имеет собственное значение  $E_0$ , общее для всех уровней основной ротационной полосы, в то время как различные состояния других ротационных полос принадлежат, вообще говоря, разным собственным значениям  $H_1$ .

Коллективная угловая переменная  $\theta$ , канонически сопряженная  $I$  (т.е. удовлетворяющая уравнению (1)), может быть определена так, чтобы

$$[H_1, \theta]_{o_k} = [H_1, \theta]_{k_o} = 0 . \quad (9)$$

В формуле (9)  $|0\rangle$  представляет собой некоторую фиксированную комбинацию состояний основной ротационной полосы, состояние  $|k\rangle$  произвольное. Для того, чтобы уравнение (8) имело место, должны быть равны нулю матричные элементы оператора  $\theta$ , связывающие состояния основной ротационной полосы с состояниями, не принадлежащими ей. Если оператор  $\theta$  таков, уравнение (9) следует из вырождения  $H_1$ . По аналогии с формулой (3) в определении гамильтониана удобно включить член  $V(\theta)$ , смешивающий состояния первой ротационной полосы. В последующем символы  $|k\rangle$  и  $E_k$  обозначают собственные состояния и энергии гамильтониана.

$$H' = H + V(\theta) = H_1 + f(I) + V(\theta), \quad (10)$$

причем  $|0\rangle$  относится к основному состоянию этого оператора. Предполагается, что потенциал  $V(\theta)$  центрирован около точки  $\theta = 0$ . Это устраняет трудность<sup>1/</sup>, связанную с тем, что действие оператора  $\theta$  на вектор  $|0\rangle$  выводит его из пространства, образованного векторами  $|k\rangle$ .

Из уравнений (9), (10) следует, что

$$\theta_{k0} = \frac{f'_{k0}(I)}{E_k - E_0}. \quad (11)$$

Для произвольной функции  $\phi(I)$  на основании уравнения (1) справедливо соотношение

$$[\phi(I), \theta] = \phi'(I). \quad (12)$$

Используя уравнения (11) и (12), получаем

$$\sum_{k \neq 0} \frac{\phi_{0k}(I) f'_{k0}(I) + f'_{0k}(I) \phi_{k0}(I)}{E_k - E_0} = \phi'_{00}(I). \quad (13)$$

Вводя оператор

$$a = \sum_{k \neq 0} \frac{|k\rangle \langle k|}{E_k - E_0},$$

уравнение (13) можно привести к виду

$$\langle 0 | \phi(1) a f'(1) + f'(1) a \phi(1) - \phi'(1) | 0 \rangle = 0, \quad (15)$$

которое должно выполняться для любой функции  $\phi(1)$ . Если состояния  $|k\rangle$  и энергии  $E_k$  известны (т.е. если известен оператор  $a$ ), уравнение (15) однозначно определяет функцию  $f(1)$ . Если последняя функция содержит лишь ограниченное число неизвестных параметров, формулу (15) можно использовать так, чтобы получить столько уравнений, сколько нужно для их определения. Так, если  $f(1) = I^2/2J$ , формула (15) с функцией  $\phi(1) = 1$  приводит как раз к формуле Инглиса (5) для момента инерции  $J$ .

### 3. Зависимость энергии от момента количества движения

Для того, чтобы увидеть, как следует использовать формулу (15), воспользуемся степенным рядом (7). Введем определение

$$\beta_{pq} = \sum_{k \neq 0} \frac{I_{ok}^p I_{ko}^q + I_{ok}^q I_{ko}^p}{E_k - E_0}, \quad (16)$$

$$\gamma_p = I_{00}^p.$$

Подставляя в формулу (13)

$$\phi(1) = I^{2\nu-1}, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots, \quad (17)$$

получим

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} 2\mu \beta_{2\nu-1, 2\mu-1} a_{\mu} = (2\nu-1) \gamma_{2\nu-2}. \quad (18)$$

