

С 341 а

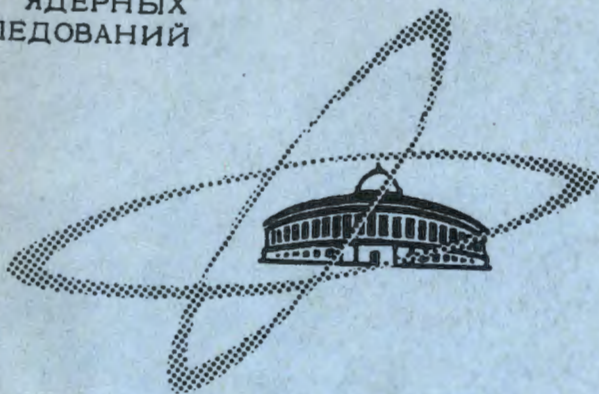
Д-421

3/ХII

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р4 - 2985



ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Р.В. Джолос

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НУКЛОНА НА ИЗОЛИРОВАННОМ
УРОВНЕ С КВАДРУПОЛЬНЫМ ФОНОНОМ

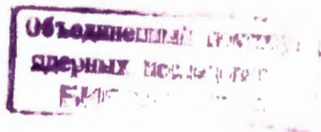
1966

P4 - 2985

Р.В. Джолос

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НУКЛОНА НА ИЗОЛИРОВАННОМ
УРОВНЕ С КВАДРУПОЛЬНЫМ ФОНОНОМ

4613/1 му.



Представление о фононах и нуклон-фононном взаимодействии в ядерную физику было введено в работах^{1,2/} по обобщенной модели ядра. В этих же работах формулировалось приближение сильной связи для учета взаимодействия нуклонов с фононами. Это приближение с успехом использовалось при рассмотрении ядер, получивших название деформированных, но для ядер переходной области его оказалось недостаточно. Однако других методов не было. Интерес к задаче возродился после появления работ^{3,4/}, в которых наметились новые пути решения проблемы, отнюдь не связанные с обычной теорией возмущений.

В настоящей работе также предпринята попытка учитывать нуклон-фононное взаимодействие, не опираясь на теорию возмущений. В ней рассматривается модельная задача, в которой изолированный нуклонный уровень связан с квадрупольным фононом. Связь эта описывается гамильтонианом:

$$H = H_0 + H_1$$

$$H_0 = \hbar\omega \sum_{\mu} b_{2\mu}^+ b_{2\mu} + E_j \sum_m a_{jm}^+ a_{jm}$$

$$H_1 = \gamma (x + x^+)$$

$$x^+ = \sum_{m, \mu} C_{jm-\mu}^{jm} a_{jm-\mu}^+ b_{2\mu}^+ a_{jm}$$

Здесь $b_{2\mu}^+$, $b_{2\mu}$ - операторы рождения и уничтожения квадрупольного фонона, a_{jm}^+ , a_{jm} - нуклона.

В дальнейшем считаем, что $E_j = 0$, $\hbar\omega = 1$ и для краткости вместо $b_{2\mu}^+$, $b_{2\mu}$, a_{jm}^+ , a_{jm} пишем b_{μ}^+ , b_{μ} , a_m^+ , a_m .

Ограничимся однофермионными состояниями. Тогда с помощью операторов a_m^+ , b_μ^+ можно построить векторы:

$$a_m^+ \equiv |0; j\rangle$$

$$\sum C_{j_1 m - \mu_1}^{j_1 m} a_m^+ b_{\mu_1}^+ \equiv |1; j_1\rangle \equiv [a^+ b^+]_{j_1}$$

$$\sum C_{j_1 m - \mu_1}^{j_1 m} \dots C_{j_n m - \mu_n}^{j_n m} \dots C_{j_1 m - \mu_1}^{j_1 m - \mu_n - \dots - \mu_2} \times \\ \times a_m^+ b_{\mu_1}^+ \dots b_{\mu_n}^+ \equiv [\dots [a^+ b^+]_{j_1} \dots b^+]_{j_n} \equiv |n; j_1 \dots j_n\rangle.$$

