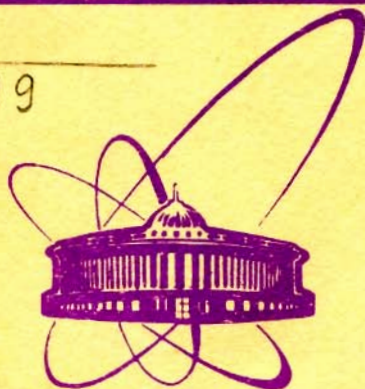


Б-19



объединенный  
институт  
ядерных  
исследований  
дубна

63 / 2-80

14/1-80

P4 - 12736

Д.Д.Бакалов, С.И.Виницкий

СПИНОВЫЕ ЭФФЕКТЫ В ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ  
С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

I. Сверхтонкая структура уровней  
энергии мезомолекулы  $pp\pi$

1979

P4 - 12736

Д.Д.Бакалов,\* С.И.Виницкий

СПИНОВЫЕ ЭФФЕКТЫ В ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ  
С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

I. Сверхтонкая структура уровней  
энергии мезомолекулы  $pp\mu$

*Направлено в ЯФ*

---

\*Институт ядерных исследований и ядерной  
энергетики, София, Болгария.

Бакалов Д.Д., Виноцкий С.И.

P4 - 12736

Спиновые эффекты в задаче трех тел  
с электромагнитным взаимодействием.

1. Сверхтонкая структура уровней энергии  
мезомолекулы  $pp\mu$

В работе построен приближенный /с точностью до членов порядка  $\alpha^2$  / оператор спинового взаимодействия системы трех частиц со спином  $1/2$ , учитывающий их электромагнитную структуру, в виде суммы парных спиновых операторов, полученных в квазипотенциальном подходе. Вычислена сверхтонкая структура уровней мезомолекулы  $pp\mu$  в орто-состоянии и ее  $\gamma_0$ -фактор.

Скорость реакции захвата  $\mu^-$ -мезона протоном в мезомолекуле  $pp\mu$  выражена через скорости захвата в мезоатоме  $p\mu$ .

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ

Препринт Объединенного института ядерных исследований, Дубна 1979

Bakalov D.D., Vinitsky S.I.

P4 - 12736

Spin Effects in the Three-Body Problem with  
Electromagnetic Interaction.

1. Superthin Structure of  $pp\mu$ -Mesic Molecule  
Energy Levels

An approximated (up to members of  $\alpha^2$  order accuracy) operator of spin interaction of the three-body system with  $1/2$  spin is constructed, taking into account their electromagnetic structure, as a sum of pair spin operators obtained in the quasipotential approach. A superthin structure of  $pp\mu$ -mesic molecule energy levels has been calculated in orthostate and its  $\gamma_0$ -factor. Reaction rate of  $\mu^-$ -meson capture with a proton in a  $pp\mu$  mesic molecule is expressed by capture rates in  $p\mu$  mesic atom. All calculations are performed in the adiabatic representation of the three-body problem.

The investigation has been performed at the  
Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы были развиты новые методы решения нерелятивистской задачи трех тел с кулоновским взаимодействием<sup>/1/</sup>. Они позволили описать с точностью, достаточной для уверенного сравнения с экспериментом, практически все  $\mu$ -атомные и  $\mu$ -молекулярные процессы в смеси изотопов водорода: упругое столкновение мезоатомов, процессы изотопного обмена, переходы между уровнями сверхтонкой структуры при столкновениях мезоатомов типа



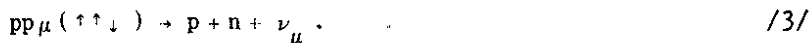
образование мезомолекул, например



и т.д. /см. обзоры /1,2/ /.

