сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна



Р4 - 12774

Р.М.Ямалеев

# ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ
# ДЛЯ ТЕНЗОРА КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

1979

P4 - 12774

Р.М.Ямалеев

# ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ТЕНЗОРА КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Ямалеев Р.М. Р4 - 12774

Волновые уравнения для тензора кинетического момента

В работе аналогия между импульсом и кинетическим моментом, существующая в рамках уравнений Ньютона, обобщена на случай теории Гамильтона-Якоби. Получены уравнения на векторную функцию, являющиеся векторным аналогом уравнения Гамильтона-Якоби. В рамках квантовой механики выведены волновые уравнения для тензора кинетического момента. Рассмотрен случай релятивистской механики.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Yamaleev R.M. P4 - 12774

Wave Equations for the Tensor of Angular Momentum

Analogy between momentum and angular momentum existing in the frame of Newton's equation is generalized for the case of the Hamilton-Jacobi theory. The equations for the vector function presenting vector analog of the Hamilton-Jacobi equation are obtained. In the framework of quantum mechanics the wave equations for the tensor of angular momentum were derived. The case of relativistic mechanics has been considered.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979



Существует аналогия между двумя способами описания движения: 1/ в терминах силы и импульса и 2/ в терминах момента силы N и кинетического момента K. В первом случае динамические переменные описываются уравнением

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \qquad /1/$$

во втором -

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{N}, \qquad /2/$$

причем уравнение /2/ является следствием уравнения /1/ и определений

$$\vec{K} = [\vec{r} \times \vec{p}], \quad \vec{N} = [\vec{r} \times \vec{F}]. \qquad /3/$$

Аналогия между уравнениями /1/ и /2/ исходит из общности лагранжева формализма, где $\vec{K}$ и $\vec{N}$, если перейти в пространство обобщенных координат, являются обобщенными импульсом и силой. В настоящей работе предпринята попытка обобщить данную аналогию в рамках теории Гамильтона-Якоби. Интересно, что в этом случае мы имеем дело с векторной функцией Гамильтона-Якоби, которая удовлетворяет системе уравнений, аналогичных уравнениям Максвелла в электродинамике.

В теории Гамильтона-Якоби импульс и энергия представляются через некоторую скалярную функцию S:

$$\vec{p} = \mathrm{grad}\, S, \quad H = -\frac{\partial S}{\partial t}. \qquad /4/$$

Уравнение на S находится путем подстановки /4/ в известное соотношение между H и $\vec{p}$:

$$H = H(\vec{p}, x).$$

Ясно, что нельзя непосредственно распространить данную теорию на случай описания движения в терминах динамических величин $\vec{K}$ и $\vec{N}$, поскольку $\vec{K}$ не есть истинный вектор, а является антисимметричным тензором второго ранга с компонентами

$$K_{ij} = x_i p_j - x_j p_i \quad (i, j = 1,2,3). \qquad /5/$$

Дивергенция от этого выражения равна нулю. Действительно,

$$\operatorname{div}\vec{K} = \operatorname{div}[\vec{r} \times \operatorname{grad} S] = (\operatorname{grad} S \cdot \operatorname{rot}\vec{r}) - (\vec{r} \cdot \operatorname{rot}(\operatorname{grad} S)) = 0. \qquad /6/$$

Следовательно, $\vec{K}$ можно представить как ротор от некоторой векторной функции $\vec{A}$:

$$\vec{K} = \operatorname{rot}\vec{A}. \qquad /7/$$

Таким образом, если кинетический момент $\vec{K}$ является аналогом импульса $\vec{p}$, то в рамках теории Гамильтона-Якоби векторная функция $\vec{A}$ является аналогом скалярной функции $S$.

Между векторной функцией $\vec{A}$ и функцией Гамильтона-Якоби имеется простая связь

$$\vec{A} = -S\vec{r} + \operatorname{grad} f,$$

$f$ - неизвестная скалярная функция. Действительно, если подставить выражения для $\vec{A}$ в /7/, получим

$$\vec{K} = \operatorname{rot}[-S\vec{r} + \operatorname{grad} f] = -S\operatorname{rot}\vec{r} - [\operatorname{grad} S \times \vec{r}] + \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = [\vec{r} \times \vec{p}],$$

т.е. определение кинетического момента.

## 1. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛОГ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ

С целью вывода уравнения на векторную функцию $\vec{A}$ рассмотрим дифференциальную форму, записанную через векторное произведение, и преобразования Лежандра для данной векторной формы.

