

С 341а
Б-867

311.1967

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р4 - 3124



ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

П. Бошан, А. Павликовски, В. Рыбарска

ИЗУЧЕНИЕ ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ
СВЕРХТЕКУЧЕЙ МОДЕЛИ ЯДРА

1967.

P4 - 3124

П. Бошан, А. Павликовски, В. Рыбарска

ИЗУЧЕНИЕ ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ
СВЕРХТЕКУЧЕЙ МОДЕЛИ ЯДРА

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

4878/1 чр.

В в е д е н и е

Настоящая работа является обобщением работы /1/ на случай системы, в которой к остаточному парному взаимодействию между пуклонами добавлен член мультиполь-мультипольного типа. Полный гамильтониан имеет вид:

$$H = \sum_{s=1}^{\Omega} E_s a_{s\sigma}^+ a_{s\sigma} - G \sum_{s,s=1}^{\Omega} a_{s+}^+ a_{s-}^+ a_{s-} a_{s+} - \frac{\kappa}{\Omega} \sum_{s,s,r,r=1}^{\Omega} f_{ss'} f_{rr'} a_{s\sigma}^+ a_{s\sigma'}^+ a_{r\rho} a_{r\rho'} \quad (1)$$

где E_s , G , κ , $f_{ss'}$ - заданные характеристики системы, Ω - определенное число дважды вырожденных одночастичных уровней. Реальные системы, описанные таким гамильтонианом, рассматривались в работах /2-5/, посвященных исследованию перротационных состояний деформированных ядер. Целью нашей работы является, с одной стороны, проследить на простой модели влияние мультиполь-мультипольного члена, решая точно задачу на собственные значения энергии системы, с другой стороны - проверить на этой модели точность приближенных методов, которые применялись в работах /2-5/.

§ 1. Точное решение задачи

Задачу на собственные значения для системы, состоящей из N частиц, описанной гамильтонианом (1), решаем в представлении, в котором базисные векторы - это состояния N независимых частиц типа

$$a_{p_1}^+ \pi_1 \dots a_{p_N}^+ \pi_N |0\rangle, \quad (2)$$

где $|0\rangle$ – вакуум свободных частиц, $p_1 \dots p_N$ – набор квантовых чисел из множества Ω , а $\pi_1 \dots \pi_N$ принимают значения $(+, -)$, связанные с ориентацией проекции спина. Собственная задача

$$H |E\rangle = E |E\rangle \quad (3)$$

в этом представлении принимает вид

$$\begin{aligned} \sum_{p'_1 \dots p'_N \pi'_1 \dots \pi'_N} \langle p_1 \pi_1 \dots p_N \pi_N | H | p'_1 \pi'_1 \dots p'_N \pi'_N \rangle \langle p'_1 \pi'_1 \dots p'_N \pi'_N | E \rangle = \\ = E \langle p_1 \pi_1 \dots p_N \pi_N | E \rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

В общем случае имеется $\binom{2\Omega}{N}$ базисных векторов типа (2) и задача сводится к нахождению собственных значений и собственных векторов матрицы этого порядка. Напоминаем, что в случае $\kappa = 0$ существует набор хороших квантовых чисел $\nu_s = n_{s+} - n_{s-}$, по которым можно пространство базисных векторов разбить на независимые подпространства, что значительно упрощает задачу диагонализации гамильтониана. Присутствие мультиполь-мультипольного члена нарушает эту симметрию. Число сеньорити $\nu = \sum_s \nu_s^2$ тоже не сохраняется. В результате предположения о независимости $f_{ss'}$ от спинов сохраняется величина

$$N_+ = \sum_{r=1}^{\Omega} n_{r+} = \sum_{r=1}^{\Omega} a_{r+}^+ a_{r+},$$

$$[H, N_+] = 0.$$

Таким образом, будем иметь дело с подпространствами с заданными собственными значениями N_+ . В решаемой нами задаче $N = 6$, $\Omega = 5$ имеем $\binom{2\Omega}{N} = 210$ базисных векторов. Разбиение на подпространства с заданным N_+ происходит по следующей схеме.