В настоящее время интерес к  $\mu^-$ -атомной физике сильно возрос в связи с постановкой и планированием новых экспериментов на мезонных фабриках. Для их интерпретации необходимо учитывать более тонкие эффекты в системе трех частиц /два ядра и  $\mu^-$ -мезон, см. /1/, /2//, обусловленные спинами частиц, их структурой, релятивистской кинематикой, поляризацией вакуума и т.д. Влияние этих релятивистских эффектов на структуру уровней системы трех частиц может оказаться значительным, как показывают, например, недавние вычисления поправок на поляризацию электрон-позитронного вакуума к уровням энергии  $\mu^-$ -мезомолекул изотопов водорода<sup>/4/</sup>.

Интерес к спиновым эффектам в процессах /1/, /2/ и сверхтонкой структуре (hfs) уровней энергии  $\mu^-$ -мезомолекул изотопов водорода, которые образуются в процессах /2/, обусловлен по крайней мере двумя причинами. Во-первых, они необходимы для определения скорости реакции захвата  $\mu^-$ -мезонов ядрами мезомолекул<sup>/5,6/</sup>:



Во-вторых, при описании процессов резонансного образования мезомолекул  $dd_\mu$  и  $dt_\mu$  необходимо знать их энергию связи с точностью  $\sim 0,01$  эВ, в то время как  $hfs$ -расщепление уровней мезоатомов составляет  $\sim 0,1$  эВ<sup>3/</sup>.

До настоящего времени спиновые эффекты в процессах /1/ рассматривались лишь в самом грубом приближении<sup>1,7/</sup>, а расщепление уровней рассчитано только для мезомолекул  $pd_\mu$ <sup>2/</sup> и  $pp_\mu$ <sup>6,8/</sup>.

В данной работе предложен способ построения эффективного гамильтониана системы трех частиц с электромагнитным взаимодействием, который можно использовать как для проведения аккуратных расчетов процессов /1/, /2/, так и для вычисления  $hfs$  всех  $\mu$ -мезомолекул изотопов водорода. Гамильтониан системы трех частиц определяется как сумма нерелятивистского гамильтониана<sup>9/</sup> и трех операторов парного спинового взаимодействия порядка  $\alpha^2$ , в которых внутренняя структура частиц учитывается путем введения их формфакторов /§2/. Эти операторы были недавно получены в рамках квазипотенциального подхода<sup>10/</sup> в работе<sup>11/</sup>. В вычислениях используется адиабатический базис<sup>12/</sup> и развитый на его основе адиабатический метод решения нерелятивистской задачи трех тел<sup>18/</sup>.

В качестве первого применения предложенного подхода для мезомолекулы  $pp_\mu$  в явном виде построен эффективный гамильтониан /§4/ - путем усреднения исходного гамильтониана /§2/ по волновой функции мезомолекулы  $pp_\mu$  в адиабатическом представлении /§3/. Вычислено  $hfs$ -расщепление уровней энергии мезомолекулы  $pp_\mu$  в основном состоянии по мезонному ( $1s\sigma_g$ ) и вибрационному ( $v=0$ ) движениям, с полным орбитальным моментом  $J=1$  и в орто-состоянии спинов ядер ( $I=1$ ), в котором она образуется в реакции /2/ /§5/. Вычислено также отношение вероятностей нахождения  $\mu^-$ -мезона вблизи протона для мезомолекулы  $pp_\mu$  и мезоатома  $p_\mu$  /так называемый  $\gamma_0$ -фактор/, а для скорости  $\mu^-$ -захвата в мезомолекуле  $pp_\mu$  /3/ по формулам Вайнберга<sup>15/</sup> и Хальперна<sup>16/</sup> получено явное выражение через скорости  $\mu^-$ -захвата в синглетном и триплетном состояниях атома  $p_\mu$ . Результаты сравниваются с результатами работ других авторов, и обсуждается вопрос о точности вычисления в адиабатическом представлении /§§5,6/.

