объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р4 - 13047

Д.Д.Бакалов

КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ μ-МЕЗОАТОМОВ ИЗОТОПОВ ВОДОРОДА

Направлено в "Physics Letters"

1980

I. ВВЕДЕНИЕ

При остановке μ^--мезонов в смеси изотопов водорода происходит ряд интересных явлений[1]. Быстрые μ^--мезоны /10-100 кэВ/ теряют свою энергию в столкновениях с молекулами смеси и образуют μ-мезоатомы в высоковозбужденных состояниях, которые затем переходят в основное состояние $1s\sigma$ путем выбрасывания оже-электронов и радиационных переходов[1]. Хотя все эти процессы не полностью изучены в деталях, установленным считается тот факт, что в сумме они занимают время $\sim 10^{-10}$ с, что намного меньше времени жизни мюонов $\tau_\mu \sim 2\cdot 10^{-6}$ с. Это означает, что по существу основное состояние μ^--мезоатомов является начальным состоянием системы по отношению ко всей совокупности последующих конкурирующих друг с другом процессов:

1/ электромагнитных - орто-параперехода в мезоатоме, переход μ^--мезона к тяжелым ядрам, образование μ-мезомолекул;

2/ слабых - μ^--захват протонами ядер, μ^--распад;

3/ сильных - ядерный синтез в образовавшихся мезомолекулах.

Скорости многих из них сильно зависят от структуры уровней энергии мезоатомов.

μ-мезоатомы изотопов водорода во многом аналогичны обычным атомам; в то же время кроме их конечного времени жизни они имеют следующие особенности:

I. Так как масса μ^--мезона в $g \sim 200$ раз больше массы электрона, относительный вклад релятивистских поправок к кулоновским уровням энергии возрастает в g раз и становится существенным в пределах требуемой точности /$\lesssim 5\cdot 10^{-3}$ эВ/ решения задачи о кинетике всей совокупности процессов 1-3/.

II. Из-за малых размеров μ-мезоатомов /$\sim 10^{-11}$ см/ конечные электромагнитные размеры ядер также оказываются важными.

Для описания эффектов I и II в настоящей работе используется квазипотенциальное уравнение Тодорова[2] для двух спиновых частиц с электромагнитным взаимодействием /§2/. Выписаны в координатном представлении приближенные /с точностью до членов $\sim \alpha^2$ включительно/ уравнения для пар /тождественных или разных/ частиц со спинами $(1/2,\ 1/2)$, $(1,\ 1/2)$ и $(1,1)$ /§3/. На основе данных из работ[6,7,8] построена удобная для вычислений аппроксимация электромагнитных формфакторов протона, дейтрона и тритона и вычислены первые неисчезающие релятивистские и связанные с конечными размерами ядер поправки к основному уровню энергии hfs мезоатомов $p\mu^-$, $d\mu^-$ и $t\mu^-$ /§4/.

2. КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТОДОРОВА

Амплитуда упругого рассеяния частицы 1 с массой m_1 и спином s_1 на частице 2 с массой m_2 и спином s_2 связана с S-матрицей равенством

$$\langle p_1\xi_1 p_2\xi_2|S|q_1\eta_1 q_2\eta_2\rangle = \langle p_1\xi_1 p_2\xi_2|q_1\eta_1 q_2\eta_2\rangle$$
$$+i(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2-q_1-q_2)T(p_1\xi_1, p_2\xi_2, q_1\eta_1, q_2\eta_2),$$

где $p_i(q_i)$ и $\xi_i(\eta_i)$ - конечный /начальный/ 4-импульс i-ой частицы и проекция ее спина на фиксированную ось; нормировка одночастичных состояний выбрана в виде

$$\langle p_i\xi_i|q_i\eta_i\rangle = (2\pi)^3 2p_i^\circ\delta^{(3)}(\vec{p}_i-\vec{q}_i)\delta_{\xi_i\eta_i},$$
$$p_i^\circ = \sqrt{\vec{p}_i^{\,2}+m_i^2}.$$

Введем импульсы центра масс и относительного движения двух частиц:

$$P=p_1+p_2;\; Q=q_1+q_2;\; p=\frac{E_2}{w}p_1-\frac{E_1}{w}p_2;\quad q=\frac{E_2}{w}q_1-\frac{E_1}{w}q_2,$$

где

$$w=\sqrt{P^2},\; E_i=\frac{1}{w}(Pp_i)=\frac{1}{w}(Pq_i),\quad i=1,2.$$

В системе центра масс /с.ц.м./ $\vec{P}=0$; w является энергией системы, $p=(0,\vec{p})$, $q=(0,\vec{q})$.

