объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна



Р4 - 13046

Д.Д.Бакалов

# РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ПОПРАВКИ И ПОПРАВКИ НА ЭЛЕКТРОМАГНИТНУЮ СТРУКТУРУ ЯДЕР К УРОВНЯМ ЭНЕРГИИ $\mu$-МЕЗОМОЛЕКУЛ ИЗОТОПОВ ВОДОРОДА

*Направлено в ЖЭТФ*

1980

## §1. ВВЕДЕНИЕ

Повышенный интерес к физическим характеристикам $\mu$-мезомолекул изотопов водорода, таким, как уровни энергии и их сверхтонкая структура, связан с рядом новых прецизионных экспериментов по изучению $\mu^-$ -захвата легкими ядрами [1] и, прежде всего, с исследованием явления мюонного катализа синтеза ядер тяжелых изотопов водорода [2]. Связь в $\mu$-мезомолекулах обусловлена целиком электромагнитным /э.м./ взаимодействием; это позволяет описать их стационарные состояния с высокой точностью [3,4], что, в свою очередь, увеличивает ценность экспериментальных результатов и надежность их интерпретации. В то же время из-за соизмеримости масс $\mu$-мезона и ядер возрастает примерно на два порядка по сравнению с обычными молекулами относительный вклад поправок к уровням энергии мезомолекул на эффекты релятивистской динамики. Для описания многих процессов со спиновой зависимостью [1,3,4] /таких, как $\mu^-$-захват/ и особенно резонансного образования мезомолекул нерелятивистского приближения оказывается недостаточно: релятивистские эффекты дают вклад на уровне требуемой в этих случаях точности вычисления уровней энергии $\mu$-мезомолекул $10^{-3}$ эВ.

В данной работе мезомолекулы рассматриваются как системы из трех спиновых частиц с э.м. взаимодействием, а их динамика описывается уравнением Шредингера /у.Ш./ с приближенным /с точностью до членов порядка $\alpha^2$/ релятивистским гамильтонианом, полученным в рамках формализма Фолди и Крайчика [5]. Операторы двухчастичного релятивистского взаимодействия построены в рамках квазипотенциального подхода Тодорова [6]. При этом релятивистским эффектам в гамильтониане соответствуют аддитивные члены двух типов - диагональные и недиагональные по спиновым переменным. Взаимодействия, связанные с последними, порождают сверхтонкое расщепление уровней энергии; они рассмотрены в работах [7,8]. Настоящая работа посвящена изучению релятивистских эффектов, которые не зависят от ориентации спинов частиц и приводят лишь к сдвигам нерелятивистских уровней энергии. В общем виде рассмотрены системы трех частиц со спинами, не превосходящими 1, с учетом их э.м. структуры /§2/. Для вычисления релятивистских и связанных с конечными размерами частиц сдвигов уровней энергии предложена схема теории возмущений, которая использует решения нерелятивистской трехчастичной задачи с кулоновским потенциалом, построенные в адиабатическом подходе [3] /§3/. Вычислены с точностью $10^{-3}$ эВ поправки к уровням энергии всех известных стационарных состояний $\mu$–мезомолекул изотопов водорода и обсуждаются относительные вклады исследуемых эффектов /§4/. В заключение отмечены некоторые не решенные пока проблемы.

## §2. ПРИБЛИЖЕННЫЙ /С ТОЧНОСТЬЮ ДО ЧЛЕНОВ ПОРЯДКА $\alpha^2$/ РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ГАМИЛЬТОНИАН СИСТЕМЫ ТРЕХ СПИНОВЫХ ЧАСТИЦ С Э.М. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

В соответствии с результатами работы [5] приближенный /с точностью до членов $\sim 1/c^2 \sim \alpha^2$/ релятивистский гамильтониан H трехчастичной системы имеет вид:

$$H = H^{(0)} + \alpha^2 H^{(1)}, \quad H^{(0)} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\vec{P}_i^{\,2}}{2m_i} + U^{(0)},$$
$$H^{(1)} = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\vec{P}_i^{\,4}}{8m_i^3} + U^{(1)}. \tag{1}$$

Здесь и в дальнейшем символами $\vec{R}_i$, $\vec{P}_i$, $m_i$, $s_i$, $Z_i$ и $\mu_i$ будут обозначаться соответственно 3-векторы координаты и импульса, масса, спин, заряд и магнитный дипольный момент i-й частицы. Единицы фиксированы условием $e = \hbar = m_1 m_3/(m_1 + m_2) = 1$, где e – заряд протона, и предполагается, что $m_1 \geq m_2 \geq m_3$.

В случае э.м. взаимодействия трех частиц, обладающих э.м. структурой, нерелятивистский потенциал $U^{(0)}$ представляется в виде суммы членов, описывающих модифицированное парное кулоновское взаимодействие [6]

$$U^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U_{ij}^{(0)}, \quad U^{(0)} = Z_i Z_j \frac{f_{11}^{(ij)}(|\vec{R}_i - \vec{R}_j|)}{|\vec{R}_i - \vec{R}_j|}, \tag{2}$$

где функции $f_{k\ell}^{(ij)}(x)$ связаны с k-тым э.м. формфактором /ф.ф./ i-й частицы и $\ell$-м ф.ф. j-й частицы зависимостью

$$f_{k\ell}^{(ij)}(x) = x \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} F_k^{(i)}(-\vec{q}^{\,2}) F_\ell^{(j)}(-\vec{q}^{\,2}) \cdot \frac{4\pi}{\vec{q}^{\,2}} e^{i\vec{q}\vec{x}} \; ;$$

в дальнейшем еще будут встречаться и функции

$$\bar{f}_{k\ell}^{(ij)}(x) = \frac{1}{x^3}\left(f_{k\ell}^{(ij)}(x) - x \frac{d}{dx} f_{k\ell}^{(ij)}(x)\right) ;$$

$$\hat{f}_{k\ell}^{(ij)}(x) = -\frac{1}{x} \frac{d^2}{dx^2} f_{k\ell}^{(ij)}(x) + 4\pi\delta(\vec{x}) f_{k\ell}^{(ij)}(0) .$$



Релятивистский потенциал $U^{(1)}$, состоящий в общем случае из двух- и трехчастичных членов $U_2^{(1)} = \frac{1}{2}\sum_{i \neq j} U_{ij}^{(1)}$ и $U_3^{(1)}$, строится как решение системы дифференциальных уравнений, полученных из коммутационных соотношений алгебры Ли группы Пуанкаре. Фолди и Крайчиком [5] построено в явном виде частное решение $U^{(1)FK} = U_2^{(1)FK} + U_3^{(1)FK}$. При $U^{(0)}$, заданном равенством /2/, оно принимает вид $U_3^{(1)FK} = 0$, $U_2^{(1)FK} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U_{ij}^{(1)FK}$,

$$U_{ij}^{(1)FK} = \Big\{ -\frac{Z_i Z_j}{2(m_i + m_j)^2} \frac{f_{11}^{(ij)}(r_{ij})}{r} \vec{P}_{ij}^{\,2} + i \frac{(m_i - m_j) Z_i Z_j}{2(m_i + m_j) m_i m_j} \times$$
$$\times \hat{f}_{11}^{(ij)}(r_{ij}) (\vec{r}_{ij} \vec{P}_{ij}) - \frac{Z_i Z_j}{2(m_i + m_j)^2} \bar{f}_{11}^{(ij)}(r_{ij}) (\vec{r}_{ij} \vec{P}_{ij})^2 \Big\} I^{spin} +$$