Таким образом, коэффициенты  $a_{\mu}$  и, следовательно, сама функция  $f(1)$  могут быть определены из системы линейных уравнений (18). Уравнения (16) показывают, что  $a_{\mu}$  выражаются через матричные элементы от степеней оператора момента количества движения  $I$ . Величина  $\beta_{11}$  совпадает с выражением для момента инерции в формуле Инглиса. Опять, если предположить

$a_1 = \frac{1}{2I}$ ,  $a_2 = a_3 = \dots = 0$ , первое из уравнений (18) сводится к уравнению (5). Однако система (18) включает и другие уравнения, которые не могут быть, вообще говоря, удовлетворены таким простым выбором функции  $f(I)$  и определяют отклонения спектра энергий от простой формулы жесткого ротатора.

Как известно, было предложено несколько аналитических выражений для функции  $f(I)$ , содержащих свободные параметры, выбор которых может быть сделан так, чтобы описать экспериментально наблюдаемые энергетические спектры. Такими являются, например, формула Харриса<sup>/8/</sup> или формула в работе<sup>/7/</sup>, обе с двумя параметрами. Эти параметры также можно определить теоретически при помощи уравнений (15) или (18).

#### 4. Некоторые численные оценки

Из написанного выше видно, что задача описания ротационной полосы, преобразуется в проблему отыскания решений уравнения Шредингера с гамильтонианом  $H'$  из уравнения (10). Главное приближение появляется, когда в качестве волновых функций и энергий в эту формулу подставляют функции и энергии какой-либо ядерной модели (например, модели деформированного ядра), отличающиеся от собственных функций и энергий оператора  $H'$  (см. ссылку<sup>/1/</sup>). Конечно, использование теории, в которой рассмотрены лишь двумерные вращения, тоже требует обобщения. Тем не менее свобода в выборе потенциала в формуле (10) дает основания надеяться, что на таком пути можно получить хотя бы приближенно верное описание ротационных полос.

Поправка к моменту инерции, следующая из первого уравнения системы (18), обычно уменьшает его величину. Благодаря этому, расхождение между полученными теоретически (с учетом парных корреляций) и экспериментально значениями этой величины имеет тенденцию увеличиваться. Эта ситуация может тоже оказаться следствием использования неправильных функций и энергий.

Рассмотрим второй коэффициент  $a_2$  в уравнении (7). Полагая  $a_3 = a_4 = \dots = 0$  и используя два первых уравнения (18), можно найти

$$-a_2 = \frac{1}{4} \frac{\beta_{13} - 3\gamma_2 \beta_{11}}{\beta_{33} \beta_{11} - \beta_{13}^2} \quad (19)$$



Интересно сравнить это выражение с соответствующей формулой кренкинг-модели

$$-a_2 = \frac{1}{J^4} \left[ \sum_{l, j, k \neq 0} \frac{I_{0l} I_{lj} I_{jk} I_{ko}}{(E_l - E_0)(E_j - E_0)(E_k - E_0)} - \sum_{l, j \neq 0} \frac{|I_{0l} \tilde{I}_{0j}^2|^2}{(E_l - E_0)^2 (E_j - E_0)} \right]. \quad (20)$$

Несмотря на некоторое сходство между формулами (19) и (20), эти два выражения различаются как формально, так и численно.

Чтобы определить различия, можно использовать волновые функции  $|k\rangle$  независимых частиц, движущихся в поле деформированного осцилляторного потенциала. В этом случае уравнение (19) приводит к оценке  $a_2$ , отличающейся в два раза от того, что следует из уравнения (20). Тот же расчет показывает последовательность процедуры, в которой принимаются во внимание лишь несколько первых уравнений системы (17). Легко убедиться, что учет большего числа коэффициентов  $a_\mu$  и большего числа уравнений (18) приводит лишь к небольшому изменению в величинах коэффициентов, определенных из меньшего числа уравнений (например, учет  $a_2$  приводит лишь к небольшому изменению