На массовой поверхности

$$\vec{p}^{\,2}=\vec{q}^{\,2}=b^2(w)=\frac{w^4-2w^2(m_1^2+m_2^2)+(m_1^2-m_2^2)^2}{4w^2}$$

и амплитуда рассеяния зависит от следующих переменных:

$$T(p_1\xi_1, p_2\xi_2, q_1\eta_1, q_2\eta_2)=T_{\xi_1\xi_2\eta_1\eta_2}(\vec{p},\vec{q};w).$$

Квазипотенциальное уравнение Тодорова/2/ является уравнением типа Липмана-Швингера для амплитуды рассеяния, соответствующим симметричному выходу за массовую поверхность $p_1^2-p_2^2=q_1^2-q_2^2=m_1^2-m_2^2$. В с.ц.м. оно записывается в виде

$$T_{\xi_1\xi_2\eta_1\eta_2}(\vec{p},\vec{q};w)+\mathcal{V}_{\xi_1\xi_2\eta_1\eta_2}(\vec{p},\vec{q};w)+$$
$$+\sum_{\nu_1=-s_1}^{s_1}\sum_{\nu_2=-s_2}^{s_2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}T_{\xi_1\xi_2\nu_1\nu_2}(\vec{p},\vec{k};w)\frac{\kappa}{2w}\frac{1}{\vec{k}^2-b^2-i0}\mathcal{V}_{\nu_1\nu_2\eta_1\eta_2}(\vec{k},\vec{q};w), \qquad /1/$$

где $\kappa=1$ для различных и $\kappa=\frac{1}{2}$ для тождественных частиц. Квазипотенциал $\mathcal{V}$ определяется при любом заданном лагранжиане взаимодействия из требования, чтобы перенормированный ряд теории возмущения для амплитуды рассеяния

$$T=T^{(1)}+T^{(2)}+\ldots \qquad /2/$$

удовлетворял квазипотенциальному уравнению на массовой поверхности тождественно. В предположении существования аналогичного ряда для квазипотенциала это фиксирует квазипотенциал на массовой поверхности вплоть до того же порядка, до которого построен ряд /2/; в частности,

$$\mathcal{V}^{(1)}=-T^{(1)}. \qquad /3/$$

Введем волновую функцию:

$$\Phi_{\xi_1\xi_2\eta_1\eta_2}(\vec{p};w_q)=(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q})\bar{u}^{(1)}_{\xi_1}(\vec{p})\bar{u}^{(2)}_{\xi_2}(-\vec{p})u^{(1)}_{\eta_1}(\vec{q})u^{(2)}_{\eta_2}(-\vec{q})$$
$$+\frac{\kappa}{2w_q}\frac{1}{\vec{p}^2-b^2(w_q)-i0}T_{\xi_1\xi_2\eta_1\eta_2}(\vec{p},\vec{q};w_q). \qquad /4/$$

Здесь $w_q=\sqrt{m_1^2+\vec{q}^{\,2}}+\sqrt{m_2^2+\vec{q}^{\,2}}$, амплитуда $u^{(i)}_\lambda$, $\lambda=-s_i,\ldots,s_i$, $i=1,2$, решение уравнения свободного поля частицы i с третьей проекцией спина λ есть вектор поляризации в случае спина 1, дираковский спинор, если спин 1/2, или константа - в бесспиновом случае; соответственно черта над символом амплитуды означает эрмитово, дираковское или комплексное сопряжения. Из уравнения /1/ следует, что Φ удовлетворяет однородному уравнению

$$(\vec{p}^2-b^2(w))\Phi_{\xi_1\xi_2\eta_1\eta_2}(\vec{p},w)+\frac{\kappa}{2w}\sum_{\nu_1\nu_2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\mathcal{V}_{\xi_1\xi_2\nu_1\nu_2}(\vec{p},\vec{k})\Phi_{\nu_1\nu_2\eta_1\eta_2}(\vec{k},w)=0, \qquad /5/$$

или в символической записи: $(\vec{p}^{\,2}-b^2+\frac{\kappa}{2w}\mathcal{V})\Phi=0$. В задачах электродинамики его естественно записать в явно калибровочно-инвариантном виде:

$$((E-V^\circ)^2-(\vec{p}-\vec{V})^2-m_w^2-V^c)\Phi=0;\quad m_w=\frac{m_1m_2}{w},\; E^2-b^2=m_w^2. \qquad /6/$$

Для квазипотенциалов V°, $\vec{V}$ и V^c предполагается существование разложения типа /2/ в ряд по константе связи α; в любом порядке /не превышающем точность построения $\mathcal{V}$ / они определяются /неоднозначно/ из требования совпадения вплоть до этого порядка разложений для операторов в левой и правой стороне равенства

$$(E^2 - m_w^2 - 2EV^\circ + (V^\circ)^2 - \vec{p}^{\,2} + \{\vec{p}, \vec{V}\} - \vec{V}^2 - V^c)\Phi =$$

$$= -(\vec{p}^{\,2} - b^2 + \frac{\kappa}{2w}\tilde{C})\Phi_w .$$

В результате ввода обозначений /спиновые индексы опущены/

$$\tilde{U}(\vec{p}, \vec{q}; w) = 2EV^\circ(\vec{p}, \vec{q}; w) - (V^\circ)^2 - (\vec{p} + \vec{q}) \cdot \vec{V}(\vec{p}, \vec{q}; w) + \qquad /7/$$

$$+ \vec{V}^2 + V^c(p, q, w)$$

уравнение /6/ записывается в виде, аналогичном /5/, но с заменой $\tilde{C}$ на U. После деления на $2E$ имеем:

$$\sum_{\nu_1\nu_2} \{(\frac{1}{2E}\vec{p}^{\,2} - \frac{b^2}{2E})\delta_{\xi_1\nu_1}\delta_{\xi_2\nu_2} + \frac{\kappa}{4Ew}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\tilde{U}_{\xi_1\xi_2\nu_1\nu_2}(\vec{p}, \vec{k}; w)\}\Phi_{\nu_1\nu_2\eta_1\eta_2}(\vec{k}, w) = 0. \qquad /8/$$