+ /недиагональные по спинам члены/,

где $I^{spin}$ есть единичный оператор в пространстве спиновых переменных, $\vec{r}_{ij} = \vec{R}_j - \vec{R}_i$, $r_{ij} = |\vec{r}_{ij}|$ и $\vec{P}_{ij} = \vec{P}_i + \vec{P}_j$. Общее решение $U^{(1)}$ содержит произвольные скалярные функции $\Delta U_2^{(1)} = \frac{1}{2}\sum_{i \neq j} \Delta U_{ij}^{(1)}$ и $\Delta U_3^{(1)}$, которые не зависят от координаты и импульса центра масс трехчастичной системы и удовлетворяют условию разделимости. Неопределенность в $\Delta U_3^{(1)}$ вообще является открытым вопросом, но в случае э.м. взаимодействия естественно положить $\Delta U_3^{(1)} = 0$. Условие разделимости гамильтониана H фиксирует в $\Delta U_{ij}^{(1)}$ члены, не зависящие от $\vec{P}_{ij}$: при удалении третьей частицы на бесконечность в системе покоя центра масс частиц i и j оператор $U_{ij}^{(1)}|_{\vec{P}_{ij}=0}$ должен совпадать с оператором, описывающим релятивистские эффекты $\sim\alpha^2$ относительно движения двухчастичной системы (ij).

Предполагая, что вся зависимость $U_{ij}^{(1)}$ от движения центра масс пары (ij) содержится в $U_{ij}^{(1)FK}$, и используя выражение для оператора двухчастичного взаимодействия, полученное в работе [6] в квазипотенциальном подходе Тодорова [9], можно представить $\Delta U_{ij}^{(1)}$ в виде

$$\Delta U_{ij}^{(1)} = U_{ij}^{(1)}|_{\vec{P}_{ij}=0} = -\frac{(m_i + m_j)}{2m_i m_j}\left(\frac{Z_i Z_j f_{11}^{(ij)}(r_{ij})}{r_{ij}}\right)^2 - \frac{Z_i Z_j}{4m_i m_j}\Big[\hat{f}_{11}^{(ij)}(r_{ij}) +$$
$$+ \frac{2s_i}{2s_i + 1} \frac{m_j}{m_i}\left(\epsilon_i \hat{f}_{11}^{(ij)}(r_{ij}) + \frac{\mu_i - \delta_i}{s_i} \hat{f}_{21}^{(ij)}(r_{ij})\right) +$$
$$+ \frac{2s_j}{2s_j + 1} \frac{m_i}{m_j}\left(\epsilon_j \hat{f}_{11}^{(ij)}(r_{ij}) + \frac{\mu_j - \delta_i}{s_j} \hat{f}_{12}^{(ij)}(r_{ij})\right)\Big],$$

где $\delta_i = 1$ при $s_i = 1/2$, $\delta_i = 0$ при $s_i \neq 1/2$, а $\epsilon_i = (-1)^{2s_i+1}$. В итоге приближенный релятивистский гамильтониан $H$ системы трех частиц с э.м. взаимодействием принимает вид

$$H = \sum_i \frac{\vec{P}_i^{\,2}}{2m_i} + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} U_{ij}^{(0)} + \alpha^2 H^{(1)}, \quad H^{(1)} = -\sum_i \frac{\vec{P}_i^{\,4}}{8m_i^3} + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}(\Delta U_{ij}^{(1)} + U_{ij}^{(1)FK}) \qquad /3/$$

## §3. МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЙ

Стационарные состояния $|\mathcal{J} N \mathcal{J}_3 v n \lambda>$ системы трех частиц со спинами $s_i$ характеризуются набором квантовых чисел /кв.ч./ / $\mathcal{J}$, $\mathcal{J}_3$, $N$, $v$, $n$, $\lambda$ /: $\mathcal{J}$ и $\mathcal{J}_3$ есть кв.ч. квадрата и проекции полного момента $\vec{\mathcal{J}} = \vec{s} + \vec{s} + \vec{s} + \vec{J}$ на ось $z$ фиксированной системы, $\vec{J}$ - орбитальный момент системы трех частиц, $N$ нумерует состояния мультиплета сверхтонкой структуры при данном $\mathcal{J}$, вибрационное кв.ч. $v$ характеризует относительное движение частиц 1 и 2 /ядер/, а набор из трех кв.ч. $n$ - движение частицы 3 относительно частиц 1 и 2; $\lambda$ есть четность волновой функции при отражении осей координатной системы. Волновые функции $\psi_{\mathcal{J}_3}^{\mathcal{J} N v n \lambda}$ и уровни энергии $E^{\mathcal{J} N v n \lambda}$ находятся из у.Ш. с гамильтонианом $H$ из /3/:

$$(H - E^{\mathcal{J} N v n \lambda})\, \psi_{\mathcal{J}_3}^{\mathcal{J} N v n \lambda} = 0 . \qquad /4/$$

Выделим в выражении /3/ для $H^{(1)}$ диагональную и недиагональную по спиновым переменным части $H_{diad}^{(1)}$ и $H_{spin}^{(1)}$:

$$H^{(1)} = H_{diag}^{(1)} + H_{spin}^{(1)} ,$$

а в выражении для $H^{(0)}$ - нерелятивистский трехчастичный гамильтониан с кулоновским взаимодействием $H_{NR}$ и член $\Delta H^{(0)}$:

$$\Delta H^{(0)} = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} Z_i Z_j \frac{f_{11}^{(ij)}(r_{ij}) - 1}{r_{ij}} \equiv \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} \Delta H_{ij}^{(0)} ,$$

описывающий коррекции к $H_{NR}$ за счет эффектов э.м. структуры частиц; тогда $H$ записывается в виде

$$H = H^{(0)} + \alpha^2 H^{(1)} = \{H_{NR} + (\Delta H^{(0)} + \alpha^2 H_{diag}^{(1)})\}\, 1^{spin} + \alpha^2 H_{spin}^{(1)} . \qquad /3'/$$

Оператор $H^{(1)}$ пропорционален $\alpha^2 \sim 10^{-4}$, а в $\Delta H^{(0)}$ неявно входят как малые параметры э.м. радиусы частиц, поэтому естественно