$J$ ). Если функции  $|k\rangle$  описывают некоррелированное движение частиц в деформированной потенциальной яме, то  $\beta_{13} \approx 3\gamma_2 \beta_{11}$ . Запишем:

$$\beta_{13} = 3\gamma_2 \beta_{11}(1 + \delta), \quad (21)$$

где  $\delta$  — небольшая величина, отрицательная в описываемой модели. Формула (21) приводит к неверной оценке даже знака коэффициента  $a_2$ . Это обстоятельство не является удивительным, поскольку такие состояния не могут описать ни центробежного растяжения, ни противодействия вращения спариванию, т.е. тех эффектов, которые ответственны за величину и знак  $a_2$ .

Интересно проследить, как указанные выше эффекты отражаются в предлагаемом подходе. Рассматривая, например, парные корреляции, можно провести аналогию между зависимостью парных эффектов от угловой скорости вращения (так называемый эффект кориолисовского антиспаривания) и блокинг-эффектом в двухквазичастичных состояниях. Благодаря блокинг-эффекту, дисперсия  $\langle k | I^2 | k \rangle$  в возбужденных состояниях оказывается больше, чем в основном состоянии. Поэтому учет блокинг-эффекта увеличивает величину  $\beta_{13}$  и вносит положительную добавку в величину  $\delta$ .

Рассмотрим двухпараметрическую формулу<sup>/7/</sup>, описывающую весьма точно уровни ротационной полосы в широком интервале значений  $I$ :

$$E - E_0 = \frac{J}{c} (\sqrt{1 + (c/J^2)I(I+1)} - 1). \quad (22)$$

Экспериментальные данные<sup>/4,7/</sup> приводят к значениям  $c \approx 5 \text{ Мэв}^{-2}$ . Сравнивая (22) и (7), находим  $c/8J^2 \approx -a_2$ . Используя уравнения (19), (21) и аналогичную оценку для  $\beta_{33}$ , получаем

$$c \approx \frac{3\delta}{(1+\delta)^2} \cdot \frac{J^2}{\langle 0 | I^2 | 0 \rangle}. \quad (23)$$

В формуле (23)  $\langle 0 | I^2 | 0 \rangle \approx 100$ ,  $J \approx \text{Мэв}^{-1}$ . Таким образом, даже небольшое значение  $\delta$  ( $\delta = \frac{1}{3}$ ) достаточно для объяснения нужной величины коэффициентов  $c$  и  $a_2$ .

Кроме уже упоминавшихся выше вопросов (более внимательного рассмотрения оператора  $H'$ , определенного формулой (10), и обобщения метода на случай трехмерных вращений), интересно определить возможность использования описанной схемы для изучения других видов коллективного движения.

Один из авторов (Э.Н.) выражает признательность проф. Б.Р. Моттelsonу за стимулирующие дискуссии. Авторы благодарят также членов отдела низких энергий Лаборатории теоретической физики за их интерес к данной работе.

### Л и т е р а т у р а

1. H. J. Lipkin, A. de-Shalit and I. Talmi. Phys. Rev., 103, 1773 (1956).
2. A. Bohr, B. R. Mottelson. Kong. Norske Vid. Selsk. Forsh., 31, Nr. 12, 91 (1958).
3. F. M. H. Villars. Nucl. Phys., 74, 353 (1965).
4. F. S. Stephens, N. L. Lark, R. M. Diamond. Nucl. Phys., 63 82 (1965).
5. T. Udagava, R. K. Sheline. Phys. Lett., 15 172 (1965).
6. S. M. Harris. Phys. Rev. Lett., 13, 663 (1964); Phys. Rev., 138 B, 509 (1965).
7. И. Н. Михайлов, Э. Наджаков, Р. Х. Сафаров. Препринт ОИЯИ, Р-2866, Дубна, 1966. Ядерная физика (в печати).

Рукопись поступила в издательский отдел  
7 марта 1967 г.