\mathcal{N}_+	1	2	3	4	5
Размерность подпространства	5	50	100	50	5

Для вычисления матричных элементов гамильтониана удобно преобразовать его к виду:

$$H = C + H^0 + H^2 + H^4, \quad (5)$$

где $C = \sum_{s=1}^{10} F_s - G\Omega - \frac{\kappa}{2} (S_p F)^2, \quad F_{SS'} = f_{ss} \otimes \delta_{SS'}$,

$$\frac{S}{F_s} \left| \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 \end{array} \right|,$$

$$H^0 = \sum_{S=1}^{10} A_S a_S a_S - \frac{\kappa}{2} \sum_{S,R=1}^{10} B_{SR} a_S a_R a_R a_S - G \sum_{S=1}^{10} a_{S+1} a_S a_S a_{S+1},$$

$$A_S = -E_S + G + \kappa \left[(S_p F) F_{SS} - \frac{1}{2} \mathcal{G}_{SS} \right],$$

$$\mathcal{G}_{SS'} = (F^2)_{SS'},$$

$$\sum_S' = \sum_S \text{ нечет},$$

$$B_{SR} = F_{SS} F_{RR} - F_{SR} F_{RS},$$

$$H^2 = \kappa \sum_{\substack{S,R=1 \\ S \neq R}}^{10} C_{SR} a_S a_R^+ - \kappa \sum_{\substack{S,S',R=1 \\ S \neq S', S \neq R}}^{10} D_{SS'}^R a_S' a_R a_R^+ a_S^+,$$

$$C_{SR} = (S_p F) F_{SR} - \frac{1}{2} \mathcal{G}_{SR},$$

$$D_{SS'}^R = F_{SS'} F_{RR} - F_{SR} F_{RS'},$$

$$H^4 = -G \sum_{S,R=1}^{10} a_{S+1} a_S a_R^+ a_{R+1}^+ + \frac{\kappa}{2} \sum_{\substack{S,S',R,R'=1 \\ S \neq S', R \neq R'}}^{10} F_{SS'} F_{RR'} a_S' a_R a_R^+ a_S^+,$$

$$\sum_{S,R=1}^{10} S - \text{нечет}$$

$$\sum_{S,R=1}^{10} R - \text{нечет}$$

При таком представлении гамильтониана элементы на диагонали зависят только от C и \bar{H} . Внедиагональные элементы зависят от \bar{H} или от \bar{H} или равны нулю. Как видно выше, мы выбрали эквидистантный одночастичный спектр: $\Delta E = 1$. Принимаем $C = 1$. Так как в реальных ядрах не все переходы осуществляются (имеем дело с правилами запрета), в нашей модели допускаем, для простоты, только переходы с возбужденных состояний на основное. Переходы между возбужденными состояниями запрещены. Будем исследовать случаи I - VI со следующими значениями f :

	f_{11}	f_{22}	f_{33}	f_{44}	f_{55}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
I	0,6	I,I	-0,3	I,4	-0,5	0,7	-0,3	-0,5	0,4
II	0,4	-I,I	I,5	2,4	-0,7	I,I	0,7	-0,9	-0,5
III	0,4	I,0	I,5	2,4	0,7	I,I	0,7	0,9	0,5
IV	0,4	-I,0	I,5	2,4	-0,7	0	0	0	0
V	0	0	0	0	0	I,I	0,7	-0,9	-0,5
VI	0	0	0	0	0	I,I	0,7	0,9	0,5

Параметр κ принимает значения 0,01; 0,1; 0,3.

§ 2. Приближенные формулы

В ряде работ, например в /6/, коллективные возбужденные состояния рассматриваются в приближении, в котором волновая функция основного состояния четного ядра является бесквазичастичной. Этот метод получил название приближения Тамма-Данкова. В приближении Тамма-Данкова возбуждения системы вычисляются на основании формулы

$$1 = \kappa \sum_{s,s'=1}^{\Omega} \frac{f_{ss'} u_{ss'}^2}{\epsilon_s + \epsilon_{s'} - \omega_1} \quad (6)$$