В теории Гамильтона-Якоби, зная частные производные

$$\frac{\partial S}{\partial \vec{x}} = \vec{p}, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -H, \qquad /8/$$

можно построить полный дифференциал функции S:

$$dS = (\vec{p}\, d\vec{x}) - H\, dt. \qquad /9/$$



Поставим перед собой следующую задачу: по данным

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{K} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{T} \qquad /10/$$

определить полный дифференциал функций $\vec{A}$ / $\vec{T}$ - векторный аналог гамильтониана $H$ /.

Решение задачи /10/ может быть достигнуто только с точностью до градиента от произвольной функции. Рассмотрим сначала простой случай $K = \mathrm{const}$, $T = 0$, тогда как известно,

$$\vec{A} = \frac{1}{2}[\vec{K} \times \vec{r}]. \qquad /11/$$

Решение общей задачи /10/ будем искать в виде дифференциальной формы

$$d\vec{A} = [\vec{K} \times d\vec{r}] - \vec{T}dt, \qquad /12/$$

которая является векторным аналогом формы /9/. Является ли данная форма полным дифференциалом? С целью ответа на данный вопрос раскроем правую часть выражения /12/, пользуясь определением /10/, получим

$$[\vec{K} \times d\vec{r}] - \vec{T}\, dt = d\vec{A} - \operatorname{grad}(d\vec{r}\vec{A}). \qquad /13/$$

Здесь $d\vec{A}$ есть полный дифференциал функции $\vec{A}$.Таким образом, выражение /12/ отличается от полного дифференциала на функцию

$$\delta\vec{F} = \operatorname{grad}(d\vec{r}\vec{A}). \qquad /14/$$

В силу неоднозначности в выборе функции $\vec{A}$, которая определена с точностью преобразования

$$\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} f, \qquad /15/$$

можно потребовать, чтобы $\delta\vec{F} = 0$, или

$$d\vec{r}\vec{A} = a\,dt. \qquad /16/$$

В дальнейшем условия /16/ мы будем использовать в виде

$$(\vec{p}\vec{A}) = a. \qquad /17/$$

С учетом /16/ полный дифференциал $\vec{A}$ можно записать в следующей форме:

$$d\vec{A} = [\vec{K} \times d\vec{r}] - \vec{T} dt, \qquad /18/$$

где

$$\vec{K} = \mathrm{rot}\,\vec{A}, \quad \vec{T} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

С другой стороны, $\vec{T}$ можно определить через $\vec{K}$. Искомое соотношение должно иметь такой вид, чтобы в частном случае постоянного $\vec{K}$ выражение /18/ приводилось к виду /11/. Данное соотношение должно соответствовать также выражению гамильтониана H через импульс $\vec{p}$:

$$H = \frac{1}{2m}\vec{p}^2. \qquad /19/$$

Этим условиям удовлетворяет вектор $\vec{T}$, определенный следующим образом:

$$\vec{T} = \frac{1}{2m}[\vec{K} \times \vec{p}]. \qquad /20/$$

Подставив в /20/ выражения /10/, находим систему уравнений на функцию $\vec{A}$:

$$-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{2m}[\mathrm{rot}\,\vec{A} \times \vec{p}], \qquad /21/$$

$$(\vec{p}\vec{A}) = a,$$

a - произвольная постоянная.

Уравнение /21/ является векторным аналогом уравнения Гамильтона-Якоби.

Векторный аналог уравнения Гамильтона-Якоби для $\vec{A}$ можно записать в другом виде, не выделяя условие /16/. Из /13/ следует, что

$$\vec{T} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}(\vec{v}\vec{A}). \qquad /22/$$

Приравнивая /20/ и /22/, приходим к следующему уравнению для $\vec{A}$:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\mathrm{grad}(\vec{v}\vec{A}) - \frac{1}{2}[\vec{K} \times \vec{v}], \qquad /23/$$

или с учетом формулы

$$\mathrm{grad}(\vec{v}\vec{A}) = (\vec{v}\,\nabla)\vec{A} + [\vec{v} \times \mathrm{rot}\,\vec{A}]$$

имеем:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -(\vec{v}\,\nabla)\vec{A} - \frac{1}{2}[\vec{v} \times \mathrm{rot}\,\vec{A}]. \qquad /24/$$



По внешнему виду уравнения /23/, /24/ напоминают уравнения движения идеальной жидкости в форме Бернулли:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = [\vec{v} \times \mathrm{rot}\,\vec{v}] + \mathrm{grad}\,\alpha,$$