## 2. ОПЕРАТОР СПИНОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СИСТЕМЫ ТРЕХ ЧАСТИЦ СО СПИНАМИ 1/2

Гамильтониан  $H$  системы трех частиц  $i=a, b, c$  с массами  $M_a=M_b=M_p$  и  $M_c=M_\mu$ , зарядами  $Z_i=e$ ,  $Z_a=Z_b=-Z_c=1$ , спи-

нами  $s_i = 1/2$  и магнитными моментами  $(1 + A^{(i)})^*$  в системе покоя их центра масс представляется в виде суммы:

$$H = H_{NR} + V^{\text{spin}} \quad /4/$$

В координатах Якоби  $(\vec{R}, \vec{r})$  /см. Приложение 1/ нерелятивистский гамильтониан  $H_{NR}$  имеет вид<sup>9/</sup> ( $e = \hbar = m_a = 1$ ,  $m_a^{-1} = M_a^{-1} + M_b^{-1}$ ):

$$H_{NR} = (2M)^{-1} \left( V_{\vec{R}}^2 - \frac{1}{4} V_{\vec{r}}^2 \right) + h_0 + \frac{1}{R}, \quad /5/$$

где

$$M = M_0 / m_a, \quad M_0^{-1} = M_a^{-1} + M_b^{-1},$$

$$h_0 = -\frac{1}{2} \Delta_{\vec{r}} - \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}, \quad r_{a,b} = \left| \vec{r} \pm \frac{1}{2} \vec{R} \right|, \quad R = |\vec{R}|. \quad /5'/$$

Оператор  $V^{\text{spin}}$  включает спиновые поправки порядка  $\alpha^2$ . В этом приближении трехчастичные силы отсутствуют<sup>14/</sup>, поэтому  $V^{\text{spin}}$  строится в виде суммы

$$V^{\text{spin}} = V_{ac}^{\text{spin}} + V_{bc}^{\text{spin}} + V_{ab}^{\text{spin}} \quad /6/$$

Явное выражение для операторов  $V_{ij}^{\text{spin}}$  парного спинового взаимодействия, учитывающих электромагнитную структуру частиц, получено<sup>11/</sup> в квазипотенциальном подходе Тодорова<sup>10/</sup> на основе двухчастичного квазипотенциального уравнения для пары (ij), записанного в системе покоя их центра масс<sup>\*\*</sup>

$$\left( H_{ij}^{\text{QP}} - \frac{b^2(w)}{2E(w)} \right) \Phi_w(\vec{r}) = 0, \quad /7/$$

где

$$H_{ij}^{\text{QP}} = H_{ij}^{\text{NR}} + V_{ij}^{\text{diag}} + V_{ij}^{\text{spin}}, \quad \vec{r} = \vec{R}_i - \vec{R}_j, \quad /8/$$

$$H_{ij}^{\text{NR}} = -(2m_{ij})^{-1} \Delta_{\vec{r}} + \frac{Z_i Z_j \alpha}{r}, \quad r = |\vec{r}|,$$

\* В единицах  $e\hbar/(2M_0c) / A^{(i)}$  - аномальный магнитный момент/.

\*\* В формулах /7/-/10/ используются общие для всех пар (ij) единицы  $\hbar = c = 1$ .

а  $V_{ij}^{diag}$  и  $V_{ij}^{spin}$  определены с точностью до членов порядка не выше  $\alpha^2$ :

$$V_{ij}^{diag} = Z_i Z_j \alpha \left\{ \frac{f_{11}^{(ij)} - 1}{r} - \frac{\alpha Z_i Z_j}{2m_{ij}} \frac{(f_{11}^{(ij)})^2}{r^2} - \right. \quad /9/$$

$$\left. - \frac{1}{4m_i m_j} \left\{ \left( 1 + \frac{M_i}{2M_j} + \frac{M_j}{2M_i} \right) \hat{f}_{11}^{(ij)} + A^{(ij)} \frac{M_j}{M_i} \hat{f}_{21}^{(i)} + A^{(j)} \frac{M_i}{M_j} \hat{f}_{12}^{(ij)} \right\} \right\} I^{spin},$$

