ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р4 - 2983

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

И. Амирханов, В.П. Жигунов, Б.Н. Захарьев

Столкновения с перераспределением частиц

1966

P4 - 2983

И. Амирханов, В.П. Жигунов, Б.Н. Захарьев

Столкновения с перераспределением частиц

1. Введение

Проблема описания столкновений с перераспределением частиц занимает особое положение в квантовой теории рассеяния. Во-первых, это задача с числом тел (принципиально!) большим двух. Во-вторых, наряду с трудностями, которые требуется преодолеть при исследовании неупругого рассеяния с постоянным составом частиц, она существенно осложняется совершенно специальными обстоятельствами, о которых мы будем говорить ниже.

Простейшим примером такого рода процессов является срыв (подхват) частицы при столкновении, который можно схематически представить так:

$$\begin{aligned}(1+2)+3 &\to (1+2)+3 \\ &\to 1+(2+3).\end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь скобки объединяют частицы, образующие связанную систему.

В 1950 г. Липманом и Швингером[1] был предложен общий формализм для описания рассеяния с перераспределением. Однако полученные уравнения не могут быть решены непосредственно разработанными в настоящее время методами[2,3] (например, методом Фредгольма).

Существенный прогресс был достигнут в работе Фаддеева[2]. В системе интегральных уравнений Фаддеева для компонент амплитуды 3-частичного рассеяния устранен целый ряд принципиальных трудностей, возникающих в постановке Липмана-Швингера. Метод Фаддеева допускает простое обобщение на случай большого числа частиц[3]. Однако численное решение интегральных уравнений Фаддеева представляется весьма трудоемкой задачей[x)].

Значительный шаг в развитии теории реакций был сделан после появления работ Фешбаха[4]. Очень удобным оказалось разлагать функцию N тел по полному набору

---

x) В этом отношении интересен расчет рассеяния с учетом перераспределения в простой модели 3-х тел по методу Фаддеева, проведенный А.И. Базем, В.Ф. Деминым, и И.И. Кузьминым.

функций $N-1$ тела (которые могут быть найдены в рамках какой-нибудь хорошо работающей модели). Коэффициенты такого разложения как функции координат N-ой частицы находятся из системы дифференциальных уравнений. Решение же дифференциальных уравнений несравненно проще, чем интегральных. При этом, правда, приближенно обрывают систему (которая имеет бесконечное число уравнений). Однако указанный метод не годится для описания рассеяния с изменением состава частиц, хотя разложение Ψ_N по полному набору остается справедливым, и система уравнений имеет решение, соответствующее процессам с перераспределением частиц. Это связано с тем, что базисные функции могут быть выбраны лишь для одного состава частиц, и в этом случае трудно сформулировать граничные условия на коэффициентные функции, соответствующие асимптотике с другим составом частиц. Например, для процесса, представленного схемой (1), при разложении полной функции по состояниям относительного движения частиц 1 и 2 практически невозможно записать граничное условие отсутствия парциальных сходящихся волн, соответствующих движению частицы 1 относительно центра масс связанной пары (2 + 3). Подробнее на этом вопросе мы остановимся в разделе 2.

Предпринятые в ряде работ [6] попытки обойти указанную трудность по пути использования формализма проекционных операторов (см. вторую работу Фешбаха [4]) пока нельзя считать полностью успешными. Мы не будем здесь касаться этих работ подробнее, отметим только, что различные предлагаемые уравнения для проекционных операторов очень трудно решать.

Нужно отметить, что учет идентичности падающей частицы с частицами мишени-задача тесно связанная с проблемой описания перераспределения частиц (по существу составляет лишь часть последней). Это подчеркивает значение обсуждаемого вопроса.

Интересная идея была высказана в работе Левина [5], предложившего разлагать по базисным функциям не полную функцию Ψ, а разность $\Psi - \Phi_0$, где $\Phi_0 = e^{ik_\alpha R_\alpha}\phi(\rho_\alpha)$ представляет плоскую волну связанных пар $(1+2)$, свободно падающих на третью частицу. Отмеченная выше трудность при этом остается, но, если пренебречь оставшимися в асимптотике $\Psi - \Phi_0$ волнами, соответствующими свободному движению пар $(1+2)$ относительно 3, то можно приближенно записать граничные условия и решить задачу (дополнительные замечания по поводу работы Левина [5] высказаны в разделе 2).

Идея Левина наводит на мысль о полном вычитании из Ψ функций, соответствующих асимптотическому движению продуктов реакции с составом частиц, отличным от такого, для которого выбраны базисные функции. В этом случае граничные условия формулируются точно. Такая постановка вопроса требует информации об амплитуде рассеяния еще до решения задачи. Оказывается, что амплитуда может быть найдена подбором аналогично тому, как при численном решении задачи на собственные значения подбирается энергия уровня. В разделе 4 формулируется критерий правильности такого выбора. Как и в работе Левина[5], получаются уравнения с источниками (в отличие от обычного метода Фешбаха). Исследование таких уравнений представляет методический интерес особенно в свете использования источников вместо мнимых добавок потенциала, для учета связи данного канала с остальными.