где $u_{ss'} = u_s v_{s'} + u_{s'} v_s$, u_s, v_s — параметры $u-v$ — преобразования Боголюбова, $\epsilon_s = \sqrt{(E_s + \lambda)^2 + C^2}$, E_s — одночастичные энергии, λ, C — решения уравнений

$$N = \sum_{s=1}^{\Omega} \left(1 - \frac{E_s - \lambda}{\sqrt{(E_s - \lambda)^2 + C^2}} \right), \quad \frac{2}{G} = \sum_{s=1}^{\Omega} \frac{1}{\sqrt{(E_s - \lambda)^2 + C^2}} \quad (7)$$

В.Г. Соловьевым был сформулирован вариационный принцип, из которого выведено секулярное уравнение, определяющее возбуждения системы в следующем виде:

$$1 = 2\kappa \sum_{s,s'=1}^{\Omega} \frac{f_{ss'}^2 u_{ss'}^2}{\epsilon_s + \epsilon_{s'} - \frac{\omega_1^2}{\epsilon_s + \epsilon_{s'}}}$$

Если наряду с недиагональными членами $f_{ss'}$ присутствуют также диагональные члены, следуя работе /7/, можно исключить духовое состояние и получить более точное секулярное уравнение:

$$\begin{vmatrix} \kappa X^1 - \frac{1}{2} & V^1 & W^1 \\ \kappa V^1 & \Sigma_1 & \Sigma_2 \\ \kappa W^1 & \Sigma_2 & \Sigma_3 \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$X^1 = \sum_{s,s'=1}^{\Omega} \frac{f_{ss'}^2 u_{ss'}^2}{\epsilon_s + \epsilon_{s'} - \frac{\omega_1^2}{\epsilon_s + \epsilon_{s'}}}$$

$$V^1 = \sum_{s=1}^{\Omega} \frac{f_{ss} C}{\epsilon_s (4\epsilon_s^2 - \omega_1^2)}$$

$$W^1 = \sum_{s=1}^{\Omega} \frac{2C f_{ss} (E_s - \lambda)}{\epsilon_s (4\epsilon_s^2 - \omega_1^2)}$$

$$\Sigma_1 = \sum_{s=1}^{\Omega} \frac{1}{2 \epsilon_s (4 \epsilon_s^2 - \omega_1^2)}$$

$$\Sigma_2 = \sum_{s=1}^{\Omega} \frac{u_s^2 - v_s^2}{4 \epsilon_s^2 - \omega_1^2}$$

$$\Sigma_3 = \sum_{s=1}^{\Omega} \frac{\omega_1^2 - LC^2}{2 \epsilon_s (4 \epsilon_s^2 - \omega_1^2)}$$

(ϵ_s , u_s , v_s , u_{ss} определены выше).

§ 3. Результаты расчетов

З а в и с и м о с т ь о т κ . В табл. 1 для случая I представлены в возрастающем порядке значения энергии системы для нескольких значений κ .

Для $\kappa = 0$ в скобках отмечено сеньорити ν . Напоминаем, что уровни $\nu = 0$ однократно, $\nu = 2$ четырехкратно вырождены. Для $\kappa = 0,01$ сохраняется последовательность уровней и кратность вырождения (с точностью до трех знаков после запятой), при увеличении κ вырождение постепенно снимается. Для любого κ остается вырождение, связанное с идентичностью двух матриц 50-го порядка $N_+ = 2$ и $N_+ = 4$. (Аналогично для вышележащих уровней остается вырождение, связанное с идентичностью двух матриц $N_+ = 1$ и $N_+ = 5$).

Интересно отметить, что для $\kappa = 0,01$ только 10 компонент (из 100) вектора основного состояния больше 10^{-3} . Увеличение κ приводит для основного, как и для возбужденных состояний, к значительному размытию по другим компонентам, что явно указывает на перемешивание состояний с разными сеньорити.

В табл. 2 показана зависимость энергетических уровней системы от конкретных значений f_{ss} . Видно также влияние диагональных и недиагональных элементов. В случае а) $\kappa = 0,1$ (табл. 2а). В случае б) $\kappa = 0,3$ (табл. 2б). Из сравнения случаев V и VI видно, что при малых значениях недиагональных элементов f_{ss} результаты не зависят от их знаков. Сравнительно сильный спад энергетических уровней получается в присутствии диагональных элементов.