В случае, когда $\tilde{U}(\vec{p}, \vec{q}; w) = \tilde{U}^{(\ell)}(\vec{p} - \vec{q}; w) + \tilde{U}^{(p)}(\vec{p} + \vec{q}; w)$, /8/ эквивалентно /псевдо/локальному уравнению в координатном пространстве .

$$(-\frac{1}{2E}\Delta - \frac{b^2}{2E})\phi_{\xi_1\xi_2\eta_1\eta_2}(\vec{r}; w) + \frac{\kappa}{4Ew}\sum_{\nu_1\nu_2}(U^{(\ell)}_{\xi_1\xi_2\nu_1\nu_2}(\vec{r}; w) + \qquad /9/$$

$$+ U^{(p)}_{\xi_1\xi_2\nu_1\nu_2}(\vec{r}, w)\hat{I})\phi_{\nu_1\nu_2\eta_1\eta_2}(\vec{r}; w) = 0,$$

где

$$U^{(p,\ell)}_{\xi_1\xi_2\nu_1\nu_2}(\vec{r}; w) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, \tilde{U}^{(p,\ell)}_{\xi_1\xi_2\nu_1\nu_2}(\vec{k}; w);$$

$$\phi_{\nu_1\nu_2\eta_1\eta_2}(\vec{r}; w) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{r}}\, \Phi_{\nu_1\nu_2\eta_1\eta_2}(\vec{k}; w); \quad (\hat{I}\phi)(\vec{r}, w) = \phi(-\vec{r}, w).$$

Уравнение /9/ является релятивистским обобщением уравнения Шредингера; построению U в явном виде для конкретных задач посвящен следующий параграф.

3. ПРИБЛИЖЕННОЕ /С ТОЧНОСТЬЮ ДО ЧЛЕНОВ $\sim\alpha^2$ ВКЛЮЧИТЕЛЬНО/ РЕЛЯТИВИСТСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ДВУХ ЧАСТИЦ СО СПИНАМИ 1/2 ИЛИ 1

Описание энергетического спектра μ -мезоатомов изотопов водорода необходимо провести /как отмечалось во введении/ с точностью не хуже $5\cdot 10^{-3}$ эВ. Поэтому при построении квазипотенциала U в /7/ можно ограничиться * членами $\sim\alpha^2$, что в силу /3/ соответствует учету борновской диаграммы в ряде /2/ для амплитуды рассеяния. Воспользуемся общим выражением для борновской амплитуды T^B:

$$T_{\xi_1\xi_2\eta_1\eta_2}(\vec{p}, \vec{q}; w) = +\frac{g^{\mu\nu}}{k^2}\langle\vec{p}\xi_1|J^{(1)}_\mu(k)|\vec{q}\eta_1\rangle\langle-\vec{p}\xi_2|J^{(2)}_\nu(-k)|-\vec{q}\eta_2\rangle, \qquad /10/$$

$$k = p - q,$$

и общими релятивистски-ковариантными выражениями для матричных элементов операторов электромагнитного тока частиц 1 и 2. В случае частиц со спином $s = 1/2, 1$ имеем /в единицах $\hbar = c = 1$ /:

<u>s = 1/2</u>

$$\langle p\xi|J_\mu|q\eta\rangle = Ze\,\bar{u}_\xi(\vec{p})[\gamma_\mu F_1(k^2) + \frac{(\mu-1)}{4m}k^\nu[\gamma_\nu, \gamma_\mu]F_2(k^2)]u_\eta(\vec{q}),$$

где $F_1(k^2)$ и $F_2(k^2)$- нормированные на единицу дираковский и паулиевский формфакторы частицы с массой m, зарядом Ze, дипольным магнитным моментом μ и спином 1/2, а $u_\eta(q)$ и $\bar{u}_\xi(p)$- - дираковские спиноры [3].

<u>s = 1</u>

$$\langle p\xi|J_\mu|q\eta\rangle = Ze(\bar{u}_\xi(\vec{p}))_\rho((-F_1(k^2)g^{\rho\sigma} + \frac{1}{2m^2}(m^2Q + \mu - 1)F_3(k^2)\times$$

$$\times(k^\rho k^\sigma - \frac{k^2}{3}g^{\rho\sigma}))(p+q)_\mu + \mu F_2(k^2)(g^{\nu\sigma}\delta^\rho_\mu - g^{\nu\rho}\delta^\sigma_\mu)k_\nu)(u_\eta(\vec{q}))_\sigma ,$$

где $F_1(0) = F_2(0) = F_3(0) = 1$, а m, Ze, μ и Q- масса, заряд, магнитный дипольный и электрический квадрупольный моменты частицы со спином 1 [4], $u_\eta(\vec{q})$ и $u_\xi(\vec{p})$, $\xi, \eta = -1, 0, 1$, - 4-векторы поляризации начального и конечного состояний.