2. Система связанных дифференциальных уравнений для реакций с перераспределением частиц

Рассмотрим задачу 3-х тел, схематически представленную в (1). Исходное уравнение Шредингера имеет вид:

$$(T_1 + T_2 + T_3 + V_{12} + V_{13} + V_{23})\Psi = E\Psi, \tag{2}$$

где T_i, V_{ij} – оператор кинетической энергии i -ой частицы и потенциал взаимодействия частиц i и j. Пусть полная энергия E недостаточна для развала системы на три части. Состояние системы, когда связанная пара $(1+2)$ находится вне области взаимодействия с 3, будем называть каналом a; свободное движение пары (2,3) относительно 1 – каналом b. Будем считать (во избежание несущественных в принципиальном отношении усложнений), что частицы 1 и 3 не спариваются. В соответствии с указанными возможными разбиениями частиц гамильтониан системы может быть представлен в виде суммы невозмущенной части и возмущения двояким образом[5]:

$$H = H_a + V_a = H_b + V_b \;, \tag{3}$$

где

$$H_a = T_a + h_a\,;\; H_b = T_b + h_b;$$

$T_{a(b)}$ – оператор кинетической энергии движения центра масс относительно третьей частицы в канале $a(b)$; $h_{a(b)}$ – гамильтониан внутреннего движения пары; $V_a = V_{13} + V_{23}$, $V_b = V_{12} + V_{13}$.

Движение частиц в канале a удобно характеризовать переменными $\rho_a = r_1 - r_2$; относительно движения частиц 1 и 2 и их центра масс $\vec{R}_a = \dfrac{m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2}{m_1 + m_2} - \bar{r}_3$. Аналогичные векторы в канале b обозначим $\vec{\rho}_b$ и $\vec{R}_b$.

Функция Ψ всей системы может быть разложена как по полному набору собственных функций $\phi^a_{i\ell m}(\rho_a)$ гамильтониана h_a, так и по полному набору $\phi^b_{i\ell m}(\rho_b)$ собственных функций h_b:

$$\Psi(\bar{\rho}_{a(b)}; R_{a(b)}) = \sum_{i\ell m} |\,\phi^{a(b)}_{i\ell m}\rangle\langle\phi^{a(b)}_{i\ell m}|\,\Psi(\rho\,;R)\rangle\;. \tag{4}$$

Под суммой в правой части (4) следует подразумевать суммирование по дискретным и интегрирование по непрерывным собственным значениям $h_{a(b)}$.

Стандартная процедура[4] позволяет получить для коэффициентов разложения (4), являющихся функциями $R_{a(b)}$, систему связанных дифференциальных уравнений.

Для решения такой системы необходимо задать граничные условия на $\langle\phi^{a(b)}_{il_m}|\Psi(\rho R)\rangle$ соответствующие поведению волновой функции Ψ системы при $R_{a(b)}\to\infty$. Здесь мы встречаемся с трудностью, характерной для задач с изменением состава частиц. Разложение по $\phi^{a}_{il_m}$ удобно для описания рассеяния в канале a, но учет, например, отсутствия падающих волн в канале b в виде граничного условия на функции $\langle\phi_{il_m}|\Psi\rangle$, зависящие от R_a, представляется крайне неестественным. Разложение по $\phi^{b}_{il_m}$, напротив, позволяет просто сформулировать граничные условия в канале b, но совершенно не известно, как в функциях $\langle\phi_{il_m}|\Phi\rangle$, зависящих от $\vec{R}_e$, выделить волны относительного движения пары $(1+2)$ и частицы 3.

Итак, использование разложений (4) затрудняется присутствием в асимптотике Ψ одновременно каналов a и b.

Левин[5] предложил вычитать из Ψ функцию Φ_0 свободного движения пары в канале a относительно третьей частицы. Однако это не устраняет указанную трудность и формулировка граничных условий для системы уравнений, полученных Левиным, не легче, чем при разложении (4)[x].

Представляется естественным исключить из асимптотики Ψ либо канал a, либо канал b. Поступим для этого следующим образом. Рассмотрим уравнение

$$(H_{a(b)}-E)\,\Phi_{a(b)}(\rho R)=I_{a(b)}(\rho R). \qquad (5)$$

Выберем граничные условия для Φ и функцию источников I так, чтобы асимптотика Φ совпадала с частью асимптотики $\Psi(R\rho)$, соответствующей каналу $a(b)$.

Источник I в (5) необходим для того, чтобы обеспечить в асимптотике $\Phi_{a(b)}$ разницу потоков падающей и уходящей волн равную таковой в канале $a(b)$ функции Ψ. Вычтем $\Phi_{a(b)}$ из Ψ. Эта разность удовлетворяет уравнению:

$$H(\Psi-\Phi_{a(b)})=F(\Psi-\Phi_{a(b)})-V_{a(b)}\Phi_{a(b)}-I_{a(b)}. \qquad (6)$$

Разложим $\Psi-\Phi_{a(b)}$ в ряд по $\phi_{i'l'_m}$,

$$\Psi-\Phi_{a(b)}=\sum_{i'l'_m}|\phi^{b(a)}_{i'l'_m}\rangle\langle\phi^{b(a)}_{i'l'_m}|\Psi-\Phi_{a(b)}\rangle=\sum_{i'l'_m}|\phi^{b(a)}_{i'l'_m}\rangle\,X_{i'l'_m}(\vec{R}). \qquad (7)$$

Подставим (7) в (6), умножим уравнение (6) слева на $\phi^{b(a)}_{il_m}(\rho)$ и проинтегрируем по $\rho_{b(a)}$. Воспользуемся ортонормированностью функций ϕ_{il_m}, получим, учитывая, что

$$h_{a(b)}\phi^{a(b)}_{il_m}=\epsilon^{a(b)}_{il_m}\,\phi^{a(b)}_{il_m}:$$

$$(T_{b(a)}+\epsilon^{b(a)}_{i\ell}-E)\,X^{b(a)}_{i\ell_m}(\vec{R})+\sum_{i'\ell'_{m'}}K^{b(a)}_{i\ell_m i'\ell'_{m'}}X^{b(a)}_{i'\ell'_{m'}}(\vec{R})+J^{b(a)}_{i\ell_m}(\vec{R})=0, \qquad (8)$$