Здесь естественным образом возникли коэффициенты

$$C_{\mu_1 \dots \mu_n}^{j_1 \dots j_n} \equiv C_{j_1 m - \mu_1}^{j_1 m} \dots C_{j_n m - \mu_n}^{j_n m} \dots C_{j_1 m - \mu_1}^{j_1 m - \mu_n - \dots - \mu_2}$$

Введем также симметризованные коэффициенты:

$$\bar{C}_{\mu_1 \dots \mu_n}^{j_1 \dots j_n} \equiv \frac{1}{n!} \sum_{p(\mu_k)} C_{\mu_1 \dots \mu_n}^{j_1 \dots j_n},$$

где суммирование произведено по всем перестановкам индексов μ_k . Тогда

$$|n; j_1 \dots j_n\rangle = \sum_{\mu_1 \dots \mu_n} C_{\mu_1 \dots \mu_n}^{j_1 \dots j_n} a_m^+ b_{\mu_1}^+ \dots b_{\mu_n}^+ \quad (1.1)$$

или

$$|n; j_1 \dots j_n\rangle = \sum_{\mu_1 \dots \mu_n} \bar{C}_{\mu_1 \dots \mu_n}^{j_1 \dots j_n} a_m^+ b_{\mu_1}^+ \dots b_{\mu_n}^+ \quad (1.2)$$

Получим ряд соотношений для этих векторов. Для этого воспользуемся свойствами ортогональности коэффициентов Клебша-Гордана^{/5/}, из которых следует:

$$\sum_{\mu_1 \dots \mu_n} C_{\mu_1 \dots \mu_n}^{j_1 \dots j_n} C_{\mu_1' \dots \mu_n'}^{j_1' \dots j_n'} = \delta_{j_1 j_1'} \dots \delta_{j_n j_n'} \quad (1.3)$$

$$\sum_{j_1 \dots j_n} C_{\mu_1 \dots \mu_n}^{j_1 \dots j_n} C_{\mu_1' \dots \mu_n'}^{j_1' \dots j_n'} = \delta_{\mu_1 \mu_1'} \dots \delta_{\mu_n \mu_n'} \quad (1.4)$$

С помощью (1.1) и (1.3) получаем:

$$a_{m-\mu_n}^+ \dots - \mu_1 b_{\mu_1}^+ \dots b_{\mu_n}^+ = \sum_{j_1 \dots j_n} C_{\mu_1 \dots \mu_n}^{j_1 \dots j_n} |n; j_1 \dots j_n\rangle \quad (1.5)$$

или, благодаря симметрии левой части равенства (1.5) относительно перестановок индексов μ_k :

$$a_{m-\mu_n}^+ \dots - \mu_1 b_{\mu_1}^+ \dots b_{\mu_n}^+ = \sum_{j_1 \dots j_n} C_{\mu_1 \dots \mu_n}^{j_1 \dots j_n} |n; j_1 \dots j_n\rangle. \quad (1.6)$$

Подставим (1.6) в (1.2)

$$|n; j_1 \dots j_n\rangle = \sum_{\mu_1 \dots \mu_n} C_{\mu_1 \dots \mu_n}^{j_1 \dots j_n} |n; j'_1 \dots j'_n\rangle \quad (1.7)$$

и введем обозначение

$$\sum_{\mu_1 \dots \mu_n} C_{\mu_1 \dots \mu_n}^{j_1 \dots j_n} C_{\mu_1 \dots \mu_n}^{j'_1 \dots j'_n} = W_{j'_1 \dots j'_n}^{j_1 \dots j_n} = W_{j_1 \dots j_n}^{j'_1 \dots j'_n}. \quad (1.8)$$

Ввиду сохранения момента

$$W_{j'_1 \dots j'_n}^{j_1 \dots j_n} \approx \delta_{j_n j'_n}. \quad (1.9)$$

Подставив (1.8) в (1.7) и учтя (1.9), получим

$$|n; j_1 \dots j_{n-1} J\rangle = \sum_{j'_1 \dots j'_{n-1}} W_{j'_1 \dots j'_{n-1}}^{j_1 \dots j_{n-1} J} |n; j'_1 \dots j'_{n-1}\rangle. \quad (1.10)$$

Из этого равенства следует, что число линейно независимых векторов с заданными n и J равно числу линейно независимых строк матрицы $W_{j'_1 \dots j'_{n-1}}^{j_1 \dots j_{n-1} J}$ (если строки и столбцы в ней нумеровать наборами индексов $j_1 \dots j_{n-1}$), что далеко не совпадает с полным числом векторов этого типа.