$$V_{ij}^{spin} = - \frac{\alpha Z_i Z_j}{M_i M_j} \left\{ \left[ \left( 1 + \frac{M_j}{2M_i} \right) \bar{f}_{11}^{(ij)} + A^{(i)} \left( 1 + \frac{M_j}{M_i} \right) \bar{f}_{21}^{(ij)} \right] (\vec{L}_{ij} \vec{s}_i) + \right. \quad /10/$$

$$\left. + \left[ \left( 1 + \frac{M_i}{2M_j} \right) \bar{f}_{11}^{(ij)} + A^{(j)} \left( 1 + \frac{M_i}{2M_j} \right) \bar{f}_{12}^{(ij)} \right] (\vec{L}_{ij} \vec{s}_j) + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3} (\hat{f}_{11}^{(ij)} + A^{(j)} \hat{f}_{12}^{(ij)} + A^{(i)} \hat{f}_{21}^{(ij)} + A^{(i)} A^{(j)} \hat{f}_{11}^{(ij)}) (\vec{s}_i \vec{s}_j) + \right.$$

$$\left. + (\bar{f}_{11}^{(ij)} + A^{(j)} \bar{f}_{12}^{(ij)} + A^{(i)} \bar{f}_{21}^{(ij)} + A^{(i)} A^{(j)} \bar{f}_{22}^{(ij)}) \times \right.$$

$$\left. \times \left[ 3 \frac{(\vec{r} \vec{s}_i)(\vec{r} \vec{s}_j)}{r^2} - (\vec{s}_i \vec{s}_j) \right] \right\}.$$

Здесь  $f_{kl}^{(ij)}$ ,  $\hat{f}_{kl}^{(ij)}$ ,  $\bar{f}_{kl}^{(ij)}$ ,  $\bar{\bar{f}}_{kl}^{(ij)}$  ( $k, l = 1, 2$ ) - функции форм-факторов частиц /см. Приложение 2/, а  $E$  и  $b$  - функции энергии  $w$  пары  $(ij)$  в системе покоя ее центра масс /10/:

$$w = M_i + M_j + \alpha^2 E_{ij}^{NR} + O(\alpha^4),$$

$$b^2/2E = E_{ij}^{NR} + O(\alpha^2), \quad E = m_{ij} + O(\alpha^2),$$

где  $m_{ij} = (M_i^{-1} + M_j^{-1})^{-1}$  - приведенная масса пары  $(ij)$ , а  $E_{ij}^{NR}$  - ее нерелятивистская энергия;  $I^{spin}$  - единичный оператор в спиновом пространстве пары  $(ij)$ , а  $V_{ij}^{diag}(V_{ij}^{spin})$  - диагональная /недиагональная/ по спинам часть квазипотенциала;  $\vec{L}_{ij} = -i \vec{r} \times \vec{V}_r$  - орбитальный момент пары  $(ij)$ .

Построение  $H$  в виде /4/, где  $V^{spin}$  /6/ есть сумма  $V_{ij}^{spin}$ , определенных в /10/, основано на их инвариантности /с точностью до членов  $O(\alpha^2)$ / относительно лоренцевых преобразований буста от системы покоя центра масс пары  $(ij)$  к сис-





который складывается из полного орбитального момента  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{\ell}$  и полного момента  $\vec{s}$ ;  $\vec{J} = \vec{J} + \vec{s}$ :

$$\langle R, r | \vec{J} \lambda \vec{J}_3 \rangle = \sum_{M, s_3} C(\vec{J} s, \vec{J}_3 M s_3) \Psi_M^{J\lambda}(\vec{R}, \vec{r}) X_{s_3}^s, \quad /12/$$

где  $C(\vec{J} s, \vec{J}_3 M s_3)$  - коэффициенты Клебша-Гордана /15/.