где

$$K^{a(b)}_{i\ell_m i'\ell'_{m'}}(\bar{R})=\int\phi^{a(b)*}_{i\ell_m}(\vec{\rho})\,V_{a(b)}(\vec{R},\bar{\rho})\,\phi^{a(b)}_{i'\ell'_{m'}}(\bar{\rho})\,d\vec{\rho}_{a(b)} \qquad (9)$$

$$J^{a(b)}_{i\ell_m}(\vec{R})=\int\phi^{a(b)*}_{i\ell_m}(\bar{\rho})\,V_{b(a)}(\vec{R},\bar{\rho})\,\Phi_{b(a)}(\bar{R},\bar{\rho})\,d\bar{\rho}_{a(b)}+\int\phi^{a(b)*}_{i\ell_m}I_{b(a)}(\bar{R},\bar{\rho})\,d\bar{\rho}_{a(b)}\,. \qquad (10)$$

Система дифференциальных уравнений (8) близка по структуре системе, получающейся при разложении Ψ и отличается от нее лишь наличием в (8) функции источников $J(\bar{R})$ x). Появление источников в уравнениях (8) объясняется тем, что, например, в асимптотике $\Psi-\Phi_a$ есть только расходящиеся волны и источник обеспечивает выполнение законов сохранения (улетающие частицы должны откуда-нибудь браться).

Если потенциалы $V_{a(b)}$ имеют ограниченный радиус действия, то функции K_{ij} и J_j отличны от нуля в конечной области. Система (8) при $R\to\infty$ переходит в систему однородных расцепленных уравнений (Шредингера), описывающих свободное движение пары (реальное или виртуальное) в i -ом состоянии относительно третьей частицы. Для функций X просто сформулировать граничные условия. Если энергия E системы недостаточна для возбуждения пар в каналах a и b, то

$$\lim_{R_a\to\infty} X^{a}_{i\ell_m}=\begin{cases} e^{i\bar{k}_a\bar{R}_a}+A(\theta,\phi)\dfrac{e^{ik_aR_a}}{R_a} & \text{при } i=0;\ \ell=0,\\ A_{i\ell_m}\,e^{-\chi^a_{i\ell}R_a} & \text{при } i\neq 0 \text{ или } \ell\neq 0. \end{cases} \qquad (11)$$

$$\lim_{R_b\to\infty} X^{b}_{i\ell_m}(R)=\begin{cases} B(\theta\phi)\,\dfrac{e^{ik_bR_b}}{R_b} & \text{при } i=0;\ \ell=0,\\ B_{i\ell_m}\,e^{-\chi^b_{i\ell}R_b} & \text{при } i\neq 0 \text{ или } \ell\neq 0. \end{cases} \qquad (12)$$

3. Уравнения для парциальных волн

Чтобы отделить угловые переменные, разложим $X_{i\ell_m}(\vec{R})$ и $J_{i\ell_m}$ по шаровым гармоникам (опуская индексы a, b)

x) Уравнения (8) по форме совпадают с системой уравнений Левина [5], но у Левина в функции источника (10) отсутствует второй член. В работе Левина [5] из Ψ вычиталась функция Φ_0, являющаяся решением однородного уравнения $(H_a-E)\Phi_0=0$, совпадающего с (5), если положить источник I равным нулю.

$$X_{i\ell m_1}(\vec{R}) = \sum_{\ell_2} \frac{\chi^{\ell_2 m_2}_{i\ell_1 m_1}(R)}{R} Y_{\ell_2 m_2}\left(\frac{\vec{R}}{R}\right), \tag{13}$$

и аналогично для $J_{i\ell m}$.

Для χ получаем из (8) и (13) систему:

$$\left[-\frac{1}{2m}\frac{d^2}{dR^2} + \frac{\ell_2(\ell_2+1)}{2mR^2}\right]\chi^{\ell_2 m_2}_{i\ell_1 m_1}(R) + \sum_{i'\ell_1' m_1' \ell_2' m_2'} K^{\ell_2 m_2 \ell_2' m_2'}_{i\ell_1 m_1 i'\ell_1' m_1'} \chi^{\ell_2' m_2'}_{i'\ell_1' m_1'} + J^{\ell_2 m_2}_{i\ell_1 m_1} = 0, \tag{14}$$

где

$$K^{\ell_2 m_2 \ell_2' m_2'}_{i\ell_1 m_1 i'\ell_1' m_1'}(R) = \int Y^*_{\ell_2 m_2}\left(\frac{\vec{R}}{R}\right) K_{i\ell_1 m_1 i'\ell_1' m_1'} Y_{\ell_2' m_2'}\left(\frac{\vec{R}}{R}\right) d\Omega_{\vec{R}} \tag{15}$$

$$J^{\ell_2 m_2}_{i\ell_1 m_1}(R) = R\int Y^*_{\ell_2 m_2}\left(\frac{\vec{R}}{R}\right) J_{i\ell_1 m_1}(\vec{R})\, d\Omega_{\vec{R}}. \tag{16}$$

Система (14) написана для функций χ в представлении квантовых чисел $\ell_1 m_1 \ell_2 m_2$. Перейдем к представлению $\ell_1 \ell_2 LM$, где $L = \ell_1 + \ell_2$, а M – проекция полного момента L. Воспользуемся для этого преобразованиями /8/:

$$\chi^{LM}_{i\ell_1 \ell_2} = \sum_{m_1 m_2} C^{LM}_{\ell_1 m_1 \ell_2 m_2} \chi^{\ell_2 m_2}_{i\ell_1 m_1} \tag{17}$$

$$J^{LM}_{i\ell_1 \ell_2} = \sum_{m_1 m_2} C^{LM}_{\ell_1 m_1 \ell_2 m_2}, \tag{17a}$$

$$K^{\ell_2 m_2 \ell_2' m_2'}_{i\ell_1 m_1 i'\ell_1' m_1'} = \sum_{\substack{LM \\ L'M'}} C^{LM}_{\ell_1 m_1 \ell_2 m_2} C^{L'M'}_{\ell_1' m_1' \ell_2' m_2'} K^{LM}_{i\ell_1 \ell_2 i'\ell_1' \ell_2'} \delta_{LL'} \delta_{MM'} =$$

$$= \sum_{LM} C^{LM}_{\ell_1 m_1 \ell_2 m_2} C^{LM}_{\ell_1' m_1' \ell_2' m_2'} K^{LM}_{i\ell_1 \ell_2 i'\ell_1' \ell_2'}. \tag{18}$$