решать уравнение /4/ по теории возмущений*. Для достижения точности $10^{-3}$ эВ при описании энергетического спектра $\mu^-$ - мезомолекул и в ряде других случаев достаточно ограничиться первым порядком; при этом поправки от членов $\Delta H^{(0)}$, $H_{diag}^{(1)}$ и $H_{spin}^{(1)}$ к нерелятивистским уровням энергии $E_{NR}^{Jvn\lambda}$, определяемым из нерелятивистского уравнения Шредингера

$$(H_{NR} - E_{NR}^{Jvn\lambda})\, |J m_J v n \lambda> = 0 , \qquad /5/$$

являются аддитивными. Сверхтонкое расщепление уровней, порождаемое оператором $H_{spin}^{(1)}$, было рассмотрено в работах [7,8]; целью данной работы является изучение эффектов диагонального по спиновым переменным оператора $V 1^{spin}$, где

$$V = \Delta H^{(0)} + \alpha^2 H_{diag}^{(1)} . \qquad /6/$$

Если исключить из рассмотрения член $H_{spin}^{(1)}$ в выражении /3'/ для гамильтониана системы $H$, зависимость от спиновых переменных в у.Ш. /4/ факторизуется и собственные значения $J$ и $m_J$ квадрата полного орбитального момента $\vec{J}$ и его проекции $J_z$ на ось $z$ становятся хорошими квантовыми числами стационарных состояний трехчастичной системы. Это означает, что в каждом состоянии $|\mathcal{J} N \mathcal{J}_3 v n \lambda>$ орбитальный момент имеет определенное значение $J = J_{\mathcal{J}N}$:

$$(\vec{J}^{\,2} - J_{\mathcal{J}N}(J_{\mathcal{J}N}+1))\, |\mathcal{J} N \mathcal{J}_3 v n \lambda> = (J_z - m_J)\, |\mathcal{J} N \mathcal{J}_3 v n \lambda> = 0 .$$

Включение потенциала $V$ /6/ приводит к смещению нерелятивистских уровней энергии на величину

$$\Delta E^{\mathcal{J} N v n \lambda} = \Delta E_{NR}^{(J_{\mathcal{J}N})\, v n \lambda} = <J_{\mathcal{J}N}\, v n \lambda, m_J |V| J_{\mathcal{J}N} v n \lambda, m_J> , \qquad /7/$$

общую для всех состояний $|\mathcal{J} N \mathcal{J}_3 v n \lambda>$, принадлежащих данному мультиплету сверхтонкой структуры.

Представим оператор возмущения $V$ /6/ в виде суммы операторов:

$$V = \sum_{t=1}^{5} V^{(t)} . \qquad /8/$$

В терминах координат и импульсов Якоби

$$\vec{\mathcal{R}} = (m_1 + m_2 + m_3)^{-1}\,(m_1\vec{R}_1 + m_2\vec{R}_2 + m_3\vec{R}_3) , \quad \vec{R} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1 ,$$

---

*Точное решение уравнения /4/ связано и с принципиальными трудностями из-за присутствия в $U_2^{(1)FK}$ производных четвертого порядка.

$$\vec r = \vec R_3 - \frac{1}{2}(\vec R_1 + \vec R_2), \quad \vec{\mathcal{P}} = -i\vec\nabla_{\vec{\mathcal{R}}}, \quad \vec P = -i\vec\nabla_{\vec R}, \quad \vec p = -i\vec\nabla_{\vec r},$$

при $\vec r_{1,2} = \vec R_3 - \vec R_{1,2}$ выражения для операторов $V^{(t)}$ имеют следующий вид /$\vec{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{P}} = 0$/.

t = 1 /коррекции к кулоновскому взаимодействию на малых расстояниях за счет э.м. структуры частиц/:

$$V^{(1)} = Z_1 Z_2 \frac{f_{11}^{(12)}(R) - 1}{R} + \sum_{i=1,2} Z_i Z_3 \frac{f_{11}^{(i3)}(r_i) - 1}{r_i}. \qquad /9/$$

t = 2 /контактное взаимодействие/:

$$V^{(2)} = -\frac{Z_1 Z_2 \alpha^2}{4 m_1 m_2}\{\hat f_{11}^{(12)}(R) + \frac{2s_1}{2s_1+1}\frac{m_2}{m_1}(\epsilon_1 \hat f_{11}^{(12)}(R) + \frac{\mu_1 - \delta_1}{s_1}\hat f_{21}^{(12)}(R)) + \frac{2s_2}{2s_2+1}\frac{m_1}{m_2}(\hat f_{11}^{(12)}(R)\,\epsilon_2 + \frac{\mu_2 - \delta_2}{s_2}\hat f_{12}^{(12)}(R))\} + \sum_{i=1,2}\frac{Z_i Z_3 \alpha^2}{4 m_i m_3}\{\hat f_{11}^{(i3)}(r_i) + \frac{2s_i m_3}{(2s_i+1) m_i}(\epsilon_i \hat f_{11}^{(i3)}(r_i) + \frac{\mu_i - \delta_i}{s_i}\hat f_{21}^{(i3)}(r_i)) + \frac{2s_3 m_i}{(2s_3+1) m_3}(\epsilon_3 \hat f_{11}^{(i3)}(r_i) + \frac{\mu_3 - \delta_3}{s_3}\hat f_{12}^{(i3)}(r_i))\}. \qquad /10/$$

t=3 /квадрированный кулоновский потенциал/:

$$V^{(3)} = -\frac{m_1 + m_2}{2 m_1 m_2}\left(\frac{Z_1 Z_2 \alpha f_{11}^{(12)}(R)}{R}\right)^2 - \sum_{i=1,2}\frac{m_i + m_3}{2 m_i m_3}\left(\frac{Z_i Z_3 \alpha f_{11}^{(i3)}(r_i)}{r_i}\right)^2. \qquad /11/$$

t = 4 /релятивистская отдача/:

$$V^{(4)} = -\frac{\alpha^2}{8 m_3^3}\{(1 + (\frac{m_3}{m_1})^3 + (\frac{m_3}{m_2})^3)\vec p^{\,4} + [(\frac{m_3}{m_1})^3 - (\frac{m_3}{m_2})^2](\frac{1}{2}\vec p^{\,2}(\vec P\vec p) + 2(\vec P\vec p)\vec P^{\,2}) + [(\frac{m_3}{m_1})^3 + (\frac{m_3}{m_2})^3](\frac{1}{2}\vec P^{\,2}\vec p^{\,2} + (\vec P\vec p)^2 + \vec P^{\,4})\}. \qquad /12/$$

t = 5 /взаимодействие Фолди и Крайчика, описывающее эффекты движения центров масс двухчастичных подсистем/:



$$V^{(5)} = -\frac{\alpha^2 Z_1 Z_2}{2(m_1+m_2)^2}\frac{f_{11}^{(12)}(R)}{R}\vec p^{\,2} - \frac{\alpha^2 Z_1 Z_2}{2(m_1+m_3)^2}\frac{f_{11}^{(13)}(r_1)}{r_1}(\vec P - \frac{1}{2}\vec p)^2 - \frac{\alpha^2 Z_2 Z_3}{2(m_2+m_3)^2}\frac{f_{11}^{(23)}(r_2)}{r_2}(\vec P + \frac{1}{2}\vec p)^2 + \frac{\alpha^2 Z_1 Z_2(m_2 - m_1)}{2m_1 m_2(m_2+m_1)}\hat f_{11}^{(12)}(R)(\vec R\cdot\vec p) + \frac{\alpha^2 Z_1 Z_3(m_1 - m_3)}{2m_1 m_3(m_1+m_3)}\hat f_{11}^{(13)}(r_1)(\vec r + \frac{1}{2}\vec R)\cdot(\frac{1}{2}\vec p - \vec P) + \frac{\alpha^2 Z_2 Z_3(m_2 - m_3)}{2m_2 m_3(m_2+m_3)}\hat f_{11}^{(23)}(r_2)(\vec r - \frac{1}{2}\vec R)\cdot(\frac{1}{2}\vec p + \vec P) - \frac{\alpha^2 Z_1 Z_2}{2(m_1+m_2)^2}\bar f_{11}^{(12)}(R)(\vec R\cdot\vec p)^2 - \frac{\alpha^2 Z_1 Z_3}{2(m_1+m_3)^2}\bar f_{11}^{(13)}(r_1)[(\vec r + \frac{1}{2}\vec R)\cdot(\frac{1}{2}\vec p - \vec P)]^2 - \frac{\alpha^2 Z_2 Z_3}{2(m_2+m_3)^2}\bar f_{11}^{(23)}(r_2)[(\vec r - \frac{1}{2}\vec R)\cdot(\frac{1}{2}\vec p + \vec P)]^2. \qquad /13/$$

Согласно формулам /7/, /8/ определение релятивистских сдвигов уровней энергии $\Delta E^{JNv n\lambda}$ сводится к вычислению среднего значения операторов $V^{(t)}$ по нерелятивистским волновым функциям стационарных состояний системы:

$$\Delta E_{NR}^{Jvn\lambda, t} = \langle Jvn\lambda, m_J | V^{(t)} | Jvn\lambda, m_J\rangle. \qquad /14/$$

Для этого целесообразно перейти от декартовых координат векторов $\vec R$ и $\vec r$ к переменным $R$, $\xi = (r_1 + r_2)/R$, $\eta = (r_1 - r_2)/R$ и к углам $\Phi$, $\theta$ и $\phi$, где $\Phi$ и $\theta$ - полярные углы вектора $\vec R$ в фиксированной координатной системе, а $\phi$ - азимутальный угол вектора $\vec r$ во вращающейся системе, ось $z'$ которой направлена по вектору $\vec R$, а ось $y'$ лежит в плоскости $Oxy$ /10/.

В адиабатическом подходе /3,10/ получено следующее разложение нерелятивистской функции трехчастичной системы

$$\psi_{m_J}^{Jvn\lambda}(\vec R, \vec r) = \langle \vec R\vec r | J m_J v n \lambda\rangle \qquad /15/$$

в ряд по кулоновским сфероидальным функциям $\Pi_{n_1 mp}(\xi;R)$, $\Xi_{n_2 mp}(\eta;R)$;

$$\psi^{J\nu n\lambda}_{m_J}(\vec{R},\vec{r}) = \sum_{m=0}^{J} \mathfrak{D}^{J\lambda}_{m m_J}(\Phi,\theta,\phi) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=g,u}{}' \Big\{ \sum_{n_1=0}^{\infty} R^{-1} \chi^{J\nu n\lambda}_{n_1 n_2 mp}(R) \times$$

$$\times N_{n_1 n_2 mp}(R)\, \Pi_{n_1 mp}(\xi;R)\, \Xi_{n_2 mp}(\eta;R) + \qquad /16/$$

$$+ \int_0^\infty dk\, R^{-1} \chi^{J\nu n\lambda}_{n_2 mp}(k,R)\, N_{n_2 mp}(k,R)\, \Pi_{mp}(\xi;k,R)\, \Xi_{n_2 mp}(\eta;R) \Big\}.$$

Здесь функции $\mathfrak{D}^{J\lambda}_{mm_J}$ выражаются через D-функции Вигнера [11]:

$$\mathfrak{D}^{J\lambda}_{mm_J} = [(2J+1)/8\pi^2]^{1/2}\ [(-1)^m D^J_{mm_J} + \lambda(-1)^J D^J_{-mm_J}],\ m>0,$$

$$\mathfrak{D}^{J\lambda}_{0m_J} = [(2J+1)/16\pi^2]\ (1+\lambda(-1)^J)\, D^J_{0m_J},$$

N(R) - нормировочный множитель [10], а штрих у знака суммы по p означает, что в случае идентичных частиц 1 и 2 из двух значений, $g=+1$ и $u=-1$, p принимает только $p=\lambda(-1)^I$, где $I(I+1)$ - собственное значение оператора $\vec{I}^2 = (\vec{s}_1+\vec{s}_2)^2$. Функции $\chi(R)$ находятся как решения задачи Штурма-Лиувилля для системы интегродифференциальных уравнений, получающейся путем подстановки разложения /16/ в у.Ш. /5/ и последующего усреднения по всем переменным, кроме R [10]. Из формул /16/, /15/, /7/ следует представление величин в виде

$$\Delta E^{J\nu n\lambda,\,t}_{NR} = \lim_{\bar{n}\to\infty} \lim_{\bar{k}\to\infty} v_{[\bar{n},\bar{k},J]}, \qquad /17/$$

где

$$v^{J\nu n\lambda,\,t}_{[\bar{n},\bar{k},\bar{m}]} = \sum_p{}' \sum_{p'}{}' \sum_{m=0}^{\bar{m}\le J} \sum_{m'=0}^{\bar{m}\le J} \Big\{ \sum_{n_1+n_2\le\bar{n}} \sum_{n_1'+n_2'\le\bar{n}} v^{J\nu n\lambda,\,t}_{n_1n_2mp,\,n_1'n_2'm'p'} +$$

$$+ \sum_{n_1+n_2\le\bar{n}} \sum_{n_2'=0}^{\bar{n}} \int_0^{\bar{k}} dk'\, v^{J\nu n\lambda,\,t}_{n_1n_2mp,\,k'n_2'm'p'} + \qquad /18/$$

$$+ \sum_{n_2,n_2'=0}^{\bar{n}} \int_0^{\bar{k}} dk \int_0^{\bar{k}} dk'\, v^{J\nu n\lambda,\,t}_{kn_2mp,\,k'n_2'm'p'} \Big\},$$



$$v^{J\nu n\lambda,\,t}_{n_1n_2mp,\,n_1'n_2'm'p'} =$$

$$= \int_0^\infty dR\cdot R^2\, \frac{\chi^{J\nu n\lambda}_{n_1n_2mp}(R)}{R}\, N_{n_1n_2mp}(R) \Big\{ \frac{R^3}{8} \int_1^\infty d\xi \int_{-1}^{1} d\eta\cdot(\xi^2-\eta^2) \times$$

$$\times \Pi_{n_1mp}(\xi;R)\, \Xi_{n_2mp}(\eta;R)\, \Big[ \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta\, \bar{\mathfrak{D}}^{J\lambda}_{mm_J}(\Phi,\theta,\phi)\, V^{(t)} \times \qquad /19/$$

$$\times \mathfrak{D}^{J\lambda}_{m'm_J}(\Phi,\theta,\phi) \Big]\, \Pi_{n_1'm'p'}(\xi;R)\, \Xi_{n_2'm'p'}(\eta;R) \Big\} \times$$

$$\times N_{n_1'n_2'm'p'}(R)\, \frac{\chi^{J\nu n\lambda}_{n_1'n_2'm'p'}(R)}{R},$$

$$v^{J\nu n\lambda,\,t}_{kn_2mp,\,n_1'n_2'm'p'} = v^{J\nu n\lambda,\,t}_{n_1n_2mp,\,n_1'n_2'm'p'}\ (n_1\to k) \quad \text{и т.д.}$$

Выражения для операторов $V^{(t)}$, $t=1,\dots,5$, в переменных R, $\xi$, $\eta$, $\Phi$, $\theta$, $\phi$ приведены в Приложении 1.