В конкретных расчетах удобно использовать выражение /10/ для T^B, в котором устранены лишние степени свободы. С учетом условия поперечности выражение для вектора поляризации $u_\eta(\vec{q})$ частицы со спином 1 через тот же вектор в системе покоя частицы $u_\eta(\vec{0}) = (0, \vec{\epsilon}_\eta)$ имеет вид:

$$(u_\eta(0))_0 = \frac{1}{m}(\vec{q}\cdot\vec{\epsilon}_\eta); \quad u_\eta(0) = \vec{\epsilon}_\eta + \frac{(\vec{q}\cdot\vec{\epsilon}_\eta)}{m(q^\circ + m)}\vec{q}; \quad q^\circ = \sqrt{m^2 + \vec{q}^{\,2}},$$

где $\vec{\epsilon}_\eta$ - собственные 3-векторы 3-й проекции оператора спина

---

* Принимая во внимание, что аномально большая поправка следующего порядка на поляризацию вакуума уже известна [5].

в системе покоя: $S_3^{(1)}\vec{\epsilon}_\eta=\eta\vec{\epsilon}_\eta$; $(S_i^{(1)})_{jk}=-i\epsilon_{ijk}$, $i,j,k=1,2,3$. Аналогично в представлении γ-матриц с $\gamma_0=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ положительно-энергетический дираковский спинор $u_\eta(\vec{q})$ имеет вид /$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$/

$$u_\eta(\vec{q}) = \begin{pmatrix} \sqrt{q_0+m}\; e_\eta \\ \sqrt{q_0-m}\; \dfrac{(\vec{q}\vec{\sigma})}{\vec{q}^2} e_\eta \end{pmatrix}, \quad q_0=\sqrt{\vec{q}^2+m^2},$$

где $\vec{\sigma}$ - матрицы Паули, а e_η - собственные 2-спиноры третьей проекции оператора спина $\vec{S}^{(1/2)}$: $S_3^{(1/2)}e_\zeta=\zeta e_\zeta$, $\zeta=\pm\frac{1}{2}$, $S^{(1/2)}=\frac{1}{2}\sigma$.

В выражениях для матричных элементов операторов тока в рамках двух- или трехмерного формализма, необходимых для построения T^B, в принятом приближении $O(\alpha^2)$ достаточно сохранить лишь степени импульсов не выше второй /что видно при переходе к мезоатомным единицам $e^{(a)}=\hbar^{(a)}=1$ по формулам $\vec{p}_i=\alpha E\vec{p}_i^{(a)}$, $b^2=\alpha^2E^2b^{(a)2}$ и т.д. ($\alpha=4\pi e^2$). Это приводит соответственно к:

$$\langle\vec{p}\xi|J_0|\vec{q}\eta\rangle = e_\xi^*\left(2E'F_1 - \frac{\vec{k}^2}{4m}(F_1+2F_2) + \frac{i}{m}(F_1+2F_2)(\vec{p}\times\vec{q})\cdot\vec{S}\right)e_\eta,$$

$$\langle\vec{p}\xi|\vec{J}|\vec{q}\eta\rangle = e_\xi^*\left(-F_1(\vec{p}+\vec{q})+2i(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{S}(F_1+F_2)\right)e_\eta$$

для частиц со спином 1/2 или к:

$$\langle\vec{p}\xi|J_0|\vec{q}\eta\rangle = \vec{\epsilon}_\xi^*(2E'\cdot F_1)\vec{\epsilon}_\eta + \frac{1}{m}(F_2-F_1)(2(\vec{\epsilon}_\xi^*\vec{p})(\vec{\epsilon}_\eta\vec{q}) -$$

$$-(\vec{\epsilon}_\xi^*\vec{p})(\vec{\epsilon}_\eta\vec{p})-(\vec{\epsilon}_\xi^*\vec{q})(\vec{\epsilon}\vec{q})) + \frac{1}{m}F_3\left((\vec{\epsilon}_\xi^*\vec{k})(\vec{\epsilon}_\eta\vec{k}) - \frac{\vec{k}^2}{3}(\vec{\epsilon}_\xi^*\vec{\epsilon}_\eta)\right),$$

$$\langle\vec{p}\xi|\vec{J}|\vec{q}\eta\rangle = (\vec{p}+\vec{q})F_1(\vec{\epsilon}_\xi^*\vec{\epsilon}_\eta) + F_2\left(\vec{\epsilon}_\eta(\vec{\epsilon}_\xi^*\vec{k}) - \vec{\epsilon}_\xi^*(\vec{\epsilon}_\eta\vec{k})\right),$$

$$\vec{k}=\vec{p}-\vec{q}, \quad E'=\sqrt{\vec{p}^2+\vec{m}^2}$$

для частиц со спином 1.