Полезно также вычислить скалярное произведение:

$$\langle J j'_{n-1} \dots j'_1 ; n | n; j_1 \dots j_{n-1} J \rangle = n! W_{j'_1 \dots j'_{n-1}}^{j_1 \dots j_{n-1} J}. \quad (1.11)$$

Тогда с помощью (1.10) и (1.11) получаем:

$$W_{j'_1 \dots j'_{n-1}}^{j_1 \dots j_{n-1} J} = \sum_{j''_1 \dots j''_{n-1}} W_{j'_1 \dots j'_{n-1}}^{j_1 \dots j_{n-1} J} W_{j''_1 \dots j''_{n-1}}^{j'_1 \dots j'_{n-1} J}. \quad (1.12)$$

Этой свойство коэффициентов $W_{j'_1 \dots j'_{n-1}}^{j_1 \dots j_{n-1} J}$ в дальнейшем значительно облегчит работу с ними.

Воспользуемся еще равенством:

$$x^+ |n; j_1 \dots j_{n-1} J \rangle = |n+1; j_1 \dots j_{n-1} J \rangle. \quad (1.13)$$

Применив его к (1.10), получим:

$$|n+1; j_1 \dots j_{n-1} J \rangle = \sum_{j'_1 \dots j'_{n-1}} W_{j'_1 \dots j'_{n-1}}^{j_1 \dots j_{n-1}} |n+1; j'_1 \dots j'_{n-1} J \rangle. \quad (1.14)$$

Теперь, умножив (1.14) скалярно на $|n+1; j''_1 \dots j''_n J \rangle$, будем иметь:

$$W_{j''_1 \dots j''_n}^{j_1 \dots j_{n-1}} = \sum_{j'_1 \dots j'_{n-1}} W_{j'_1 \dots j'_{n-1}}^{j_1 \dots j_{n-1}} W_{j''_1 \dots j''_n}^{j'_1 \dots j'_{n-1}}. \quad (1.15)$$

Этих соотношений достаточно для того, чтобы приступить к выводу уравнений движения. Построим вектор с заданным моментом J . Ограничимся только моментами $J = j, j \pm 1, j \pm 2$, хотя это и не имеет принципиального значения. Тогда

$$|J \rangle = \sum_{n, \{j_k\}} d_n^{j_1 \dots j_{n-1}} |n; j_1 \dots j_{n-1} J \rangle.$$

Используя (1.13) и (1.11), а также вещественность коэффициентов $d_n^{j_1 \dots j_{n-1} J}$, получим:

$$\begin{aligned} \langle J | H | J \rangle = & \sum_{n, \{j_k\}, \{j'_k\}} n \cdot n \cdot W_{j'_1 \dots j'_{n-1}}^{j_1 \dots j_{n-1}} d_n^{j_1 \dots j_{n-1}} d_n^{j'_1 \dots j'_{n-1}} + \\ & + 2\gamma \sum_{n, \{j_k\}, \{j'_k\}} (n+1)! W_{j'_1 \dots j'_{n-1}}^{j_1 \dots j_{n-1}} d_n^{j_1 \dots j_{n-1}} d_{n+1}^{j'_1 \dots j'_{n-1}}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Но из-за соотношения (1.10) не все векторы $|n; j_1 \dots j_{n-1} J \rangle$, а значит и не все коэффициенты $d_n^{j_1 \dots j_{n-1} J}$ линейно независимы и поэтому варьировать (1.16) по коэффициентам $d_n^{j_1 \dots j_{n-1} J}$ можно лишь с учетом условий их связи.