Умножим (14) на $C^{LM}_{\ell_1 m_1 \ell_2 m_2}$ и просуммируем по $m_1 m_2$. Заменим K по формуле (18) и, учитывая ортогональность коэффициентов векторного сложения:

$$\sum_{m_1 m_2} C^{LM}_{\ell_1 m_1 \ell_2 m_2} C^{L'M'}_{\ell_1 m_1 \ell_2 m_2} = \delta_{LL'} \delta_{MM'}, \tag{19}$$

получим систему в представлении полного момента:

$$\left[-\frac{1}{2m}\frac{d^2}{dR^2} + \frac{\ell_2(\ell_2+1)}{2mR^2}\right]\chi^{LM}_{i\ell_1 \ell_2}(R) + \sum_{i'\ell_1'\ell_2'} K^{LM}_{i\ell_1\ell_2 i'\ell_1'\ell_2'}(R)\chi^{LM}_{i'\ell_1'\ell_2'}(R) + J^{LM}_{i\ell_1'\ell_2'}(R) = 0. \tag{20}$$

Так как $\Psi - \Phi$ конечна при $R \to 0$, функции χ должны обращаться в нуль при $R = 0$. При больших R система (20) расщепляется (K и $J \to 0$ при $R \to \infty$) и асимптотика χ имеет вид:

$$\chi^{aLM}_{1\ell_1\ell_2} \sim \frac{1}{K_0^a}\sin\left(k_0 R_a - \frac{\ell_2^0\pi}{2}\right)\delta_{1 1_0}\,\delta_{\ell_1\ell_1^0} +
+ q^{aLM}_{1_0\ell_1^0\ell_2^0 1\ell_1\ell_2}\, e^{i(k_1^a R_a - \frac{\ell_2\pi}{2})} \tag{21}$$

$$\chi^{bLM}_{1\ell_1\ell_2} \sim q^{bLM}_{1^0\ell_1^0\ell_1^0 1\ell_2\ell_2}\, e^{i(k_1^b R_b - \frac{\ell_2\pi}{2})}. \tag{22}$$

4. Решение системы

Пусть энергия E недостаточна для возбуждения пар (1+2) и (2+3), так что внутреннее состояние пары при больших $R_{a(b)}$ описывается функцией основного состояния $\phi_0^{a(b)}$. Так как внутреннее состояние пар при больших R описывается в данном случае s волной, полный момент L системы будет совпадать с ℓ_2.

Для численного решения системы (20) нужно задать функции $J^{LM}_{1\ell_1\ell_2}(R)$, которые определяются функциями $\Phi(\bar R,\bar\rho)$ и $I(\bar R,\bar\rho)$. Источник $I(\bar R,\bar\rho)$ в уравнении (5) удобно выбрать в факторизованном виде:

$$I_{a(b)}(\bar R,\bar\rho) = \phi_0^{a(b)}(\rho)\cdot S_{a(b)}(\bar R). \tag{23}$$

Согласно (5), зависимость Φ от ρ при этом также выделится в виде множителя:

$$\Phi_{a(b)}(\bar R,\bar\rho) = \phi_0^{a(b)}(\rho)\, F_{a(b)}(\bar R). \tag{24}$$

Функция F из (24) удовлетворяет уравнению:

$$(T_{a(b)} + \epsilon_0^{a(b)} - E)\, F(\bar R) = S(\bar R). \tag{25}$$

При соответствующем выборе S (25) может быть решено аналитически. В качестве источника $S_{a(b)}$ следует взять функцию, стремящуюся к нулю при больших R. Параметры этой функции должны быть выбраны так, чтобы асимптотика $\Phi_{a(b)}(\bar R)$ совпадала с Ψ при больших $R_{a(b)}$ (см. приложение A). Возникает проблема: для решения системы (20) нам нужно знать асимптотику Ψ, а чтобы последнюю получить, нужно решить (20).

Можно предложить следующий выход из положения. Асимптотика в канале a (b) характеризуется одной константой-амплитудой $q^{a(b)}$, модуль которой ограничен:

$$0 \le |q^{a(b)}| \le 1\ ;\ 0 \le \arg q^{a(b)} \le 2\pi. \tag{26}$$

Выберем пробную амплитуду q^a, удовлетворяющую (26), определим S^a, Φ^a, J^b. Решим (20) и найдем q^b. Критерием правильности выбора q^a может служить соотношение

$$\mathrm{Im}\, q^a = k_a |q^a|^2 + k_b \frac{m_a}{m_b} |q^b|^2 , \tag{27}$$

являющееся следствием закона сохранения числа частиц и полного момента. Кроме того, если по q^b найти S^b, Φ^b, J^a и решить (20), то мы должны получить q^a (из асимптотики χ).

Поскольку область определения ограничена (26), искомые амплитуды могут быть найдены последовательными испытаниями подобно подбору энергии при численном решении задачи на собственные значения.

5. Контроль точности расчетов

При решении дифференциальных уравнений на ЭВМ очень полезным для контроля точности расчетов является использование соотношений, связывающих значения функций и их производных в начале и конце отрезка интегрирования. Для однородных уравнений (или систем уравнений) такие соотношения получаются аналогично выводу формулы закона сохранения потока.