Далее, следуя описанной в §2 процедуре и не выписывая промежуточных результатов из-за недостатка места, укажем лишь, что в согласии с [2] неоднозначность при построении 4-векторного квазипотенциала снята наложением условий

$$V^\circ(\vec{p},\vec{q};w)_{\xi_1\xi_2\eta_1\eta_2} = \frac{4\pi Z_1Z_2\alpha}{k^2}F_1^{(1)}(-\vec{k}^2)F_1^{(2)}(-\vec{k}^2)\delta_{\xi_1\eta_1}\delta_{\xi_2\eta_2},$$

$$\vec{V}(\vec{p},\vec{q};w)_{\xi_1\xi_2\eta_1\eta_2} = \frac{4\pi Z_1Z_2\alpha(\vec{p}+\vec{q})}{(\vec{p}+\vec{q})^2}F_1^{(1)}(-\vec{k}^2)F^{(2)}(-\vec{k}^2)\delta_{\xi_1\eta_1}\delta_{\xi_2\eta_2}.$$

Полученное в §2 уравнение типа /8/ удобно преобразовать в уравнении для волновой функции

$$\Psi_{\eta_1\eta_2}(\vec{q},w) = \sum_{\xi_1=-s_1}^{s_2}\sum_{\xi_2=-s_2}^{s_2} u_{\xi_1}(\vec{0})u_{\xi_2}(\vec{0})\Phi_{\xi_1\xi_2\eta_1\eta_2}(\vec{q},w). \qquad /11/$$

Перед тем как выписать это уравнение в координатном представлении, необходимо ввести следующие обозначения:

$$f_{ij}(r)=r\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{i\vec{k}\vec{r}}F_i^{(1)}(-\vec{k}^2)F_j^{(2)}(-\vec{k}^2)\frac{4\pi}{\vec{k}^2}, \quad \bar{f}_{ij}(r)=\frac{1}{r^3}(f_{ij}-rf'_{ij});$$

$$/12/$$

$$\bar{\bar{f}}_{ij}(r)=\frac{1}{r^3}\left(f_{ij}-rf'_{ij}+\frac{r^2}{3}f''_{ij}\right), \quad \hat{f}_{ij}(r)=-\frac{f''_{ij}}{r}+4\pi f_{ij}(0)\delta^{(3)}(\vec{r}),$$

а также $\vec{L}=-i\vec{r}\times\nabla_{\vec{r}}$ и $(\vec{S}_i T\vec{S}_j)=\dfrac{3(\vec{r}\vec{S}_i)(\vec{r}\vec{S}_j)}{\vec{r}^2}-(\vec{S}_i\vec{S}_j)$.

Тогда приближенное /с точностью до членов $O(\alpha^2)$ включительно/ квазипотенциальное уравнение для двух нетождественных частиц со спинами $S_{1,2}\le 1$ с электромагнитным взаимодействием имеет вид:

$$\{(-\frac{1}{2E}\Delta_{\vec{r}}-\frac{b^2}{2E}+\frac{Z_1Z_2\alpha}{r})+\frac{Z_1Z_2\alpha}{r}(f_{11}-1)-\frac{1}{2m}\left(\frac{Z_1Z_2\alpha f_{11}}{r}\right)^2 \qquad /13/1,2,3/$$

$$-\frac{Z_1Z_2\alpha}{4m_1m_2}[\hat{f}_{11}+\frac{2s_1}{2s_1+1}\cdot\frac{m_2}{m_1}(\epsilon_1\hat{f}_{11}+\frac{1}{s_1}(\mu_1-\delta_1)\hat{f}_{21})+ \qquad /13.4/$$

$$+\frac{2s_2}{2s_2+1}\;\frac{m_1}{m_2}(\epsilon_2\hat{f}_{11}+\frac{\mu_2-\delta_2}{s_2}\hat{f}_{12})]$$

$$-\frac{Z_1Z_2\alpha}{2s_1m_1m_2}[(\mu_1-\delta_1)(1+\frac{m_2}{m_1})\bar{f}_{21}+(\epsilon_1s_1\frac{m_2}{m_1}+\delta_1)\bar{f}_{11}](\vec{L}\cdot\vec{S}_1) \qquad /13.5/$$

$$-\frac{Z_1Z_2\alpha}{2s_2m_1m_2}[(\mu_2-\delta_2)(1+\frac{m_1}{m_2})f_{12}+(\epsilon_2s_2\frac{m_1}{m_2}+\delta_1)\bar{f}_{11}]\;(\vec{L}\cdot\vec{S}_2)$$

$$-\frac{Z_1Z_2\alpha}{s_1s_2m_1m_2}[\frac{1}{4}(\mu_1\mu_2\bar{\bar{f}}_{22}+\delta_1\mu_2(\bar{\bar{f}}_{12}-\bar{\bar{f}}_{22})+\delta_2\mu_1(\bar{\bar{f}}_{21}-\bar{\bar{f}}_{22})+\delta_1\delta_2\cdot$$