## §4. ПОПРАВКИ К УРОВНЯМ ЭНЕРГИИ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ МЕЗОМОЛЕКУЛ ИЗОТОПОВ ВОДОРОДА

Изложенный в §§2-3 формализм был применен для вычисления релятивистских поправок и поправок на э.м. структуру ядер к уровням энергии $\mu$-мезомолекул водородных изотопов.

Электромагнитные формфакторы протона, дейтрона и тритона аппроксимировались функциями типа

$$F(-\vec{q}^2) = \sum_n c_n/(1+\vec{q}^2/\Lambda_n^2)^{\ell_n}$$

с параметрами, полученными в работе [6]; $\mu^-$-мезон рассматривался как бесструктурная частица. Использованные значения масс и магнитных дипольных моментов [12] приведены в *табл.1*; константа тонкой структуры бралась из [13]: $\alpha = 1/137,0360$, а при переходе к атомным единицам следует пользоваться значением Ry = = 13,6058 эВ.

Все вычисления проводились так, чтобы обеспечить абсолютную точность значений уровней энергии мезомолекул $\delta E^{JN\nu n\lambda} \lesssim 10^{-3}$ эВ.

*Таблица 1*

Значения масс и магнитных дипольных моментов $\mu^-$-мезона и ядер p, d и t, использованные в работе

| Частица | $\mu^-$ | p | d | t |
|---|---|---|---|---|
| Масса $m_i$ /МэВ/$c^2$/ | 105,65646 | 938,2796 | 1875,628 | 2808,9438 |
| Магнитный дипольный момент $\mu_i(\frac{e\hbar}{2m_i c})$ | 1,0012 | 2,7928 | 0,8574 | 2,9789 |

Такая точность достаточна для описания процессов резонансного образования мезомолекул и соответствует ошибке $\delta T \sim 10°K$ в определении температуры резонанса [2].

Это позволило несколько упростить выкладки, пренебрегая членами, вклад от которых меньше выбранного предела. С учетом того, что $m_3/m_{1,2} \lesssim 10^{-1}$ для всех мезомолекул, в выражении для $V^{(4)}$ /12/ оставлен только первый член

$$V^{(4)} = -\frac{\alpha^2}{8}\{(\frac{1}{m_3^3} + \frac{1}{m_1^3} + \frac{1}{m_2^3})\vec{p}^{\,4} + O((\frac{m_3}{m_2})^3)\}.$$

Поправки на э.м. структуру к межъядерному кулоновскому потенциалу /9/ и на контактное взаимодействие между ядрами /10/ пренебрежимо малы. Эффект от взаимодействия Фолди-Крайчика $V^{(5)}$ меньше $10^{-3}$ эВ, как показывают расчеты сверхтонкой структуры мезомолекул [8] и оценка порядка величин в $V^{(5)}$; поэтому он тоже не учитывался.

При вычислении матричных элементов от операторов $V^{(t)}, t=1,\dots,4$, не учитывался вклад в адиабатическое разложение /18/ от членов, соответствующих непрерывному спектру двухцентровой задачи [14]; результаты аналогичных выкладок работы [7] указывают, что вносимая этим ошибка не превышает допустимых пределов. Для кулоновских сфероидальных функций $\Pi_{n_1mp}(\xi;R)$ и $\Xi_{n_2mp}(\eta;R)$ использовались соответственно разложения в ряд Яффе и в ряд по степеням $(1\pm\eta)$ [14]; в вычислениях эти ряды обрывались таким способом, чтобы обеспечить относительную точность вычислений $\sim 10^{-5}$. Интегрирование по $\eta$ проводилось аналитически, а по $\xi$ – численно, с относительной ошибкой $\sim 10^{-5}$ для $v^{Jv n\lambda,t}_{000p,000p}$, и $\sim 10^{-3}$ в остальных случаях. В качестве $\chi^{Jvn\lambda}_{m_1n_2mp}(R)$ использовались решения, полученные в работе [15]; интегрирование по R проводилось



на интервале /0;20,0/ с шагом 0,1, а на /20,0;60,0/ – с шагом 1,0; сопоставление с результатами, полученными при удвоенном шаге, указывает, что относительная ошибка интегрирования не превосходит $10^{-4}$.

В качестве значений $\Delta E^{Jvn\lambda,t}_{NR}$ брались парциальные суммы $v^{Jvn\lambda,t}_{[2,0,0]}$ /18/; *табл.2* иллюстрирует на примере мезомолекулы $dt\mu$ $(J=v=1, \lambda=-1)$ достаточно быструю сходимость разложения /17,18/, обеспечивающую выполнение неравенства

$$|\Delta E^{Jvn\lambda,t}_{NR} - v^{Jvn\lambda,t}_{[2,0,0]}| \lesssim 10^{-3}, \quad t=1,\dots,4.$$

Важным является вопрос о выборе начала отсчета энергии связанных состояний трехчастичных систем. Энергию связи мезомолекулы $\epsilon^{Jvn\lambda}$ естественно отсчитывать от уровня $E°$ основного состояния мезоатома более тяжелого из ядер [4]:

$$\epsilon^{Jvn\lambda} = E^{Jvn\lambda}_{NR} - E°.$$

Учет не зависящих от спинового состояния релятивистских и других упомянутых ранее эффектов приводит к сдвигу нерелятивистских уровней энергии как мезомолекулы /на величину $\Delta E^{Jvn\lambda}_{NR}$ /14//, так и основного состояния мезоатома /на величину $\Delta E°$, полученную в работе [6] /. Если в $\Delta E°$, аналогично разбиению в формуле /14/, выделить вклады $\Delta E^{0,t}$ от различных членов в операторе двухчастичного взаимодействия /см. [6]/, $\Delta\epsilon^{Jvn\lambda}$ можно представить в виде

$$\Delta\epsilon^{Jvn\lambda} = \sum_t \Delta\epsilon^{Jvn\lambda,t} = \sum_t (\Delta E^{Jvn\lambda,t}_{NR} - \Delta E^{0,t}). \qquad /20/$$

Значения всех указанных величин для мезомолекулы $dt\mu$ $(J=1, v=1)$ приведены в *табл.2* как подробная иллюстрация вычислительной процедуры. Для всех остальных известных стационарных состояний мезомолекул в *табл.3* приведены лишь значения поправок к энергии связи $\Delta\epsilon^{Jvn\lambda,t}$ и $\Delta\epsilon^{Jvn\lambda}$. Все эти состояния – "основные по мезонному движению" [4], поэтому общие для них квантовые числа $n=(0,0,0)$ и $\lambda=(-1)^J$ в обозначениях опущены.