или уравнение Эйлера для момента в виде "уравнения вихря":

$$\frac{\partial\, \mathrm{rot}\,\vec{v}}{\partial t} = [\vec{v} \times \mathrm{rot}\,\vec{v}].$$

Определяющими структуру теории являются формулы

$$\vec{K} = [\vec{r} \times \vec{p}] \quad \text{и} \quad \vec{T} = \frac{1}{2m}[\vec{K} \times \vec{p}].$$

На основе приведенных формул можно записать уравнения на $\vec{K}$ и $\vec{T}$, являющиеся эйкональным приближением волновых уравнений типа уравнений Максвелла

$$\vec{T} + \frac{1}{2m}[(\vec{p} + \frac{e}{c}\overset{+}{\vec{A}}) \times \vec{K}] = 0, {}^*$$

$$[(\vec{p} + \frac{e}{c}\overset{+}{\vec{A}}) \times \vec{T}] - (\mathcal{E} + e\overset{+}{\phi})\vec{K} = 0, \qquad /25/$$

$$((\vec{p} + \frac{e}{c}\overset{+}{\vec{A}})\vec{K}) = 0,$$

$$((\vec{p} + \frac{e}{c}\overset{+}{\vec{A}})\vec{T}) = 0.$$

## 2. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛОГ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ В СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В специальной теории относительности кинетический момент представляется антисимметричным тензором второго ранга с шестью независимыми компонентами

$$M_{iK} = x_i p_K - p_i x_K. \qquad /26/$$

Раскроем этот тензор в следующей матричной форме:

$$M_{iK} = \begin{pmatrix} 0 & K_1 & K_2 & T_1 \\ -K_1 & 0 & K_3 & T_2 \\ -K_2 & -K_3 & 0 & T_3 \\ -T_1 & -T_2 & -T_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, векторы $\vec{K}$ и $\vec{T}$ объединяются в один антисимметричный тензор, причем

---

$^*$ $(\overset{+}{\vec{A}}, -\overset{+}{\phi})$ - потенциалы внешнего поля.

$$\vec{K} = [\vec{r} \times \vec{p}\,],$$
$$\vec{T} = \vec{r}\mathcal{E} - \vec{p}t. \qquad /27/$$

В 4-мерном пространстве обобщением представления кинетического момента через векторную функцию $A$ является формула

$$M_{iK} = \frac{\partial A_i}{\partial x_K} - \frac{\partial A_K}{\partial x_i}, \qquad /28/$$

где $A_i$ - 4-мерный вектор с компонентами $(\vec{A}, \phi)$. Нетрудно заметить, что $M_{iK}$ аналогичен тензору электромагнитной напряженности. Аналогом вектора напряженности магнитного поля является вектор кинетического момента, представляющий пространственные компоненты тензора $M_{iK}$:

$$\vec{K} = \mathrm{rot}\,\vec{A}, \qquad /29/$$

аналогом вектора напряженности электрического поля является вектор $\vec{T}$, который входит во временные компоненты тензора $M_{iK}$ и имеет вид

$$\vec{T} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\phi. \qquad /30/$$

Формулы /29/ и /30/ дают первую группу уравнений Максвелла

$$\mathrm{rot}\,\vec{T} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{K}}{\partial t} = 0,$$
$$\mathrm{div}\,\vec{K} = 0. \qquad /31/$$

Аналог второй группы уравнений Максвелла можно получить, пользуясь формулами /27/. Умножим $\vec{K}$ векторно на $p$, а $\vec{T}$ на $\mathcal{E}$. Получим

$$[\vec{p} \times \vec{K}] = [\vec{p} \times [\vec{r} \times \vec{p}\,]] = r p^2 - \vec{p}(\vec{p}\,r), \qquad /32/$$

$$\vec{T}\mathcal{E} = \vec{r}\mathcal{E} - \vec{p}t\mathcal{E}. \qquad /33/$$

Вычитая /33/ из /32/, получим аналог второй группы уравнений Максвелла в эйкональном приближении:

$$[\vec{p} \times \vec{K}] - \vec{T}\mathcal{E} = \vec{j}, \qquad /34/$$
$$(\vec{p}\vec{T}) = \rho,$$



где

$$\vec{j} = m_0^2 r - I_0 p, \quad \rho = m_0^2 t - \mathcal{E} I_0, \qquad /35/$$

$m_0$ и $I_0$ - инварианты:

$$\mathcal{E}^2 - \vec{p}^{\,2} = m_0^2,$$
$$\mathcal{E}t - \vec{r}\vec{p} = I_0. \qquad /36/$$