Для проверки точности разных приближенных методов сравним низколежащие возбуждения системы, вычисленные точно и приближенным методом. Из таблиц 3а и 3б видно, что, так как методы а) и б) (метод Тамма-Данкова и решение секулярного уравнения) не зависят от знаков f_{ss} , случаи II и III отличаются только при точных вычислениях и для приближенного метода в) (решение секулярного уравнения за исключением ложных состояний). Влияние диагональных членов намного больше.

Из приведенных выше данных видно, что включение мультиполь-мультипольного члена дает обычно в точном решении расщепление на мультиплет довольно густо расположенных уровней. Приближенные решения меняются в определенных рамках,

В отсутствие диагональных элементов точность метода в) не хуже 10%. Методы а) и б) не дают низколежащих уровней. В присутствии ненулевых диагональных элементов при небольших κ расхождение между точными и приближенными расчетами не больше 15%. При больших κ основное состояние в точном решении сильно опускается. В таких случаях ошибка может достигать 30%.

Авторы благодарят профессора В.Г. Соловьева за постоянное внимание к работе и ценные дискуссии.

Л и т е р а т у р а

1. А. Павликовски, В. Рыбарска. ЖЭТФ, 43, 543 (1962).
2. В.Г. Соловьев. Препринт ОИЯИ, Р-1811, Дубна, 1964.
3. В.Г. Соловьев. Nucl. Phys., 69, 1 (1965).
4. В.Г. Соловьев, П. Фогель, А.А. Корнейчук. ДАН СССР, 154, 72 (1964).

5. В.Г. Соловьев. Препринт ОИЯИ, Р-1973, Дубна, 1965.
6. S.Yoshida. Phys. Rev., 123, 2122 (1960).
7. Лю Юань, В.Г. Соловьев, А.А. Корнейчук. ЖЭТФ, 47, 352 (1964).

Рукопись поступила в издательский отдел
18 января 1967 г.

ТАБЛИЦА I

Зависимость значения энергии системы от α для случая I. При $\alpha = 0$ в скобках представлено сеньорити, а для $\alpha \neq 0$ кратность вырождения

	$\alpha = 0$		$\alpha = 0.01$		$\alpha = 0.1$		$\alpha = 0.3$	
1.	6.828	($\nu = 0$)	6.752	(1)	5.960	(1)	3.249	(1)
2.	10.678	($\nu = 2$)	10.576	(4)	9.494	(1)	7.086	(1)
3.	10.763	($\nu = 0$)	10.643	(1)	9.622	(3)	7.133	(1)
4.	11.536	($\nu = 2$)	11.493	(4)	9.623	(1)	7.144	(2)
5.	11.589	($\nu = 2$)	11.536	(4)	10.983	(1)	7.145	(1)
6.	12.222	($\nu = 2$)	12.141	(4)	10.992	(2)	8.293	(1)
7.	12.326	($\nu = 2$)	12.283	(4)	10.993	(1)	8.302	(2)
8.	12.385	($\nu = 2$)	12.294	(4)	11.083	(3)	8.330	(1)

ТАБЛИЦА 2

Зависимость энергетических уровней системы от конкретных значений λ
 Влияние диагональных и недиагональных элементов