Связь эта дается соотношением:

$$d_n^{j_1 \dots j_{n-1} J} = \sum_{j'_1 \dots j'_{n-1}} W_{j'_1 \dots j'_{n-1}}^{j_1 \dots j_{n-1}} d_n^{j'_1 \dots j'_{n-1} J}, \quad (1.17)$$

которое следует из (1.10).

Это означает, что число линейно независимых коэффициентов $d_n^{j_1 \dots j_{n-1} J}$ равно числу линейно независимых строк матрицы $W_{j'_1 \dots j'_{n-1}}^{j_1 \dots j_{n-1}}$.

Уравнение (1.17) может быть решено в общем виде:

$$d_n^{j_1 \dots j_{n-1} j} = \sum_{\{j_k\}} C_{n, \{j_k\}}^j W_{\{j_k\}}^{j_1 \dots j_{n-1} j} \quad (1.18)$$

(Суммирование ограничено наборами индексов $\{j_k\}$, соответствующими линейно независимыми строкам матрицы $W_{\{j_k\}}^{j_1 \dots j_{n-1} j}$). В этом легко убедиться при непосредственной подстановке (1.18) в (1.17) и использовании (1.12). Коэффициенты $C_{n, \{j_k\}}^j$ линейно независимы.

Подставляя (1.18) в (1.16) и используя (1.12) и (1.15), получим

$$\begin{aligned} \langle J | H | J \rangle &= \sum_{n, \{j_k\}, \{j'_k\}} n \cdot h! W_{\{j'_k\}}^{\{j_k\}} C_{n, \{j_k\}}^j C_{n, \{j'_k\}}^j + \\ &+ 2\gamma \sum_{n, \{j_k\}, \{j'_k\}} (n+1)! C_{n+1, \{j_k\}}^j C_{n, \{j'_k\}}^j W_{\{j'_k\}}^{\{j_k\}} \end{aligned}$$

Вычисляем и норму

$$\langle J | J \rangle = \sum_{n, \{j_k\}, \{j'_k\}} n! C_{n, \{j_k\}}^j C_{n, \{j'_k\}}^j W_{\{j'_k\}}^{\{j_k\}} \quad (1.19)$$

Учет векторов с заданными n и J , но с различными наборами $\{j_k\}$ связан с отысканием дополнительных квантовых чисел, характеризующих многофоновые состояния, что само по себе является очень сложной задачей. Поэтому попытаемся выяснить: нет ли выделенного по своим свойствам набора. Таким набором является $\{j \dots j\}$, который естественным образом возникает при многократном действии оператора X^+ на векторы a^+ , $[a^+ b^+]_j$ и т.д. Посмотрим, какие есть основания для отбрасывания векторов с другими наборами моментов, которые возникают при действии оператора X . Взаимодействие связывает векторы $|n; j \dots j\rangle$ друг с другом с помощью диагональных элементов матрицы W , а с векторами с другими наборами моментов - с помощью недиагональных элементов той же матрицы. В следующем разделе будет показано, что элементы матрицы W состояются из сумм произведений различного числа коэффициентов Рака, причем разложение для диагональных элементов матрицы начинается с единицы, а для недиагональных - с соответствующих степеней коэффициентов Рака, которые меньше единицы и знакопеременны. На этом основании будем учитывать в первом приближении только векторы с набором моментов $\{j \dots j\}$.

В этом случае

$$\begin{aligned}
\langle J | H | J \rangle &= \sum_n n \cdot h! W_n^{\{j\}j} [C_n^j]^2 + \\
&+ 2\gamma \sum_n (n+1)! W_{n+1}^{\{j\}j} C_n^j C_{n+1}^j \\
\langle J | J \rangle &= \sum_n n! W_n^{\{j\}j} [C_n^j]^2.
\end{aligned}$$

Упростим обозначения

$$\begin{aligned}
W_n^{\{j\}j} &\rightarrow W_n^j \\
C_n^j &\rightarrow C_n.
\end{aligned}$$

Приравнявая вариацию $\langle J | H | J \rangle - E \langle J | J \rangle$ по C_n^j нулю, получим:

$$(n-E)C_n^j + \gamma C_{n-1}^j + \gamma(n+1) \frac{W_{n+1}^j}{W_n^j} C_{n+1}^j = 0. \quad (1.19)$$

Таким образом, центр тяжести работы переносится на нахождение численных значений коэффициентов W_n^j . Уравнение (1.19) очень удобно обрабатывать численно, например, с помощью метода, использованного в ^{18/}, а при наличии приближенных выражений для W_n^j - аналитически, как это было показано в ^{17/}.