$$\cdot(\bar{\bar{f}}_{11}-\bar{\bar{f}}_{12}-\bar{\bar{f}}_{21}+\bar{\bar{f}}_{22}))(\vec{S}_1T\vec{S}_2)+\frac{1}{6}(\mu_1\mu_2\hat{f}_{22}+\delta_1\mu_2(\hat{f}_{12}-\hat{f}_{22})+$$

$$+\delta_2\mu_1(\hat{f}_{21}-\hat{f}_{22})+\delta_1\delta_2(\hat{f}_{11}-\hat{f}_{12}-\hat{f}_{21}+\hat{f}_{22}))(\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2)]-(\delta_1-1)\frac{Z_1Z_2\alpha}{2m_1^2}\times$$

$$(\bar{\bar{f}}_{11}-\mu_1\bar{\bar{f}}_{21}+(m_1^2Q_1+\mu_1-1)\bar{\bar{f}}_{31})(\vec{S}_1 T\vec{S}_1)-(\delta_2-1)\frac{Z_1Z_2\alpha}{2m_2^2}(\bar{\bar{f}}_{11}-\mu_2\bar{\bar{f}}_{12}+$$
$$+(m_2^2Q_2+\mu_2-1)\bar{\bar{f}}_{13})(\vec{S}_2 T\vec{S}_2)\}\Psi_{\eta_1\eta_2}(\vec{r};w)=0,$$

где

$$\delta_i=\begin{cases}0, & s_i=1\\ 1, & s_i=1/2\end{cases},\quad \epsilon_i=\begin{cases}-1, & s_i=1\\ 1, & s_i=1/2\end{cases},\quad m^{-1}=m_1^{-1}+m_2^{-1}.$$

В случае тождественных частиц при выводе уравнения /13/ следует учитывать еще вклад в амплитуду рассеяния обменной диаграммы, а также множитель $\kappa=1/2$ в /1/, что приводит к некоторому изменению определений /4/, /7/. Не вдаваясь в детали, отметим, что для /анти/ симметризованной в соответствии со спином частиц волновой функции /11/ уравнение /13/ сохраняет вид без изменений.

Если рассматривать уравнение /13/ как приближенно-релятивистское обобщение уравнения Шредингера с кулоновским потенциалом

$$(-\frac{1}{2m}\Delta_{\vec{r}}+\frac{Z_1Z_2\alpha}{r}-\epsilon_{NR})\psi(\vec{r})=0,$$

интерпретация отдельных членов в /13/ будет следующей:

1. Замена коэффициента $1/2m$ при $\Delta_{\vec{r}}$ на $1/2E$ и ϵ_{NR} на $b^2(w)/2E$ учитывает эффект отдачи.

2. Член /13.2/ описывает искажение кулоновского потенциала за счет конечных электромагнитных размеров частиц; эффект конечных размеров учитывается и в остальных членах квазипотенциала заменой обычных факторов $1/r^3$ и $4\pi\delta^{(3)}(\vec{r})$ на $\bar{f}_{ij}(r)$ или $\bar{\bar{f}}_{ij}(r)$ и $\hat{f}_{ij}(r)$ соответственно.

3. Член /13.3/, не имеющий нерелятивистского аналога, возникает при квадрировании 4-векторного квазипотенциала; его вклад всегда отрицателен.

4. Члены /13.4/ описывают "контактное" взаимодействие двух частиц и дают заметный сдвиг лишь s-уровней.

5. Члены /13.5/ соответствуют общепринятым спин-орбитальному, спин-спиновому и тензорному взаимодействиям. Для частиц со спином 1 возникает новая структура - самодействие спина, пропорциональное квадрупольному электрическому моменту. Спин-спиновый член отличается от выражения в формуле Ферми присутствием функций f_{22} и т.д., что приводит к поправке 1-2%.

В целом следует еще отметить, что благодаря функциям f_{ij}, $\bar{f}_{ij}$, $\bar{\bar{f}}_{ij}$ и $\hat{f}_{ij}$ в случае достаточно быстрого убывания формфакторов $F_i(-\vec{k}^2)$ при $\vec{k}^2\to\infty$ квазипотенциал U /13/ не имеет сингулярностей $(U=\{\ldots\}+1/2E\Delta_{\vec{r}}+b^2/2E)$.

4. ПОПРАВКИ К УРОВНЮ ЭНЕРГИИ ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ МЕЗОАТОМОВ $p\mu^-$, $d\mu^-$, $t\mu^-$

Квазипотенциал U в уравнении /13/ содержит функции $f_{ij}(r)$, $\bar{f}_{ij}(r)$, $\bar{\bar{f}}_{ij}(r)$ и $\hat{f}_{ij}(r)$, которые выражаются через формфакторы частиц по формулам /12/. Для построения f_{ij} и т.д. в явном виде была получена аналитическая аппроксимация для формфакторов ядер в импульсном пространстве функциями типа

$$F_k^{ap}(-\vec{k}^2)=\sum_{n=1}^{N_k}c_k^n/(1+\vec{k}^2/(\Lambda_k^n)^2)^{\ell_k^n},\quad k=1,\ldots,2s+1, \qquad /14/$$

ℓ_k^n - целое, s - спин ядра; μ^--мезон рассматривался как бесструктурная частица с магнитным моментом $1{,}0012(e\hbar/2m_\mu c)$.