Следует обратить внимание на то, что при вычислении поправок к энергии связи мезомолекул по формуле /20/ происходит заметное взаимное сокращение вкладов близких по величине значений $\Delta E^{Jvn\lambda,t}_{NR}$ и $\Delta E^{0,t}$ для $t=1,2,3$, чего не наблюдается в случае $t=4$ /см. *табл.2*/. Это указывает на то, что поправки на релятивистскую отдачу являются существенно трехчастичным эффектом, тогда как поправки на э.м. структуру частиц и на контактное и квадрированное кулоновское взаимодействия – по существу двухчастичные эффекты.

*Таблица 2*

Релятивистские поправки к нерелятивистскому уровню энергии $/J = 1,\ v = 1,\ n = (0,0,0),\ \lambda = -1/$ мезомолекулы $dt\mu$. Приведены превосходящие по модулю $10^{-5}$ эВ члены $v^{Jv,t}_{n_1 n_2 mp,\, n_1' n_2' m' p'}$ в разложении в ряд /17/-/19/ для матричных элементов операторов релятивистского взаимодействия $V^{(t)}$, $t=1,\ldots,4$, и парциальные суммы $v^{Jv,t}_{[2,0,0]}$ /мкэВ/, аппроксимирующие значения $\Delta E^{Jv,t}_{NR}$ с точностью $\sim 10^{-3}$ эВ; величины соответствующих поправок к энергиям связи мезоатома $\Delta E^{0,t}$, $\Delta E^{0}$ и мезомолекулы $\Delta\epsilon^{Jv,t}$, $\Delta\epsilon^{Jv}$/эВ.

| $n_1 n_2 mp$ | $n_1' n_2' m' p'$ | Поправки на э.м. структуру ($t$ = I) | Контактное взаимодействие ($t$=2) | Квадрированный кулон ($t$ = 3) | Релятивистская отдача ($t$ = 4) | Суммарная поправка |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $000_g$ | $000_g$ | +I39I44 | +II9449 | -244399 | +I30290 | +I44484 |
| $000_g$ | $000_u$ | -I7674 | -575 | +I676 | 0 | -I6573 |
| $000_u$ | $000_u$ | +27070 | +27I00 | -53953 | +298I7 | +30034 |
| $I00_g$ | $000_g$ | +38 | +36 | -64 | +37 | +47 |
| $I00_g$ | $000_u$ | -I4 | -0 | +I | 0 | -I3 |
| $I00_u$ | $000_g$ | -35 | -I | +4 | 0 | -32 |
| $I00_u$ | $000_u$ | +58 | +52 | -92 | +66 | +84 |
| $0I0_g$ | $000_g$ | -727 | -603 | +I060 | -729 | -999 |
| $0I0_g$ | $000_u$ | +55 | +2 | -5 | 0 | +52 |
| $200_g$ | $000_g$ | +I7 | +I5 | -26 | +I8 | +24 |
| $200_u$ | $000_u$ | +I3 | +I2 | -20 | +I5 | +20 |
| $020_g$ | $000_g$ | -97 | -80 | +I35 | -I00 | -I42 |
| $020_u$ | $000_u$ | +8 | +7 | -II | +9 | +I3 |
| $\Delta E^{Jv,t}_{NR}$ (эВ) | | 0,I478 | 0,I454 | -0,2957 | 0,I594 | +0,I570 |
| поправки к $1s$ уровню атома $t\mu^-$ $\Delta E^0$, $\Delta E^{0,t}$ (эВ) | | 0,I456 | 0,I460 | -0,2888 | +0,I070 | +0,I098 |
| поправки к энергии связи $\Delta\epsilon^{Jv,t}$, $\Delta\epsilon^{Jv}$ (эВ) | | +0,0022 | -0,0006 | -0,0069 | +0,0524 | +0,0472 |

Эффекты поляризации вакуума в данной работе не рассматривались, так как соответствующие члены в гамильтониане $H_-$ более высокого порядка по $\alpha$; однако из-за большой массы $\mu^-$ - мезона в ряде случаев они оказываются существенными. Поправки на поляризацию вакуума к энергии связи стационарных состояний мезомолекул /обозначенные как $\Delta\epsilon^{Jv,\,VP}$ / /16/,а также полный сдвиг

$$\Delta\epsilon^{Jv}_{tot} = \Delta\epsilon^{Jv} + \Delta\epsilon^{Jv,\,VP}$$



приведены в *табл.3*. Сравнение показывает, что для основного и низколежащих уровней мезомолекул в $\Delta\epsilon^{Jv}_{tot}$ доминирует именно вклад от $\Delta\epsilon^{Jv,\,VP}$ , в то время как для сильно возбужденных ротационных $(J>1)$ и особенно для вибрационных состояний

*Таблица 3*

Поправки к нерелятивистским уровням энергии мезомолекул изотопов водорода. Приведены /в эВ/ значения поправок: на искажение кулоновского потенциала на малых расстояниях за счет э.м. структуры ядер ($\Delta\epsilon^{Jv,1}$), на контактное ($\Delta\epsilon^{Jv,2}$) и квадрированное кулоновское ($\Delta\epsilon^{Jv,3}$) взаимодействия, на релятивистскую отдачу ($\Delta\epsilon^{Jv,4}$ ) и на поляризацию вакуума ($\Delta\epsilon^{Jv,\,VP}$), а также суммарный сдвиг $\Delta\epsilon^{Jv}_{tot}$ .