В работе ^{13/} указывалось, что основой для приближения при рассмотрении взаимодействия нуклонов с фонами может служить малость по величине и знакопеременность коэффициентов Рака. Используя этот факт, можно сохранять лишь низшие степени коэффициентов Рака. Именно это частично и было сделано выше. Однако в данной работе, в отличие от работы ^{13/}, вклад от векторов с главной последовательностью внутренних моментов (т.е. $\{j \dots j\}$) учитывался точно. На языке диаграмм это означает частичный учет вкладов от диаграмм любой геометрической сложности. Если бы ограничение низшими степенями коэффициентов Рака использовалось всюду, то мы получили бы (это будет видно в последующих разделах) неправильный рост коэффициентов W_n^j при больших n , а значит и неправильный энергетический спектр при $\gamma^2 \gg 1$, когда основную роль играют компоненты с большим числом фононов.

Уравнение (1.19) представляет собой основной результат данной работы. В последующих разделах будет показано, что из него следует ряд результатов, полученных для этой модели ранее.

II.

Переходим к вычислению элементов матрицы W . Довольно простые, но достаточно громоздкие выкладки приводят к следующей рекуррентной формуле:

$$W_{j_1 \dots j_n}^{j_1 \dots j_{n-1}} = \frac{1}{n} \sum_{j'_1 \dots j'_{n-2}} A_{j_1 \dots j_n}^{j'_1 \dots j'_{n-1}} W_{j'_1 \dots j'_{n-2}}^{j_1 \dots j_{n-1}} \quad (II.1)$$

где

$$A_{j_1 \dots j_n}^{j'_1 \dots j'_{n-1}} = \delta_{j_1 j'_1} \dots \delta_{j_{n-1} j'_{n-2}} + \alpha_{j_1 j'_1} \delta_{j_2 j'_1} \dots \delta_{j_{n-1} j'_{n-2}} + \dots + \alpha_{j_1 j'_1} \dots \alpha_{j_{n-2} j'_{n-2}}$$

$$(-)^{j+\ell'-\ell-j} a_{j\ell}^{\ell'} = [2j(\ell'), 2; j | 2, j 2(\ell); j] \text{коэффициент Рака}^{/5/}$$

Например,

$$W_1^j = 1, W_2^j = \frac{1}{2}(1 + \alpha_{jj}), W_{j_1 j_2}^{j_1 j_2} = \frac{1}{2} \alpha_{j_1 j_2}$$

Видно, что $W_{j_1 j_2}^{j_1 j_2}$, в отличие от W_2^j , пропорционален коэффициенту Рака, а не единице. Это свойство коэффициентов W и было использовано при формулировке приближения.

Оценим также степень роста W_n^j при $n \rightarrow \infty$. Используя формулу (1.11), можно написать:

$$(n+1) \frac{W_{n+1}^j}{W_n^j} = \frac{\langle J j \dots j; n+1 | n+1; j \dots j \rangle}{\langle J j \dots j; n | n; j \dots j \rangle} \frac{\langle J j \dots j; n | X X^+ | n; j \dots j \rangle}{\langle J j \dots j; n | n; j \dots j \rangle} \quad (II.2)$$

$$X X^+ = \sum_{m \mu \mu'} C_{j m - \mu 2 \mu}^{j m} C_{j m - \mu 2 \mu'}^{j m - \mu + \mu'} a_m^+ a_{m - \mu + \mu'} b_\mu b_{\mu'}$$

При вычислении средних между состояниями с большим числом фононов операторы фононов b_μ^+, b_μ можно рассматривать квазиклассически и заменять с-числами:

$$b_\mu, b_\mu^+ = \sqrt{n_\mu}$$

так, что

$X X^+ \approx n$ и, следовательно,

$$(n+1) \frac{W_{n+1}^J}{W_n^J} \approx n \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty. \quad (\text{II.3})$$