Аппроксимация /14/ является обобщением хорошо известной дипольной аппроксимации формфакторов протона и обладает тем преимуществом, что фурье-преобразование /12/ можно проделать в явном виде, а фурье-образ является гладкой комбинацией экспоненциальной и рациональных функций /см. Приложение/. Данные о формфакторах протона, дейтрона и тритона брались из работ [6,7,8]; численные значения параметров c_k^n, Λ_k^n, ℓ_k^n и N_k, полученные методом Александрова[9], приведены в *табл.1*.

Таким образом, построением функций f_{ij}, $\bar{f}_{ij}$, $\bar{\bar{f}}_{ij}$ и $\hat{f}_{ij}$ квазипотенциал U в /13/ полностью определен. Спектр уравнения /13/ по w с точностью ~10^{-3} эВ легко получить, рассматривая члены /13.2-5/ как возмущение к уравнению

$$(-\frac{1}{2E}\Delta_{\vec{r}}+\frac{Z_1Z_2\alpha}{r}-\frac{b^2}{2E})\psi(\vec{r},w)=0.$$

Численные результаты для поправок к уровню энергии основного состояния μ-мезоатомов $p\mu^-$, $d\mu^-$ и $t\mu^-$, обусловленные этими членами*, а также нелинейной зависимостью спектрального параметра $b^2(w)/2E$ уравнения /13/ от энергии w, приведены в *табл.2*; в соответствии с замечанием в конце §3 они обозначены как $\Delta\epsilon_{rec}$, $\Delta\epsilon_{fsz}$, $\Delta\epsilon_{SQ}$, $\Delta\epsilon_{CONT}$ и $\Delta\epsilon_{hfs}$. В сочетании с результатами работы [5] о поправках на поляризацию вакуума приведены и значения полной энергии связи μ-мезоатомов с учетом всех коррекций к закону Кулона, дающие вклад в энергию в пределах точности ~10^{-3} эВ.

---

*Полученные в первом порядке теории возмущения.

Таблица 1

Параметры аппроксимантов /14/ для формфакторов ядер p, d и t.

Формфакторы протона F_k, $k = 1, 2$.

k	I			2		
N_k	2			2		
n	ℓ_k^n	C_k^n	Λ_k^n (МэВ/c)	ℓ_k^n	C_k^n	Λ_k^n (МэВ/c)
I	2	0,78908	85I,7	3	0,43680	769,9
2	3	0,2I092	2095	3	0,56320	II94

Формфакторы дейтрона F_k, $k = 1, 2, 3$.

k	I			2			3		
N_k	3			2			2		
n	ℓ_k^n	C_k^n	Λ_k^n (МэВ/c)	ℓ_k^n	C_k^n	Λ_k^n (МэВ/c)	ℓ_k^n	C_k^n	Λ_k^n (МэВ/c)
I	5	0,35042	373,7	5	0,38902	380,8	5	0,56059	444,4
2	5	0,66250	706,6	5	0,6I098	755,5	5	0,4394I	798,4
3	5	-0,0I292	I980						

Формфакторы тритона F_k, $k = 1, 2$.

k	I			2		
N_k	2			2		
n	ℓ_k^n	C_k^n	Λ_k^n (МэВ/c)	ℓ_k^n	C_k^n	Λ_k^n (МэВ/c)
I	5	I,64477	70I,I	3	I,5326	522,2
2	5	-0,6477	847,8	3	-0,5326	695,I

*Таблица 2**

Релятивистские поправки к уровню энергии основного состояния мезоатомов $p\mu^-$, $d\mu^-$ и $t\mu^-$

мезоатом	$p\mu^-$	$d\mu^-$	$t\mu^-$
масса ядра m/МэВ/c^2/	938,2796	I875,628	2808,944
дипольный магнитный момент ядра μ $(e\hbar/2mc)$ /12/	2,7928	0,85742	2,9789
электрический квадрупольный момент Q (f^{-2}) /12/	0	0,286	0
Кулоновская энергия связи $\mathcal{E}_{NR}$ /эВ/	-2528,5I7(II)	-2663,226(11)	-27II,268(II)
поправка на отдачу $\Delta\mathcal{E}_{rec}$ /эВ/	+0,0979	+0,I046	+0,I070
поправка на конечные размеры $\Delta\mathcal{E}_{fs}$ /эВ/	+0,0224	+0,2I5	+0,I46
поправка на квадрированный кулон $\Delta\mathcal{E}_{SQ}$ /эВ/	-0,2684	-0,28I8	-0,2870
контактный член $\Delta\mathcal{E}_{cont}$ /эВ/	+0,I392	+0,I402	+0,I460
сверхтонкое расщепление $\Delta\mathcal{E}_{hfs}$ /эВ/	0,I8I7	0,049I	0,2402
поправка на поляризацию вакуума $\Delta\mathcal{E}_{vp}$ /эВ/	-I,896	-2,I96	-2,2I2
уровень энергии пара-состояния /эВ/	-2530,558(11)	-2665,277(11)	-27I3,548(11)
уровень энергии орто-состояния /эВ/	-2530,377(11)	-2665,228(11)	-27I3,308(11)