Умножим (20) на $\chi^{LM*}_{i\ell_1\ell_2}$ слева, а уравнение, сопряженное (20), - на $\chi^{LM}_{i\ell_1\ell_2}$ и вычтем из первого второе:

$$-\frac{1}{2m}\frac{d}{dR}\left(\chi^{LM*}_{i\ell_1\ell_2}\frac{d}{dR}\chi^{LM}_{i\ell_1\ell_2} - \chi^{LM}_{i\ell_1\ell_2}\frac{d}{dR}\chi^{LM*}_{i\ell_1\ell_2}\right) +$$

$$+\sum_{i'\ell_1'\ell_2'}\left(K^{LM}_{i\ell_1\ell_2 i'\ell_1'\ell_2'}\chi^{LM*}_{i\ell_1\ell_2}\chi_{i'\ell_1'\ell_2'} - K^{LM*}_{i\ell_1\ell_2 i'\ell_1'\ell_2'}\chi^{LM}_{i\ell_1\ell_2}\chi^{LM*}_{i'\ell_1'\ell_2'}\right) +$$

$$+\chi^{LM*}_{i\ell_1\ell_2} J^{LM}_{i\ell_1\ell_2} - \chi^{LM}_{i\ell_1\ell_2} J^{LM*}_{i\ell_1\ell_2} = 0. \tag{28}$$

Просуммируем (28) по $i\ell_1\ell_2$ (ℓ_1, ℓ_2, L должны удовлетворять правилу треугольника). Благодаря симметрии матрицы K, члены, содержащие коэффициенты K^{LM}, пропадут:

$$\frac{d}{dR}\sum_{\substack{i\ell_1\ell_2\\(\ell_1+\ell_2=L)}}\frac{i}{2m}\left(\chi^{LM*}_{i\ell_1\ell_2}\frac{d}{dR}\chi^{LM}_{i\ell_1\ell_2} - \chi^{LM}_{i\ell_1\ell_2}\frac{d}{dR}\chi^{LM*}_{i\ell_1\ell_2}\right) =$$

$$= 2\,\mathrm{Im} \sum_{i\ell_1\ell_2} \chi^{LM*}_{i\ell_1\ell_2} J^{LM}_{i\ell_1\ell_2} . \tag{29}$$

Суммарный поток не сохраняется ввиду того, что число частиц определенного сорта меняется при рассеянии. Интегрируя по R , получаем искомую формулу:

$$\sum_{\substack{i\ell_1\ell_2 \\ (\bar{\ell}_1+\bar{\ell}_2=\bar{L})}} \frac{i}{2m}\left(\chi^{LM*}_{i\ell_1\ell_2}\frac{d}{dR}\chi^{LM}_{i\ell_1\ell_2} - \chi^{LM}_{i\ell_1\ell_2}\frac{d}{dR}\chi^{LM*}_{i\ell_1\ell_2}\right) =$$

$$= 2\,\mathrm{Im}\int_0^R \sum_{i\ell_1\ell_2} \chi^{LM*}_{i\ell_1\ell_2} J^{LM}_{i\ell_1\ell_2}\, dR. \tag{30}$$

6. Система интегральных уравнений для реакций с перераспределением частиц

Рассмотрим задачу (1) рассеяния с участием трех частиц. Вычтем из волновой функции системы Ψ падающую плоскую волну $\Phi_0 = \phi_0^a(\rho_a)\, e^{i\bar{k}_0^a \bar{R}_a}$, где ϕ_0^a – функция основного связанного состояния пары в канале a . Разложим функцию $\Psi - \Phi_0$ по полному набору собственных функций гамильтониана на (3):

$$e^{i\bar{k}_a\bar{R}_a} \times \begin{cases} \phi_n^a(\bar{\rho}_a)\text{: } n - \text{номер уровня пары в канале } a \\ \phi^a_{\bar{q}_a}(\bar{\rho}_a) - \text{непрерывный спектр относительного} \\ \qquad\qquad \text{движения частиц 1 и 2} \end{cases} \tag{31}$$

$$\Psi - \Phi_0 = \sum_n \int a_n(\bar{k}_a)\, e^{i\bar{k}_a\bar{R}_a}\, \phi_n(\bar{\rho}_a)\, dk_a + \iint a(\bar{k}_a \bar{q}_a)\, e^{i\bar{k}_a\bar{R}_a} \phi_{q_a}(\rho)\, d\bar{q}_a\, d\bar{k}_a \tag{32}$$

Первый член в (32) справа соответствует сумме по дискретным состояниям относительного движения частиц 1 и 2; второй – разложению по функциям их непрерывного спектра.

Учитывая тот факт, что асимптотика канала полностью содержится во втором члене в правой части (32), разложим его по полному набору собственных функций гамильтониана H_b :

$$e^{i\bar{k}_b\bar{R}_b}\times\begin{cases}\phi^b_m(\bar{\rho}_b);\ m - \text{номер связанного состояния пары } (2+3)\\ \phi^b_{q_b}(\bar{\rho}_b) - \text{ непрерывный спектр пары } (2+3).\end{cases}\qquad(33)$$

Разложение для $\Psi-\Phi_0$ примет вид:

$$\Psi-\Phi_0=\Psi_1+\Psi_2+\Psi_3\ ,\qquad(34)$$

$$\Psi_1=\sum_n\int a_n(\bar{k}_\alpha)e^{i\bar{k}_\alpha\bar{R}_\alpha}\phi^\alpha_n d\bar{k}_\alpha,\qquad(35)$$

$$\Psi_2=\sum_m\int b_m(\bar{k}_b)e^{i\bar{k}_b\bar{R}_b}\phi^b_m d\bar{k}_b,\qquad(36)$$

$$\Psi_3=\iint b(\bar{k}_b\bar{q}_b)e^{i\bar{k}_b\bar{R}_b}\phi_{\bar{q}_b}d\bar{k}_b d\bar{q}_b.\qquad(37)$$