| Мезомолекула | Орбит. и вибрац. квантовые числа | Э.м. структура, $t$=I | Контактн. взаимод., $t$=2 | Квадрирован. кулон, $t$=3 | Отдача, $t$ = 4 | Поляризац. вакуума/I6/, $\Delta\epsilon^{Jv\,VP}$ | Полный сдвиг, $\Delta\epsilon^{Jv}_{tot}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $pp\mu$ | 0 0 | +0,0032 | +0,0I99 | -0,0684 | +0,0383 | -0,285 | -0,292 |
| | I 0 | +0,0002 | +0,00I3 | -0,0268 | +0,0225 | -0,064 | -0,067 |
| $pd\mu$ | 0 0 | -0,0660 | +0,0282 | -0,0740 | +0,0599 | -0,290 | -0,342 |
| | I 0 | -0,0737 | +0,0II0 | -0,037I | +0,0440 | -0,096 | -0,I52 |
| $pt\mu$ | 0 0 | -0,0390 | +0,0289 | -0,0758 | +0,0688 | -0,325 | -0,342 |
| | I 0 | -0,0438 | +0,0I22 | -0,0409 | +0,0532 | -0,I24 | -0,I43 |
| $dd\mu$ | 0 0 | +0,0386 | +0,025I | -0,0828 | +0,068I | -0,397 | -0,348 |
| | I 0 | +0,0I85 | +0,0I20 | -0,0494 | +0,0543 | -0,227 | -0,I96 |
| | 2 0 | -0,0037 | -0,0024 | -0,0I89 | +0,0395 | -0,0I6 | -0,002 |
| | 0 I | +0,0034 | +0,0022 | -0,0I76 | +0,0463 | -0,030 | +0,004 |
| | I I | -0,0094 | -0,00I0 | -0,0049 | +0,0440 | +0,008 | +0,037 |
| $dt\mu$ | 0 0 | +0,0624 | +0,0267 | -0,0864 | +0,0777 | -0,428 | -0,348 |
| | I 0 | +0,0476 | +0,0I47 | -0,0608 | +0,0648 | -0,267 | -0,20I |
| | 2 0 | +0,0293 | +0,0002 | -0,0273 | +0,0496 | -0,058 | -0,006 |
| | 0 I | +0,028I | +0,0033 | -0,022I | +0,0550 | -0,056 | +0,008 |
| | I I | +0,0022 | -0,0006 | -0,0069 | +0,0524 | -0,003 | +0,044 |
| $tt\mu$ | 0 0 | +0,0289 | +0,0290 | -0,0902 | +0,08I46 | -0,479 | -0,430 |
| | I 0 | +0,0I85 | +0,0I86 | -0,0683 | +0,070I | -0,329 | -0,290 |
| | 2 0 | +0,0047 | +0,0048 | -0,0376 | +0,0553 | -0,I30 | -0,I03 |
| | 3 0 | -0,0063 | -0,0063 | -0,0095 | +0,0440 | +0,044 | +0,066 |
| | 0 I | +0,0058 | +0,0058 | -0,0295 | +0,058I | -0,097 | -0,057 |
| | I I | +0,00I0 | +0,00II | -0,0I77 | +0,0533 | -0,034 | +0,004 |

$(v=1)$ определяющим оказывается вклад $\Delta\epsilon^{Jv}$ от исследуемых в данной работе эффектов. Среди них в первом случае самой большой является отрицательная по знаку поправка на квадрированное кулоновское взаимодействие $\Delta\epsilon^{Jv,3}$, однако при переходе к возбужденным состояниям ее величина, как и поправки на э.м. структуру ядер и на контактное взаимодействие, быстро убывают и доминирующей оказывается поправка на релятивистскую отдачу. В случае мезомолекулы $dt\mu\,(J=1,\ v=1)$ вклад от последней поправки составляет 80% суммарного сдвига уровня энергии и примерно 8% от величины энергии связи этого состояния.

## §5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным результатом данной работы является вычисление релятивистских и связанных с э.м. структурой ядер поправок к нерелятивистским уровням энергии мезомолекул изотопов водорода. В сочетании с величинами поправок на поляризацию вакуума, полученными ранее /16/, результаты данной работы позволяют вычислить полные сдвиги нерелятивистских уровней энергии с точностью $\sim 10^{-3}$ эВ.

В то же время остаются пока неучтенными эффекты поляризации ядер и экранировки полем молекулярных электронов; можно ожидать, что их вклад в энергию связи мезомолекулы не превзойдет $10^{-3}$ эВ. С вычислительной точки зрения открытым является вопрос о последовательном учете вклада в суммы /17/-/19/ от двухцентровых функций непрерывного спектра. Принципиальное значение имеет расчет вклада в энергию связи от парных взаимодействий, зависящих от движения центра масс пар частиц /таких, как взаимодействие Фолди-Крайчика $V^{(5)}$ /13//.

По предварительным оценкам, для $\mu^-$-мезомолекул изотопов водорода вклады от перечисленных эффектов $<10^{-3}$ эВ, однако дальнейшее увеличение точности расчетов энергетического спектра $\mu^-$-мезомолекул, а также последовательное рассмотрение других трехчастичных систем возможно только после решения этих проблем.

В заключение автор выражает глубокую благодарность С.И.Виницкому, Л.И.Пономареву и И.Т.Тодорову за поддержку и полезные обсуждения, и С.С.Герштейну за интерес к работе.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Для вычисления интегралов в правой стороне равенства /19/ необходимо найти выражения для операторов $V^{(t)}$, $t=1,\dots,5$,



из формул /9/-/13/ в координатах $R,\ \xi,\ \eta,\ \Phi,\ \theta,\ \phi$. Ниже приведены нужные формулы; при этом использованы следующие обозначения:

$$Q=\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)},\quad d_\xi=\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi^2-1)\frac{\partial}{\partial\xi},\quad d_\eta=\frac{\partial}{\partial\eta}(1-\eta^2)\frac{\partial}{\partial\eta},\quad D=\xi^2-\eta^2.$$

$$r_1=\frac{R}{2}(\xi+\eta),\quad r_2=\frac{R}{2}(\xi-\eta),$$

$$\vec{p}^{\,2}=-\frac{4}{R^2}\Big\{\frac{1}{\xi^2-\eta^2}(d_\xi+d_\eta)+\frac{1}{Q^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Big\},$$

$$\vec{P}^{\,2}=-\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}R^2\frac{\partial}{\partial R}+\frac{2}{R}\frac{1}{\xi^2-\eta^2}\Big(\xi(\xi^2-1)\frac{\partial}{\partial\xi}+\eta(1-\eta^2)\frac{\partial}{\partial\eta}\Big)\Big(\frac{1}{R}+\frac{\partial}{\partial R}\Big)-$$

$$-\frac{1}{R^2}\Big\{\frac{\xi^2+\eta^2-1}{\xi^2-\eta^2}(d_\xi+d_\eta)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\Phi^2}+$$

$$+\Big(\frac{\xi^2\eta^2}{Q^2}+\frac{2\xi\eta}{Q}\operatorname{cotg}\theta\cos\phi+\operatorname{cotg}^2\theta\Big)\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\frac{2\xi\eta}{Q}\sin\phi\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\phi}-\Big(\frac{2\xi\eta}{Q}\frac{\cos\phi}{\sin\theta}+$$

$$+\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\Big)\frac{\partial^2}{\partial\Phi\partial\phi}+\frac{2Q}{D}\Big(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta}-\sin\phi\operatorname{cotg}\theta\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\Phi}\Big)\Big(\xi\frac{\partial}{\partial\eta}-\eta\frac{\partial}{\partial\xi}\Big)\Big\},$$

$$(\vec{P}\vec{p})=-\frac{2}{R}\Big(\frac{1}{R}+\frac{\partial}{\partial R}\Big)\Big(\eta(\xi^2-1)\frac{\partial}{\partial\xi}+\xi(1-\eta)\frac{\partial}{\partial\eta}\Big)+\frac{2}{R^2}\frac{\xi\eta}{D}(d_\xi+d_\eta)+$$

$$+\frac{2}{R^2}\Big\{\Big(\frac{\xi\eta}{Q^2}+\frac{\operatorname{cotg}\theta\cos\phi}{Q}\Big)\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\frac{Q}{D^2}\Big(\operatorname{cotg}\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}-\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta}-$$

$$-\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\Phi}\Big)\Big(\xi\frac{\partial}{\partial\xi}-\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\Big)+\frac{\sin\phi}{Q}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\phi}-\frac{\cos\phi}{Q\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\Phi\partial\phi}\Big\},$$