Если в выражении $(n+1) \frac{W_{n+1}^J}{W_n^J}$ сохранить только слагаемое, пропорциональное n , а такое приближение оправдано при $\gamma^2 \gg 1$, то найти решение уравнения (1.18) будет просто (см. /7/). При

$$(n+1) \frac{W_{n+1}^J}{W_n^J} = f_j(n+1) \quad (\text{II.4})$$

получится следующий энергетический спектр:

$$E_n^J = -\gamma^2 f_j + n \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{II.5})$$

Первое слагаемое в (II.5) описывает совокупность одночастичных уровней, характерную для деформированных ядер (одночастичный сферический уровень в этой модели вырожден). Расстояние между одночастичными уровнями $\approx \gamma^2$, а в принятом приближении $\gamma^2 \gg 1$. Второе слагаемое представляет собой серию колебательных уровней, которая строится на уровнях одночастичных. Расстояние между колебательными уровнями равно единице. Учет поправок к (II.4) приведет к появлению ротационных полос с моментом инерции $\approx \gamma^2$ и к искажению одночастичных и колебательных уровней.

Полученная выше картина характерна для деформированных ядер, что и должно было получаться при $\gamma^2 \gg 1$. Из сказанного следует, что если при приближенном вычислении коэффициентов W_n^J не будет выполняться требование $\gamma^2 \gg 1$, то не получится и правильного предела для энергетического спектра при $\gamma^2 \gg 1$.

III.

Покажем, что при $j = 3/2$ уравнение (1.18) — точное. Соответствующее точное решение дается в работе /8/. Подробно рассмотрим только состояние с $J = j$.

Векторы $|n; j \dots j\rangle$ перепишем так:

$$|2n; j \dots j\rangle = \sum_{j_1 \dots j_n} a_{j_1}^j \dots a_{j_n}^j \{ \dots [a^+ B_{j_1}^+]_j \dots B_{j_n}^+ \}_j$$

$$|2n+1; j \dots j\rangle = \sum_{j_1 \dots j_n} a_{j_1}^j \dots a_{j_n}^j \{ \dots [a^+ B_{j_1}^+]_j \dots B_{j_n}^+ | b^+ \}_j$$

$$B_j^+ = [b^+ b^+]_j, \quad j = 0, 2, 4, \quad a_j^j = [j 2(j), 2; j | j, 2 2(j); j]_j.$$

При $j = 3/2 \quad \alpha_2^{3/2} = \alpha_4^{3/2} = 0, \quad \alpha_0^{3/2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$|2n; 3/2 \dots 3/2\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n a_{3/2}^+ (B_0^+)^n \quad (III.2)$$

$$|2n+1; 3/2 \dots 3/2\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n [a^+ b^+ |_{3/2} (B_0^+)^n .$$

Используя (II.2) и правило коммутации

$$[B_0, B_0^+] = 2 + \frac{4}{5} \sum_{\mu} b_{\mu}^+ b_{\mu}, \quad (III.3)$$

найдем

$$(n+1) \frac{W_{n+1}^{3/2}}{W_n^{3/2}} = \frac{1}{5} [n+3+2(-)^n], \quad (III.4)$$

где, как и следовало ожидать, требование (II.3) удовлетворено. Подставив (III.4) в (1.19), получим:

$$(n-E) C_n^{3/2} + \gamma C_{n-1}^{3/2} + \frac{1}{5} \gamma [n+3+2(-)^n] C_{n+1}^{3/2} = 0.$$

Или, переходя к обозначениям работы /7/:

$$\gamma = \sqrt{5} \gamma, \quad E = \epsilon - 5/2$$

$$C_n^{3/2} = (\sqrt{5})^n \frac{1}{x_n} a_n^0, \quad x_n = \sqrt{n+2-2(-)^n} x_{n-1},$$

будем иметь:

$$\left(n + \frac{5}{2} - \epsilon\right) a_n^0 + \gamma \sqrt{n+2-2(-)^n} a_{n-1}^0 + \gamma \sqrt{n+3+2(-)^n} a_{n+1}^0 = 0, \quad (III.5)$$

что совпадает с уравнением (43) работы /8/.