Координатная волновая функция  $\Psi_M^{J\lambda}(\vec{R}, \vec{r})$  с квантовыми числами  $J, M$  и  $\lambda = +(-)^J$  /собственными значениями орбитального момента, его третьей проекции на ось  $Z$  фиксированной системы координат и полной четности/ является решением нерелятивистского уравнения Шредингера с гамильтонианом  $H_{NR}^{(5)}$  /9/ :

$$(H_{NR}(\vec{R}, \vec{r}) - E_{NR}) \Psi_M^{J\lambda}(\vec{R}, \vec{r}) = 0, \quad /13/$$

где  $E_{NR}$  - энергия системы трех частиц в системе их центра масс. Волновая функция  $\Psi_M^{J\lambda}(\vec{R}, \vec{r})$  связана с функцией  $\Psi_m^{J\lambda}(R00, \vec{r})$  во вращающейся системе координат, ось  $z$  которой направлена по вектору  $\vec{R}$ , соотношением /см. Приложение 3/

$$\Psi_M^{J\lambda}(R\Theta\Phi, \vec{r}) = \sum_{m=0}^J \Psi_m^{J\lambda}(R00, \vec{r}) D_{mM}^{J\lambda}(\Phi\Theta\phi), \quad /14/$$

где

$$D_{mM}^{J\lambda}(\Phi\Theta\phi) = [2(1 + \delta_{0m})]^{-1/2} \cdot \left(\frac{2J+1}{8\pi^2}\right)^{1/2} \times \\ \times [(-1)^m D_{mM}^J(\Phi\Theta\phi) + D_{-mM}^J(\Phi\Theta\phi)], \quad m \geq 0.$$

Здесь  $D_{mM}^J(\Phi\Theta\phi)$  -  $D$  - функции Вигнера, определенные в работе /15/.

В адиабатическом представлении /13/ вектор  $\vec{r}$  задается вытянутыми сфероидальными координатами  $(\xi, \eta, \phi = 0)$  /см. Приложение 3/, а волновая функция  $\Psi_m^{J\lambda}$  разлагается по полному набору собственных функций гамильтониана  $h_0$  /5/ задачи двух кулоновских центров /12/:

$$\Psi_m^{J\lambda}(R00, \xi\eta 0) = R^{-1} \sum_{n_2} [\sum_{n_1} N_{n_1 n_2 m}(R) \Pi_{m n_1}(\xi; R) \Xi_{m n_2}(\eta; R) \chi_{n_1 n_2 m}^{J\lambda}(R) + \\ + \int dk N_{n_2 m}(k, R) \Pi_m(\xi; k, R) \Xi_{m n_2}(\eta; R) \chi_{n_2 m}^{J\lambda}(k, R)],$$

где  $\Pi$  и  $\Xi$  - "радиальная" и "угловая" кулоновские сфероидальные функции /К.С.Ф./, а  $N$  - их общий нормировочный множитель,  $n_1 n_2 m$  - параболические квантовые числа,  $k$  - импульс  $\mu^-$ -мезона в задаче двух центров. При  $Z_a = Z_b$  решения задачи двух центров характеризуются также четностью  $\mu^-$ -мезона - собственными значениями  $p = g, u$  оператора инверсии координат  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$  /12/. Волновые функции  $\chi_{jmg}^{J\lambda}(R) = \{ \chi_{n_1 n_2 m g}^{J\lambda}(R), \chi_{n_2 m g}^{J\lambda}(k, R) \}$  определены /16/ как ограниченные регулярные решения задачи Штурма-Лиувилля для системы обыкновенных интегродифференциальных уравнений /13/, к которой сводится уравнение /13/ после подстановки в него разложения /14/, /14'/

$$\bar{\Psi}_M^{J\lambda}(\vec{r}, \vec{r}) = \sum_{m=0}^J \sum N_{mjg}^{-1}(R) \Pi_{mjg}(\xi, R) \Xi_{mjg}(\eta; R) \chi_{jmg}^{J\lambda}(R) D_{mm}^{J\lambda}(\Phi \Theta \phi) \quad /14''/$$

и усреднения по всем координатам, кроме  $R$  /9/.