Функция $\Psi-\Phi_0$ подчиняется уравнению:

$$(E-H)(\Psi-\Phi_0)=V_\alpha\Phi_0.\qquad(40)$$

Подставим (34) в (40):

$$(E-H_\alpha-V_\alpha)\Psi_1+(E-H_b-V_b)(\Psi_2+\Psi_3)=V_\alpha\Phi_0.\qquad(41)$$

Умножим (41) слева на $\frac{1}{(2\pi)^3}e^{-i\bar{k}_\alpha\bar{R}_\alpha}\phi^\alpha_n(\bar{\rho}_\alpha)$, проинтегрируем по $d\bar{R}_\alpha d\bar{\rho}_\alpha$; учитывая, что $h_\alpha\phi^\alpha_n=\epsilon^\alpha_n\phi^\alpha_n$:

$$(E-\epsilon^\alpha_n-\frac{k^2_\alpha}{2m})a_n(\bar{k}_\alpha)-\frac{1}{(2\pi)^3}\sum_s\int a_s(\bar{k}'_\alpha)V_\alpha\phi^\alpha_n\phi^\alpha_s d\bar{k}'_\alpha d\bar{R}_\alpha d\rho_\alpha+$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^3}\sum_t\int b_t(\bar{k}'_b)e^{-i\bar{k}_\alpha\bar{R}_\alpha+i\bar{k}_b\bar{R}_b}\phi^\alpha_n\phi^b_t(E-\epsilon^b_t-\frac{k'^2_b}{2m_b}-V_b)d\bar{k}'_b d\bar{R}_\alpha d\bar{\rho}_\alpha+$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^3}\iint b(\bar{k}'_b;\bar{q}'_b)e^{i\bar{k}_\alpha\bar{R}_\alpha-i\bar{k}_b\bar{R}_b}(E-\epsilon^b_{q'}-\frac{k'^2_b}{2m_b}-V_b)\phi^\alpha_n\phi^b_q d\bar{k}'_b d\bar{q}'_b d\bar{R}_\alpha d\bar{\rho}_\alpha=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i(\bar{k}^\alpha_0-\bar{k}_\alpha)\bar{R}_\alpha}V_\alpha\phi^\alpha_n\phi^\alpha_0 d\bar{\rho}_\alpha d\bar{R}_\alpha.\qquad(42)$$

Умножим (41) слева на $\frac{1}{(2\pi)^3}e^{-i\bar{k}_b\bar{R}_b}\phi^b_m(\bar{\rho}_b)$ и проинтегрируем по $d\bar{R}_b d\bar{\rho}_b$, получим:

$$(E-\epsilon^b_m-\frac{k_b^2}{2m_b})b_m(\bar{k})-\sum_s\int b_s(\bar{k}'_b)\frac{e^{i(\bar{k}'_b-\bar{k}_b)\bar{R}_b}}{(2\pi)^3}V_b\,\phi^b_m\phi^b_s\,dk'_b\,d\rho_b\,d\bar{R}_b+$$

$$+\sum_t\int a_t(\bar{k}'_a)\frac{1}{(2\pi)^3}e^{-i\bar{k}_b\bar{R}_b+i\bar{k}'_a\bar{R}_a}\phi^b_m\phi^a_t(F-\epsilon^a_t-\frac{k'^2_a}{2m_a}-V_a)\,d\bar{k}'_a\,d\bar{\rho}_b\,d\bar{R}_b+$$

$$+\iint b(\bar{k}'_b;\bar{q}'_b)\frac{e^{i(\bar{k}'_b-\bar{k}_b)\bar{R}_b}}{(2\pi)}\phi^b_m\phi^b_{q'}(E-\epsilon^b_{q'}-\frac{k'^2_b}{2m^2_b}-V_b)\,d\bar{k}'_b\,d\bar{q}'_b\,d\bar{R}_b\,d\bar{\rho}_b=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\bar{k}^a_0\bar{R}_a-i\bar{k}_b\bar{R}_b}V_a\,\phi^b_m\phi^a_0\,d\bar{\rho}_b\,d\bar{R}_b\,. \qquad (43)$$

Умножим (41) слева на $\frac{1}{(2\pi)^3}e^{-i\bar{k}''_b\bar{R}_b}\phi^b_{\bar{q}_b}(\bar{\rho}_b)$ и проинтегрируем по $d\bar{R}_b\,d\bar{\rho}_b$:

$$(E-\epsilon^b_q-\frac{k''}{2m})b(k''_b;q_b)-\int b(\bar{k}'_b;\bar{q}'_b)\frac{e^{i(\bar{k}'_b-\bar{k}''_b)\bar{R}_b}}{(2\pi)^3}V_b\,\phi^b_{\bar{q}}\phi^b_{\bar{q}'}d\bar{k}''_b\,d\bar{q}'_b\,d\bar{R}_b\,d\bar{\rho}_b+$$

$$+\sum_s\int a_s(k'_a)\frac{e^{-i\bar{k}''_b\bar{R}_b+i\bar{k}'_a\bar{R}_a}}{(2\pi)^3}\phi^b_q\phi^a_s(F-\epsilon^a_s-\frac{k'^2_a}{2m_a}-V_a)\,d\bar{k}'_a\,d\bar{R}_b\,d\bar{\rho}_b+$$

$$+\sum_t\int b_t(R'_b)\frac{e^{i(\bar{k}'_b-\bar{k}''_b)\bar{R}_b}}{(2\pi)^3}\phi^b_q\phi^b_t(F-\epsilon^b_t-\frac{k'^2_b}{2m_b}-V_b)\,d\bar{k}'_b\,d\bar{R}_b\,d\bar{\rho}_b=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\bar{k}^0_a\bar{R}_a-i\bar{k}''_b\bar{R}_b}V_a\,\phi^b_{\bar{q}'}\phi^a_0\,d\bar{\rho}_b\,d\bar{R}_b\,. \qquad (44)$$