* Масса μ^--мезона $-m_\mu = 206{,}76859/29/m_e = 105{,}65946/24/$ МэВ/c^2, $Ry = m_e c^2 \alpha^2/2 = 13{,}605804/36/$ эВ /11/.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получено в явном виде однофотонное приближение для квазипотенциала электромагнитного взаимодействия двух частиц со спином 1/2 или 1, учитывающее эффекты электромагнитной структуры частиц. Решением соответствующего квазипотенциального уравнения вычислены сверхтонкое расщепление и релятивистские поправки к уровню энергии основного состояния мезоатомов $p\mu^-$, $d\mu^-$ и $t\mu^-$.

Отметим, что выражение /13/ для U можно использовать в обычном двухчастичном уравнении Шредингера

$$\left(-\frac{1}{2m}\Delta_{\vec r} + \frac{Z_1 Z_2 \alpha}{r} + U - \epsilon\right)\psi = 0, \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

в качестве эффективного потенциала, учитывающего с точностью $\sim O(\alpha^4)$ все перечисленные в §3 эффекты за исключением "отдачи". Это позволяет применять U и в многочастичных задачах, в качестве коррекции к парному кулоновскому потенциалу /10/.

В заключение автор выражает благодарность С.И.Виницкому, Л.И.Пономареву и И.Т.Тодорову за поддержку и интерес к работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Явный вид функций $f_{ij}(r)$ /12/ при условии $F_i^{(2)}(-\vec k^2) = 1;\ i = 1, 2$, и $F_i^{(1)}(-\vec k^2)$, заданном формулой /14/, можно получить легко с помощью следующих формул:

$$f_{ij}(r) = r \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{\vec k^2} e^{i\vec k \vec r} \left(\sum_{n=1}^{N_i} c_i^n / (1 + \vec k^2/(\Lambda_i^n)^2)^{\ell_i^n} \right) =$$

$$= r \sum_{n=1}^{N_i} c_i^n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{\vec k^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\vec k^2}{(\Lambda_i^n)^2}\right)^{\ell_i^n}} \equiv \sum_{n=1}^{N_i} c_i^n I_{\ell_i^n}(r\Lambda_i^n).$$

Таблица 3. Коэффициенты полиномов A_ℓ при $\ell = 1, \ldots, 5$

ℓ \ s	1	2	3	4	5
1	1				
2	1	1/2			
3	1	5/8	1/8		
4	1	11/16	3/16	1/48	
5	1	93/128	29/128	7/192	1/384

В общем виде $I_\ell(x) = 1 - e^{-x} A_\ell(x)$, где $A_\ell(x) = \sum_{s=0}^{\ell-1} a_\ell^s x^s$ - полином степени $\ell-1$.

В *табл.3* приведены коэффициенты полиномов A_ℓ при ℓ = 1, 2, 3, 4 и 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ponomarev L.I. In: Proc. of the Sixth International Conf. on Atomic Physics, August 17-22, Riga, USSR, "Zinatne", Riga. Plenum Press, New York-London, 1979, p.181; Gerstein S.S., Ponomarev L.I. In: Muon Physics, vol.III, Zavattini E. In: Muon Physics, vol.II, ed. Hughes V.W., Wu C.S. Academic Press, New York, 1975.
2. Todorov I. Phys.Rev., 1971, D3, p.2351. See also "Properties of Fundamental Interactions", vol.9C, ed. A.Zichichi, Editrice Compositori, Bologna, 1973, pp.951-979.
3. Bjorken J., Drell S. Relativistic Quantum Mechanics. McGraw-Hill Book Company, New York, 1964.
4. Glaser V., Jaksic B. Nuovo Cimento, 1957, 5, p.1197.
5. Melezhik V.S., Ponomarev L.I. Phys.Lett., 1978, 77B, p.217.
6. Биленькая С.И. и др. ЖЭТФ, 1971, 61, с.2225.
7. Музафаров В.М., Троицкий В.Е. Письма в ЖЭТФ, 1979, 30, с.18.
8. Griffi T.A., Schiff L.I. In: High Energy Physics, vol. I, New York, 1967, p.341.
9. Александров Л. ОИЯИ, Р5-7259, Дубна, 1973.
10. Бакалов Д.Д., Виницкий С.И. ОИЯИ, Р4-12736, Дубна, 1979.
11. Review of Particle Properties, Particle Data Group, 1978.
12. Wapstra A.H., Bos K. Atomic Data and Nuclear Data Tables, 1977, 19, No.3, p.117; Fuller G.H., Cohen V.W. Nuclear Moments, App.1 to Nuclear Data Sheets, May, 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 декабря 1979 года.