Рассмотрим задачу, аналогичную определению $\vec{A}$ из уравнения $\vec{K} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$. В данном случае будем искать 4-мерный вектор из системы уравнений /28/, система /28/ определяет $A_i$ с точностью до преобразования

$$A_i' = A_i + \frac{\partial}{\partial x^i} f. \qquad /37/$$

Полный дифференциал $A_i$ через $M_{iK}$ можно записать так:

$$dA_i = dx^K M_{iK}, \qquad /38/$$

причем

$$dx^K A_K = a\,ds. \qquad /39/$$

Условие /39/, которое далее будем записывать в виде

$$p^K A_K = a \qquad /40/$$

является аналогом условия Лоренца в электродинамике.

Окончательно, в 4-мерной записи для тензора $M_{iK}$ получаем следующую систему уравнений:

$$p_K M_{ij} + p_i M_{jK} + p_j M_{Ki} = 0,$$
$$p_j M^{ij} = j^i, \qquad /41/$$
$$p^K A_K = a.$$

Как видно, система /41/ является полным аналогом уравнений Максвелла в 4-мерной записи в эйкональном приближении. Существенным моментом, что собственно и отличает данную систему от уравнений Максвелла, является то, что при движении в присутствии внешнего поля с потенциалами $A_i$ под $p_i$ необходимо иметь в виду удлиненные импульсы, т.е.

$$p_i \to p_i - \frac{e}{c}\overset{+}{A}_i\,. \qquad /42/$$

Отметим еще одну интересную особенность аналогий системы /41/ с уравнениями электродинамики Максвелла. Из уравнений Максвелла следует, что 4-мерная дивергенция векторного поля тока $j^i$ равна нулю:

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0\,.$$

Аналогом этого равенства является формула

$$p_i j^i = 0, \qquad /43/$$

где $j^i$ определен выражениями /35/, /36/.

## 3. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВЕКТОРА КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

### А. Нерелятивистский случай

Как уже было отмечено выше, система уравнений /25/ по внешнему виду напоминает уравнения Максвелла, записанные в приближении эйконала. Это сходство является особенно близким в релятивистском случае для системы /41/. Таким образом, имеет место ситуация, аналогичная ситуации, существующей для уравнения Гамильтона-Якоби, которое также имеет сходство с эйкональным приближением волнового уравнения, что и послужило в свое время путеводной нитью для вывода уравнения Шредингера. Подобные рассуждения в данном случае приводят к волновым уравнениям типа Максвелла.

Осуществим в нерелятивистском случае переход к волновой механике согласно известному рецепту, заменяя

$$p_i \quad \text{на оператор} \quad -i\hbar\frac{\partial}{\partial x^i}\,, \qquad /44/$$

$$\mathcal{E} \quad \text{на оператор} \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,.$$

Система /25/ при замене /44/ переходит в следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\vec{T} - \frac{i\hbar}{2m}\left[\frac{\partial}{\partial\vec{r}} \times \vec{K}\right] = 0,$$

$$-i\hbar\left[\frac{\partial}{\partial\vec{r}} \times \vec{T}\right] - i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\vec{K} = 0, \qquad /45/$$

$$-i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\vec{K}\right) = 0,$$

$$-i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\vec{T}\right) = 0.$$



Система уравнений /45/ описывает движение свободной волны. Если движение происходит в поле с 4-мерным векторным потенциалом $(\overset{+}{\vec{A}}, -\overset{+}{\phi})$, замена /44/ обобщается:

$$\vec{p} \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial\vec{x}} + \frac{e}{c}\overset{+}{\vec{A}}, \qquad /46/$$

$$\mathcal{E} \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\overset{+}{\phi}.$$

Система /45/ с учетом /46/ записывается соответственно следующим образом:

$$\vec{T} + \frac{i\hbar}{2m}\left[\frac{\partial}{\partial\vec{r}} \times \vec{K}\right] + \frac{e}{2mc}\left[\overset{+}{\vec{A}} \times \vec{K}\right] = 0,$$

$$-i\hbar\left[\frac{\partial}{\partial\vec{r}} \times \vec{T}\right] + \frac{e}{c}\left[\overset{+}{\vec{A}} \times \vec{T}\right] - i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\vec{K} + e\overset{+}{\phi}\vec{K} = 0, \qquad /47/$$

$$-i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\vec{K}\right) + \frac{e}{c}\left(\overset{+}{\vec{A}}\vec{K}\right) = 0, \quad -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\vec{T}\right) + \frac{e}{c}\left(\overset{+}{\vec{A}}\vec{K}\right) = 0\,.$$

Здесь $\left[\frac{\partial}{\partial\vec{r}} \times \vec{K}\right]$ и $\left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\vec{K}\right)$ обозначают $\mathrm{rot}\vec{K}$ и $\mathrm{div}\vec{K}$.