Аналогичные вычисления при $J \neq i$ приведут к уравнению:

$$(n-E) C_n^J + \gamma C_{n-1}^J + \frac{1}{5} \gamma [n+3+(-)^{n-\sigma} (\sigma+2)] C_{n+1}^J = 0 \quad n = \sigma, \sigma+1, \dots$$

где $\sigma = 0$ при $J = j, \sigma = 1$ при $J = j \pm 1, j \pm 2$.

Слагаемое $(\sigma+2)(-)^{n-\sigma}$ во втором порядке приближения сильной связи приведет к появлению ротационной полосы:

$$\frac{(\sigma+2)^2}{\frac{4}{5} \gamma^2} .$$

IV.

Взаимодействие квадрупольного фонона с нуклоном на изолированном j -уровне рассматривалось в двух предельных случаях в работах ^{3,4/}. Покажем, что полученные там результаты следуют из (1.18). Рассмотрим только состояния с $J=j$.

1. В первом случае предполагается, что все коэффициенты Рака малы и учитываются только их первые степени. В этом приближении из (II.1) получаем, что

$$W_n^j = \frac{1}{n!} [1 + \alpha_{j,j}^j (n-1)] \quad n = 1, 2, \dots$$

$$W_0^j = 1$$

$$(n+1) \frac{W_{n+1}^j}{W_n^j} \approx 1 + \alpha_{j,j}^j \quad n = 1, 2, \dots \quad (IV.1)$$

$$\frac{W_1^j}{W_0^j} = 1.$$

Этот результат противоречит оценке (II.3) и, значит, не применим при $\gamma^2 \gg 1$.

Подставляя (IV.1) в (1.18), получим:

$$-E C_0^j + \gamma C_1^j = 0 \quad (IV.2)$$

$$(n-E) C_n^j + \gamma C_{n-1}^j + \gamma (1 + \alpha_{j,j}^j) C_{n+1}^j = 0 \quad n = 1, 2, \dots \quad (IV.3)$$

Уравнение (IV.3) представляет собой рекуррентное соотношение для функций Бесселя ^{9/} и удовлетворяется подстановкой:

$$C_n^j = (-)^n (\sqrt{1 + \alpha_{j,j}^j})^{-n} J_{n-E} (2\gamma \sqrt{1 + \alpha_{j,j}^j}) \quad (IV.4)$$

(J_{n-E} - функция Бесселя) при любых E . Подставляя (IV.4) в (IV.2), получим уравнение на собственные значения:

$$J_{-1-E} (2\gamma \sqrt{1 + \alpha_{j,j}^j}) + (1 - \frac{1}{1 + \alpha_{j,j}^j}) J_{1-E} (2\gamma \sqrt{1 + \alpha_{j,j}^j}) = 0,$$

которое совпадает с уравнением для полюсов функции Грина, найденной в ^{3/}.

2. Во втором случае считается, что $j \gg 1$. Тогда коэффициент Рака, у которого все моменты равны j значительно превосходит остальные, и в формуле (II.1) можно сохранять только его. В этом приближении

$$W_n^j = \frac{1}{n!} (1 + \alpha_{j,j}^j) \dots (1 + \alpha_{j,j}^j + \dots + \alpha_{j,j}^{j-n-1})$$

$$(n+1) \frac{W_{n+1}^j}{W_n^j} = 1 + a_{j,j}^j + \dots + (a_{j,j}^j)^n.$$

При $j \gg 1$ $a_{j,j}^j \approx 1$ и вводим обозначение $\epsilon_j = 1 - a_{j,j}^j$, в первом порядке по ϵ_j , получаем:

$$(n+1) \frac{W_{n+1}^j}{W_n^j} = (n+1) - \frac{1}{2} \epsilon_j n(n+1), \quad (IV.5)$$

$$\epsilon_j = 1 + (2j+1) \left\{ \begin{matrix} 2 & j & j \\ 2 & j & j \end{matrix} \right\},$$

где $\left\{ \begin{matrix} 2 & j & j \\ 2 & j & j \end{matrix} \right\} - 6j$ - символ.