Из вида уравнений (42), (43), (44) следует, что $a_n(\bar{k}_a)$ и $b_m(\bar{k}_b)$ имеют полюсный вид на "энергетической поверхности" (пусть энергия недостаточна для развала пар):

$$a_n(\bar{k}_a)\approx\frac{A_n}{\frac{k^{a2}_n}{2m_a}-\frac{k^2_a}{2m_a}}\quad\text{при}\quad k^2_a\ \text{близких}\ k^{a\,2}_n=2m_a(F-\epsilon^a_n)$$

$$b_m(\bar{k}_b)\approx\frac{A_m}{\frac{k^{b\,2}_m}{2m_b}-\frac{k^2_b}{2m_b}}\quad\text{при}\quad k^2_b\ \text{близких}\ k^{b\,2}_m=2m_b(F-\epsilon^b_m) \qquad (45)$$

$A_n\,(B_n)$ – амплитуды рассеяния в канале a (b).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Выбор функции источника S

Разложим $F(\bar{R})$ и $S(\bar{R})$ по сферическим гармоникам:

$$F(R) = \sum_{\ell} \frac{f_{\ell}(R)}{R} Y_{\ell m}\left(\frac{\bar{R}}{R}\right); \qquad (A.1)$$

$$S(R) = \sum_{\ell} \frac{S_{\ell}(R)}{R} Y_{\ell m}\left(\frac{\bar{R}}{R}\right). \qquad (A.2)$$

Функции f удовлетворяют уравнениям:

$$\left(-\frac{1}{2m}\frac{d^2}{dR^2} + \frac{\ell_2(\ell_2+1)}{2mR^2} + \epsilon_0 - F\right) f_{\ell}(R) = S_{\ell}(R). \qquad (A.3)$$

Выразим f_{ℓ} через линейно-независимые решения $q_{1,2}$ однородного уравнения:

$$\left(-\frac{1}{2m}\frac{d^2}{dR^2} + \frac{\ell_2(\ell_2+1)}{2mR^2} + \epsilon_0 - E\right) q_{\ell}(R) = 0. \qquad (A.4)$$

Пусть $q_{1\ell} = kRj_{\ell}(kR); q_{2\ell} = Rn_{\ell}(kR)$, где $j_{\ell}; n_{\ell}$ – сферические функции Бесселя и Неймана.

Для f_{ℓ} имеем:

$$f_{\ell} = g_{2\ell}\int_0^R g_{1\ell}\, s_{\ell}\, dR + g_{1\ell}\int_R^{\infty} g_{2\ell}\, s_{\ell}\, dR + C_1^{\ell} g_{1\ell} + C_2^{\ell} g_{2\ell}. \qquad (A.6)$$

Потребуем, чтобы $f_{\ell}(0) = 0$. Отсюда следует, что $C_2^{\ell} = 0$. Если выбрать s_{ℓ} так, чтобы брался неопределенный интеграл от произведения $g \cdot s$, мы будем иметь f_{ℓ} в аналитическом виде.

Воспользуемся формулой (5.52) из таблиц Градштейна и Рыжика

$$\int x^{p+1} Z_p(x)\, dx = x^{p+1} Z_{p+1}(x), \qquad (A.7)$$

где Z_p - произвольная цилиндрическая функция.

Выберем согласно (A.7) в виде:

$$s_{\ell} = \begin{cases} A_{\ell} R^{\ell+1} & \text{при } R \le a \\ 0 & \text{при } R > a \end{cases} \qquad (A.8)$$

Подставим (A.8) в (A.6), получим:

$$f_\ell = A_\ell\, g_{2\ell} \begin{cases} k^{1/2} R^{\ell+1} j_{\ell+1}(kR) & \text{при} \quad R \le a \\ k^{1/2} a^{\ell+1} j_{\ell+1}(ka) & \text{при} \quad R > a \end{cases} + A_\ell \frac{g_{1\ell}}{k^{1/2}} \begin{cases} a^{\ell+1} n_{\ell+1}(ka) - R^{\ell+1} n_{\ell+1}(kR) & \text{при} \quad R \le a \\ 0 & \text{при} \quad R > a \end{cases}$$
$$+ C_1^\ell k^{3/2} j_\ell(kR). \tag{A.9}$$

Аналитический вид f_ℓ при больших R, согласно (A.9):

$$f_\ell = A_\ell\, a^{\ell+1} k^{1/2} j_{\ell+1}(ka) \sin\left(kR - \frac{\pi(\ell+1)}{2}\right) + C_1^\ell\, k \sin\left(kR - \frac{\pi\ell}{2}\right). \tag{A.10}$$

При фиксированном значении a, которое разумно выбрать равным линейному размеру области взаимодействия частиц, изменение A_ℓ и C_1^ℓ позволяет получить любую требуемую для конкретных задач асимптотику f_ℓ, например, (21).

ПРИЛОЖЕНИЕ B

Получение физического решения системы неоднородных дифференциальных уравнений

Полезно привести здесь стандартную процедуру сведения задачи с граничными условиями, заданными на разных концах отрезка интегрирования 0 и $R_{\text{конеч.}}$ к задаче с граничными условиями в нуле.