Рассмотрим эйкональное /квазиклассическое/ приближение для уравнения /47/.

Будем искать решение в виде

$$\vec{K} = e^{i\psi/\hbar}\left[\vec{K}_0 + \frac{1}{\hbar}\vec{K}_1 + \ldots\right],$$

$$\vec{T} = e^{i\psi/\hbar}\left[\vec{T}_0 + \frac{1}{\hbar}\vec{T}_1 + \ldots\right]. \qquad /48/$$

Подставив /48/ в /47/ и приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях $1/\hbar$, получим

$$\vec{T}_0 + \frac{1}{2m}\left[\left(\nabla\Psi + \frac{e}{c}\overset{+}{\vec{A}}\right) \times \vec{K}_0\right] = 0,$$

$$\left[\left(\nabla\Psi + \frac{e}{c}\overset{+}{\vec{A}}\right) \times \vec{T}_0\right] - \left(-\frac{\partial\Psi}{\partial t} + e\overset{+}{\phi}\right)\vec{K}_0 = 0, \qquad /49/$$

$$\left(\nabla\Psi + \frac{e}{c}\overset{+}{\vec{A}}\right)\vec{K}_0 = 0, \quad \left(\nabla\Psi + \frac{e}{c}\overset{+}{\vec{A}}\right)\vec{T}_0 = 0.$$

Поскольку $\nabla\Psi = \vec{p}$, $-\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \mathcal{E}$, уравнения /49/ совпадают с уравнениями /25/. Из последних двух уравнений системы /49/ следует, что векторы $\vec{T}_0$, $\vec{K}_0$ и $\nabla\Psi + \frac{e}{c}\overset{+}{\vec{A}}$ взаимно перпендикулярны. Исключим из системы /49/ вектор $T_0$, тогда

$$[(\nabla\Psi + \frac{e}{c}\overset{+}{\vec{A}}) \times [(\nabla\Psi + \frac{e}{c}\overset{+}{\vec{A}}) \times \vec{K}\ ] = (-\frac{\partial\Psi}{\partial t} + e\overset{+}{\phi})\vec{K}\ ,$$

$$(\nabla\Psi + \frac{e}{c}\overset{+}{\vec{A}})((\nabla\Psi + \frac{e}{c}\overset{+}{\vec{A}})\vec{K}\ ) - (\nabla\Psi + \frac{e}{c}\overset{+}{\vec{A}})\ \ \vec{K}\ = (-\frac{\partial\Psi}{\partial t} + e\overset{+}{\phi})\vec{K}\ .$$

Отсюда следует

$$(\nabla\Psi + \frac{e}{c}\overset{+}{\vec{A}}) = -\frac{\partial\Psi}{\partial t} + e\overset{+}{\phi},$$

т.е. уравнение Гамильтона-Якоби.

### Б. Релятивистский случай

Замена /46/ при переходе к волновым уравнениям остается в силе и в случае релятивистски-инвариантной теории. Запишем ее в 4-мерной форме:

$$p_i = -i\overset{+}{\hbar}\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{e}{c}\overset{+}{A}_i\ . \qquad /50/$$

Перепишем уравнения /41/ с учетом замены /50/:

$$(-i\overset{+}{\hbar}\frac{\partial}{\partial x^K} + \frac{e}{c}\overset{+}{A}_K)M_{ij} + (-i\overset{+}{\hbar}\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{e}{c}\overset{+}{A}_i)M_{jK} +$$

$$+ (-i\overset{+}{\hbar}\frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{e}{c}\overset{+}{A}_j)M_{Ki} = 0, \qquad /51/$$

$$(-i\overset{+}{\hbar}\frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{e}{c}\overset{+}{A}_j)M^{ij} = j^i\ .$$

Система уравнений /51/ отличается по виду от уравнений Максвелла присутствием внешнего поля $A_i$. Уравнения /51/ соответствуют уравнению Клейна-Гордона. Так же как и в нерелятивистском случае, эйкональным /квазиклассическим/ приближением уравнений /51/ является система /41/.

Интерпретация и решение полученных уравнений требуют специального исследования.

В заключение автор выражает благодарность А.Капустникову за стимулирующую дискуссию.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 сентября 1979 года.