Видно, что (IV.5) также противоречит оценке (II.3).

Уравнение (I.19) в этом приближении запишется так:

$$(n-E) C_n^j + \gamma C_{n-1}^j + \gamma(n+1) C_{n+1}^j = \frac{1}{2} \gamma n(n+1) \epsilon_j C_{n+1}^j. \quad (IV.6)$$

Решим это уравнение методом, предложенным в [7]. Для этого введем функцию

$$\Psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^j z^n, \quad (IV.7)$$

которая удовлетворяет уравнению:

$$\left(z \frac{d}{dz} - E + \gamma z + \gamma \frac{d}{dz} \right) \Psi(z) = \frac{1}{2} \gamma \epsilon_j z \frac{d^2}{dz^2} \Psi(z), \quad (IV.8)$$

в чем легко убедиться, подставляя (IV.7) в (IV.8) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях z , что даст (IV.6). При $\epsilon_j = 0$

$$\Psi(z) = e^{-\gamma z} (z + \gamma)^{E + \gamma^2}.$$

При $\epsilon_j \neq 0$ будем искать решение в виде ряда:

$$\Psi(z) = \sum_n \Psi_n e^{-\gamma z} (z + \gamma)^n. \quad (IV.9)$$

Подставляя (IV.9) в (IV.8), получим

$$\sum_n \Psi_n (n - \gamma^2 - E) e^{-\gamma z} (z + \gamma)^n = \frac{1}{2} \gamma \epsilon_j z \frac{d^2}{dz^2} \sum_n \Psi_n e^{-\gamma z} (z + \gamma)^n.$$

Как и в [7], это равенство приводит к соотношению:

$$\begin{aligned} \Psi_n (n - \gamma^2 - E) = & -\frac{1}{2} \gamma^2 \epsilon_j \Psi_n (2n + \gamma^2) - \frac{1}{2} \gamma^2 \epsilon_j (n+1)(n+2) \Psi_{n+2} - \\ & - \frac{1}{2} \gamma \epsilon_j (n+1)(n+2\gamma^2) \Psi_{n+1} + \frac{1}{2} \gamma^3 \epsilon_j \Psi_{n-1}. \end{aligned} \quad (IV.10)$$

В первом порядке по ϵ_j можно считать все коэффициенты Ψ_n , кроме одного (например, Ψ_{n_0}), малыми. Тогда, приравнявая в (IV.10) коэффициент при Ψ_{n_0} нулю, получим:

$$E_{n_0} = \pi_0 (1 + \gamma^2 \epsilon_1) - \gamma^2 \epsilon_1 (1 - \frac{1}{2} \gamma^2 \epsilon_1), \quad (\text{IV. II})$$

что совпадает с результатом, полученным в /4/.

В заключение автор благодарит И.Н. Михайлова, в результате многочисленных дискуссий с которым возникла эта работа, В.Г. Соловьева, Д.П. Гречухина и участников семинара по теории ядра Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований за интерес к работе и обсуждения.

Л и т е р а т у р а

1. О. Бор. ПСФ, № 9 (1955).
2. О. Бор, Б. Моттельсон. ПСФ, № 9 (1955).
3. С.Т. Беляев, В.Г. Зелевинский. Ядерная физика, 1, 13 (1968).
4. С.Т. Беляев, В.Г. Зелевинский. Ядерная физика, 2, 615 (1965).
5. А. Эдмондс. Угловые моменты в квантовой механике. (В сб. "Деформация атомных ядер", ИЛ, 1958).
6. E. V. Bajbutzev, R. V. Jolos, I. N. Mikhailov. Preprint JINR E-2772 (1966); Acta Physica Polonica
7. И.Н. Михайлов, Р.В. Джолос. Препринт ОИЯИ Р-2567, Дубна 1966; Acta Physica Polonica 30, 237 (1966).
8. В.Ф. Вауман, L. Silverberg. Nucl. Phys, 16, 625 (1960).
9. И.С. Грандштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел
19 октября 1966 г.