В принятой схеме сложения спинов, в которой спины протонов  $\vec{s}_a$  и  $\vec{s}_b$  складываются в суммарный спин ядер  $\vec{I} = \vec{s}_a + \vec{s}_b$  и последний после сложения со спином  $\mu^-$ -мезона  $\vec{s}_c$  дает полный спин  $\vec{s} = \vec{I} + \vec{s}_c$ , постоянный спинор  $\chi_{s_3}^s$  /12/ имеет вид:

$$\chi_{s_3}^s = \sum_{I_3, \zeta_a, \zeta_b, \zeta_c} (s I s_c, s_3 I_3 \zeta_c) (I s_a s_b, I_3 \zeta_a \zeta_b) \chi_{\zeta_a}^{s_a} \chi_{\zeta_b}^{s_b} \chi_{\zeta_c}^{s_c}. \quad /15/$$

Здесь  $s, I, s_a, s_b, s_c$  - квантовые числа соответствующих спинов, а  $s_3, I_3, \zeta_a, \zeta_b, \zeta_c$  - квантовые числа их проекций на ось  $Z$  фиксированной системы координат;  $\chi_{\zeta_a}^{s_a}, \chi_{\zeta_b}^{s_b}, \chi_{\zeta_c}^{s_c}$  - постоянные спиноры частиц  $a, b, c$ .

Для вычисления hfs системы трех частиц в состоянии  $|J\lambda g_3\rangle$  с определенным полным орбитальным моментом  $J$  следует использовать разложение вектора состояния системы

$$|J\lambda g_3\rangle = \sum_{SI} \beta_{gSI} |J S I \lambda, g_3\rangle \quad /12'/$$

по собственным векторам операторов  $\vec{J}^2, \vec{J}^2, \vec{s}^2, \vec{I}^2, \vec{J}^2$ .

#### 4. ЭФФЕКТИВНЫЙ СПИНОВЫЙ ГАМИЛЬТониАН

В конкретных расчетах мезомолекулы  $pp\mu$  ( $v=0, J=1$ )  $\mu^-$ -мезон рассматривался как частица, не обладающая электромагнит-

ной структурой с аномальным магнитным моментом  $0,00117$  /в единицах  $\frac{e\hbar}{(2M_\mu c)}$  /. Дираковский и паулиевский форм-факторы протона аппроксимировались функциями переданного

импульса  $q$  типа  $\sum_{n=1}^N \frac{c_n}{(1+q^2/\Lambda_n^2)^{k_n}}$ . Аппроксимация осуществлена

методом Александра /17/. Для приведенных в Приложении 1 значений  $c_n$ ,  $\Lambda_n$ ,  $k_n$ ,  $n=1,2$  результаты такой аппроксимации отличаются от результатов Биленькой /18/ менее чем на  $0,1\%$  для  $q^2 < 1$  ГэВ<sup>2</sup>/с<sup>2</sup> и менее чем на  $1\%$  для  $q^2 < 5$  /ГэВ/с<sup>2</sup>.

Оператор спинового взаимодействия /6/ имеет простую структуру:

$$V^{spin} = \sum_{a=1}^{15} V_{(a)}^{spin} = \sum_{a=1}^{15} v_{(a)} G_{(a)}(R, \xi, \eta) A_{(a)} \hat{B}_{(a)}, \quad /16/$$

где  $v_{(a)}$  - постоянные коэффициенты, включающие общий множитель  $a^2/M_\mu M_p$ , аномальные магнитные моменты частиц и отношение  $\mu = M_\mu/M_p$ ;  $G(R, \xi, \eta)$  - скалярные множители, представляющие одну из функций  $\tilde{f}_{(n)}$ ,  $\bar{f}_{(n)}$  или  $\hat{f}_{(n)}$ ,  $n=1, \dots, 5$ , с аргументами  $r_{a,b} = \frac{R}{2}(\xi \pm \eta)$  или  $R$  /см. Приложение 2/;  $A_{(a)}$  - тензорные операторы, содержащие операторы  $\bar{L}$ ,  $\bar{\Lambda}$ ,  $\bar{\ell}$ ,  $\bar{\lambda}$ ,  $T_{ac}$ ,  $T_{bc}$  и  $T_{ab}$  /см. Приложение 1/, действующие на координатные функции  $\Psi_M^{J\lambda}$  /14/;  $\hat{B}_{(a)}$  - тензорные спиновые операторы, действующие на спиновую функцию  $\chi_{s_3}^s$  /15/.