$$(\vec{R}\vec{p})=-\frac{2i}{\xi^2-\eta^2}\Big(\eta(\xi^2-1)\frac{\partial}{\partial\xi}+\xi(1-\eta^2)\frac{\partial}{\partial\eta}\Big),$$

$$(\vec{R}\vec{p})^2=-\frac{4}{(\xi^2-\eta^2)^2}\Big\{\xi^2(1-\eta^2)d_\eta+\eta^2(\xi^2-1)d_\xi+2\xi\eta Q^2\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}+$$

$$+\frac{\xi(\xi^2-1)}{\xi^2-\eta^2}(\xi^2+3\eta^2-\eta^4-3\xi^2\eta^2)\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\eta(1-\eta^2)}{\xi^2-\eta^2}(\eta^2+3\xi^2-\xi^4-3\xi^2\eta^2)\frac{\partial}{\partial\eta}\Big\},$$

$$\Big(\vec{r}-\frac{1}{2}\vec{R}\Big)\cdot\Big(\vec{P}+\frac{1}{2}\vec{p}\Big)=\frac{i}{2}\Big\{(1-\xi\eta)\Big[R\frac{\partial}{\partial R}+\frac{1}{\xi+\eta}\Big((1-\eta^2)\frac{\partial}{\partial\eta}-(\xi^2-1)\frac{\partial}{\partial\xi}\Big)\Big]-$$

$$-\frac{Q^2}{\xi+\eta}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}\right)-Q\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\Phi}-\mathrm{cotg}\,\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\},$$

$$[(\vec{r}-\frac{1}{2}\vec{R})\cdot(\vec{P}+\frac{1}{2}\vec{p})]^2=-\frac{1}{4}\{(\frac{2}{\xi+\eta}-\eta)^2(\xi^2-1)\,d_\xi+(\frac{2}{\xi+\eta}-\xi)^2(1-\eta^2)\,d_\eta+$$

$$+[\frac{8(\xi^2-1)(\xi\eta+1)}{(\xi+\eta)^3}+\frac{\xi^2-1}{\xi+\eta}(\xi^2\eta^2+\xi\eta^3-\xi^2-2\eta^2+\xi\eta-4)]\frac{\partial}{\partial\xi}-$$

$$-[\frac{8(1-\eta^2)(\xi\eta+1)}{(\xi+\eta)^3}+\frac{1-\eta^2}{\xi+\eta}(\xi^2\eta^2+\xi^3\eta-\eta^2-2\xi^2+\xi\eta-4)]\frac{\partial}{\partial\eta}+$$

$$+2Q^2(2-\xi\eta-\frac{4}{(\xi+\eta)^2})\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}+2Q[(\xi\eta-1)+(\eta-\frac{2}{\xi+\eta})(\xi^2-1)\frac{\partial}{\partial\xi}+$$

$$+(\frac{2}{\xi+\eta}-\xi)(1-\eta^2)\frac{\partial}{\partial\eta}+(1-\xi\eta)R\frac{\partial}{\partial R}](\mathrm{cotg}\,\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}-\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}-$$

$$-\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta})+[Q^2-(\xi\eta-1)^2+2(1-\xi\eta)(\eta-\frac{2}{\xi+\eta})(\xi^2-1)\frac{\partial}{\partial\xi}+$$

$$+2(1-\xi\eta)(\frac{2}{\xi+\eta}-\xi)(1-\eta^2)\frac{\partial}{\partial\eta}]R\frac{\partial}{\partial R}+(1-\xi\eta)^2(R^2\frac{\partial^2}{\partial R^2}+R\frac{\partial}{\partial R})+$$

$$+Q^2[\cos^2\phi\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\sin^2\phi}{\sin^2\theta}\frac{\theta^2}{\partial\Phi^2}+\mathrm{cotg}^2\theta\sin^2\phi\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\frac{\sin2\phi}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\Phi\partial\theta}-$$

$$-2\sin2\phi\,\mathrm{cotg}\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\phi}-2\frac{\cos\theta\sin^2\phi}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\Phi\partial\phi}+\frac{\sin2\phi}{2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}+$$

$$+\mathrm{cotg}\,\theta\sin^2\phi\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\sin2\phi\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\Phi}]\}.$$

## ЛИТЕРАТУРА


1. Zavattini E. In: Muon Physics. Ed. V.W.Hughes and C.S.Wu. Academic Press, New York, 1975, vol.II.
2. Зельдович Я.Б., Герштейн С.С. УФН, 1960, 71, с.581; Весман Э.А. Письма в ЖЭТФ, 1967, 5, с.113; Gerstein S.S., Ponomarev L.I. Phys.Lett., 1977, 72B, 80, erratum 1978, 76B, p.664;





Виницкий С.И. и др. ЖЭТФ, 1979, 74, с.849; Быстрицкий В.М. и др. ЖЭТФ, 1979, 76, с.460.
3. Gerstein S.S., Ponomarev L.I. In: Muon Physics. Ed. V.W.Hughes, C.S.Wu. Academic Press, New York, 1975, vol.III.
4. Ponomarev L.I. Proc. of the Sixth Int.Conf.on Atomic Phys. August 17-22, 1978, Riga. Plenum Press, New York - London, 1979.
5. Foldy L.L., Krajcik R.A. Phys.Rev., 1975, D12, p.1700.
6. Бакалов Д.Д. ОИЯИ, Р4-13047, Дубна, 1979.
7. Бакалов Д.Д., Виницкий С.И. ОИЯИ, Р4-12736, Дубна, 1979.
8. Бакалов Д.Д. и др. ОИЯИ, Р4-13039, Дубна, 1979.
9. Ризов В.А., Тодоров И.Т. ЭЧАЯ, 1975, 6, №3, с.669.
10. Виницкий С.И., Пономарев Л.И. ЯФ, 1974, 20, с.579; Ponomarev L.I., Vinitsky S.I. J.Phys.B, 1979, 12, p.567; Ponomarev L.I. et al. J.Phys.B, 1978, 11, p.1375; Ponomarev L.I. et al. J.Phys.B, 1977, 10, p.1335.
11. Ситенко А.Г., Тартаковский В.К. Лекции по теории ядра. Атомиздат, М., 1972.
12. Wapstra A., Bos K. Atomic Data and Nucl. Data Tables, 1977, 19, p.177; Fuller G., Cohen V. Nuclear Moments. Appl.1 to Nucl.D.Sheets, 1965.
13. Review of Particle Properties, Particle Data Group, 1978.
14. Комаров И.В., Пономарев Л.И., Славянов С.Ю. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. "Наука", М., 1976; Пономарев Л.И., Пузынина Т.П. ОИЯИ, Р4-5040, Дубна, 1970.
15. Виницкий С.И. и др. ОИЯИ, Р5-13036, Дубна, 1979; Мележик В.С. и др. ОИЯИ, Р5-12789, Р5-12790, Дубна, 1979.
16. Melezhik V.S., Ponomarev L.I. Phys.Lett., 1978, 77B, p.217.


Рукопись поступила в издательский отдел
27 декабря 1979 года.