Рассмотрим сначала одно неоднородное уравнение:

$$L f = J, \tag{B.1}$$

где L – линейный дифференциальный оператор второго порядка. Так как L действительный оператор, а J может быть комплексной функцией, уравнение (B.1) эквивалентно системе

$$L f_1 = \mathrm{Re}\, J;$$

$$L f_2 = \mathrm{Im}\, J; \quad f_1 \equiv \mathrm{Re}\, f; \quad f_2 \equiv \mathrm{Jm}\, f. \tag{B.2}$$

Общее решение (B.1) равно сумме общего решения однородного уравнения:

$$L \phi = 0 \tag{B.3}$$

и частного решения (B.1).

Для получения общего решения (B.3) решаем (аналитически или численно) (B.3) с двумя линейно-независимыми граничными условиями, например :

$$1)\quad \begin{pmatrix}\phi\\ \phi'\end{pmatrix}_{R=0} = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix};\quad 2)\quad \begin{pmatrix}\phi\\ \phi'\end{pmatrix}_{R=0} = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} \tag{B.4}$$

Линейную комбинацию решений ϕ_1 и ϕ_2 с произвольными константами C_1 и C_2 складываем с частным решением (B.2), полученным, например, с граничным условием:

$$\begin{pmatrix}f_1\\ f'_1\end{pmatrix}_{R=0} = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}f_2\\ f'_2\end{pmatrix}_{R=0} = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} \tag{B.5}$$

Общее решение (B.1) будет:

$$f = f_1 + i f_2 + C_1 \phi_1 + C_2 \phi_2 . \tag{B.6}$$

Искомое физическое решение получаем из (B.6) выбором констант C_1 и C_2. Если f должна обращаться в нуль при $R=0$, C_2 должна быть равна нулю. В задачах с ограниченной областью взаимодействия f_1 ; f_2 ; ϕ_1 имеют асимптотический вид:

$$f_1 \approx A_1 \cos kR + B_1 \sin kR \equiv \frac{A_1 - iB_1}{2} e^{ikR} + \frac{A_1 + iB_1}{2} e^{-ikR}, \tag{B.7}$$

$$f_2 \approx A_2 \cos kR + B_2 \sin kR \equiv \frac{A_2 - iB_2}{2} e^{ikR} + \frac{A_2 + iB_2}{2} e^{-ikR}, \tag{B.8}$$

$$\phi_1 \approx a \cos kR + b \sin kR \equiv \frac{a - ib}{2} e^{ikR} + \frac{a + ib}{2} e^{-ikR}, \tag{B.9}$$

где A_i ; B_i ; a , b – известные действительные числа, получаемые при численном интегрировании (B.2), (B.3).

Граничное условие на f при больших R заключающееся, например, в требовании отсутствия волны e^{-ikR} в асимптотике f определяет C_1 :

$$\begin{aligned} &A_1 - B_2 + a\,\mathrm{Re}\,C_1 - b\,\mathrm{Im}\,C_1 = 0 \\ &B_1 + A_2 + b\,\mathrm{Re}\,C_1 + a\,\mathrm{Im}\,C_1 = 0 . \end{aligned} \tag{B.10}$$

Аналогично может быть получено решение системы неоднородных уравнений второго порядка:

$$L_i f_i + \sum_{j=1}^{n} K_{ij} f_j = S_i ; \quad (i = 1,2, \ldots n). \tag{B.11}$$

Для этого нужно получить 2n линейно-независимых решений однородной системы

$$L_i \phi_i + \sum_{j=1}^{n} K_{ij} \phi_j = 0 \tag{B.12}$$

с граничными условиями, например :

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_1' \\ \phi_2 \\ \phi_2' \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}_{R=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}_1 ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}_2 ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}_3 \quad \text{и т. д.} \tag{B.13}$$

и частное решение f_i неоднородной системы (B.11). Общее решение системы (B.11) запишется в виде:

$$f_i = C_1 \phi_i^{(1)} + C_2 \phi_i^{(2)} + \ldots + C_{2n} \phi_i^{(2n)} + f_i \quad (i = 1,2, \ldots 2n). \tag{B.14}$$

Константы $C_1 \ldots C_{2n}$ определяются из $2n$ физических граничных условий.

В заключение авторы благодарят В.К. Лукьянова, И. Петкова, В.Б. Беляева, О. Лхагва, Ю.Н. Фенина, Б.Н. Калинкина за полезные дискуссии, связанные с темой данной работы.

Литература

1. Б.А. Липман, Ю. Швингер. Phys. Pev., 79, 469 (1950).
2. Л.Д. Фаддеев,. Теория рассеяния для системы из трех частиц. ЖЭТФ, 39, 1459 (1960).
3. S. Weinberg. Систематическое решение задач многочастичного рассеяния. Phys. Rev., 133, B232, 1964. V. A. Alessandrini. Уравнение фаддеевского типа для проблемы четырех тел. J. of Math. Phys. 7, 315 (1966).
4. Г.Фешбах. Единая теория ядерных реакций. Ann of Phys. 5, 357 (1958);19, 287 (1962).
5. F. S. Levin. Система связанных уравнений для столкновения с перераспределением Phys. Rev., 141 N3, 858, 1966.
6. M. Coz. Проекционные операторы для столкновения с перераспределением, Ann. of Phys., 35, 53 (1966). Y. Hahn. Проекционные операторы в единой теории реакций. Phys. Rev., 142, 603 (1966). M. Mittelman. Ann. of Phys. 28, 430 (1964).

7. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Квантовая механика, § 21, стр. 80. Физматгиз, Москва, 1963.

8. Г.Ф. Друкарев. Теория столкновений электронов с атомами, стр. 82, Физматгиз, Москва, 1963.

Рукопись поступила в издательский отдел
18 октября 1966 г.