	I	II	III	IV	V	VI
а) $\lambda=0.1$						
1.	5.960	5.463	3.564	5.919	6.614	6.614
2.	9.494	9.117	7.430	9.735	10.562	10.562
3.	9.622	9.818	7.679	10.314	10.565	10.565
4.	9.623	9.848	7.687	10.318	10.640	10.640
5.	10.983	9.849	7.697	10.547	11.364	11.364
6.	10.992	10.066	7.906	10.740	11.365	11.365
7.	10.993	10.067	8.026	11.285	11.443	11.443
8.	11.083	10.076	8.029	11.294	11.448	11.448
9.	11.084	10.345	8.698	11.300	11.449	11.449
10.	11.200	10.431	8.699	11.547	12.037	11.037
11.	11.202	10.433	8.709	11.798	12.039	12.039
12.	11.203	10.451	8.763	11.982	12.040	12.040
б) $\lambda=0.3$						
1.	3.269	-2.590	-9.173	0.975	6.127	6.127
2.	7.086	4.056	-3.414	6.778	10.273	10.273
3.	7.133	4.132	-3.311	7.009	10.305	10.305
4.	7.144	4.175	-3.255	7.179	10.307	10.307
5.	7.145	5.327	-2.160	7.706	10.356	10.356
6.	8.293	5.376	-2.100	9.102	10.975	10.975
7.	8.302	5.606	-2.044	9.332	10.988	10.987
8.	8.330	5.805	-1.525	9.531	10.989	10.089
9.	9.221	5.959	-1.092	9.684	11.098	11.098
10.	9.241	5.968	-1.040	9.693	11.149	11.149
11.	9.250	6.045	-0.993	9.770	11.152	11.152
12.	9.294	7.363	-0.069	10.011	11.449	11.449

Таблица 3

Сравнение низколежащих возбуждений системы, вычисленных точно и приближенными методами

	а	б	в		а	б	в		а	б	в	
а) $\alpha = 0.1$	I			II				III				
	3.534	4.012	3.998	4.175	3.654	3.308	3.099	4.170	3.866	3.308	3.099	4.165
	3.662	4.382	4.382	4.376	4.355	4.350	4.350	4.330	4.112	4.350	4.350	4.330
	3.663	4.963	4.963	4.439	4.385	4.953	4.950	4.439	4.118	4.953	4.950	4.465
	5.023	5.253	5.250	4.701	4.386	5.264	5.256	4.749	4.133	5.264	5.256	4.725
	5.032	5.471	5.471	4.789	4.603	5.420	5.416	4.917	4.342	5.420	5.416	4.912
	5.033	5.567	5.567	5.300	4.604	5.557	5.556	5.300	4.462	5.557	5.556	5.300
	IV			V				VI				
	3.813	3.464	3.358	4.170	3.948	5.396	5.240	4.195	3.948	5.396	5.240	4.195
	4.395	4.352	4.351	4.330	3.951	5.557	5.553	4.385	3.951	5.557	5.553	4.385
	4.399	4.959	4.958	4.428	4.026	5.844	5.825	4.896	4.026	5.844	5.825	4.896
	4.628	5.303	5.301	4.774	4.750	6.005	5.982	5.240	4.750	6.005	5.982	5.240
	4.821	5.501	5.501	4.917	4.751			5.553	4.751			5.553
	5.366	5.573	5.573	5.034	4.829			5.825	4.829			5.825
б) $\alpha = 0.3$	I			II				III				
	3.837	3.372	3.162	4.174	6.646	0.958	4.346	4.165	5.759	0.958	4.346	4.155
	3.884	4.380	4.380	4.573	6.722	4.347	4.929	4.330	5.861	4.347	4.929	4.316
	3.895	4.935	4.925	4.492	6.765	4.935	5.183	4.440	5.918	4.935	5.183	4.464
	3.896	5.137	5.123	5.120	7.917	5.201	5.396	4.773	7.013	5.201	5.396	4.749
	5.044	5.451	5.451	5.264	7.966	5.400	5.554	4.920	7.073	5.400	5.554	4.912
	5.053	5.564	5.564	5.435	8.196	5.554	5.822	5.084	7.129	5.554	5.822	5.300
	5.803	1.762	4.348	4.165	4.146	4.542	4.427	4.195	4.146	5.442	4.422	4.195
	6.034	4.349	4.948	4.323	4.178	5.550	5.550	4.422	4.178	5.550	5.550	4.422
	6.204	4.950	5.280	4.439	4.180	5.790	5.790	4.642	4.180	5.790	5.790	4.642
	6.731	5.285	5.501	4.774	4.229	5.957	5.957	4.896	4.229	5.957	5.957	4.896
	8.127	5.501	5.573	4.920	4.848			5.550	4.848			5.550
	8.130	5.573	5.868	5.048	4.860			5.790	4.860			5.790