Так как оператор  $V^{spin}$  коммутирует с третьей проекцией  $J_3$  полного момента  $J$ , то вычисление hfs мезомолекулы  $pp\mu$  в состоянии ( $v=0, J=1$ ) сводится к нахождению собственных значений эффективного спинового гамильтониана  $H^{eff}$ , действующего в пятимерном пространстве, натянутом на вектора  $|J, J_3, I, I_3\rangle$ , которые входят в разложение /12'/ для вектора состояния с фиксированными  $J=1, I=1$ :

$$|J=1, I=1\rangle = \beta_{1/2, 1/2} |1/2, 1/2\rangle + \beta_{1/2, 3/2} |1/2, 3/2\rangle + \beta_{3/2, 1/2} |3/2, 1/2\rangle + \beta_{3/2, 3/2} |3/2, 3/2\rangle + \beta_{5/2, 3/2} |5/2, 3/2\rangle \quad /17/$$

/здесь индексы  $\lambda$ ,  $J_3$ ,  $J=1$  и  $I=1$  опущены:  $|J, J_3, I, I_3\rangle \equiv |J, J_3, I, I_3\rangle$ /. Матричные элементы  $H^{eff}$  с учетом сохранения  $J_3^2$  и формул /12/, /15/, /16/ и /17/ имеют вид:

$$\begin{aligned}
 (H^{\text{eff}})_{\mathcal{J}_3, \mathcal{J}'_3} &= \langle \mathcal{J}_3 | V^{\text{spin}} | \mathcal{J}'_3 \rangle \delta_{\mathcal{J}_3 \mathcal{J}'_3} \\
 &= \sum_a v_{(a)} \langle \mathcal{J} S I \lambda, \mathcal{J}_3 | G_{(a)} A_{(a)} \hat{B}_{(a)} | \mathcal{J} S I \lambda, \mathcal{J}_3 \rangle = \quad /18/ \\
 &= \sum_a v_{(a)} \sum_{M, M'} C(\mathcal{J} S, \mathcal{J}_3 M S_3) C(\mathcal{J} S', \mathcal{J}_3 M S'_3) \langle J \lambda M | G_{(a)} A_{(a)} | J \lambda M \rangle \times \\
 &\quad \times (\bar{X}_s^s B_{(a)} X_{s_3}^{s'_3}).
 \end{aligned}$$

Теорема Вигнера-Эккарта позволяет выразить матричные элементы  $A_{(a)}$  между векторами состояния с орбитальным моментом  $J$  через матричные элементы тензорного оператора  $\hat{A}_{(a)}$  того же ранга, построенного из генераторов  $\mathcal{L}_i^J$  представления ( $J$ ) группы  $SU(2)$  между базисными векторами  $|\underline{JM}\rangle$  этого представления. Для векторных операторов  $L$ ,  $\bar{L}$ ,  $\hat{A}$  и  $\hat{\Lambda}$

$$\langle J \lambda M | G_{(a)} A_{(a)ij} | J \lambda M \rangle = I_{(a)} \langle \underline{JM} | \hat{A}_{(a)ij} | \underline{JM} \rangle = I_{(a)} \langle \underline{JM} | \mathcal{L}_i^J | \underline{JM} \rangle, \quad /19'/$$

где  $I_{(a)} = k_{(a)} \langle 11 | G_{(a)} A_{(a)33} | 11 \rangle$ ,  $k_{(a)} = 1$ ,  $i = 1, 2, 3$ ; тогда как для тензорного  $T$

$$\begin{aligned}
 \langle J \lambda M | G_{(a)} A_{(a)ij} | J \lambda M \rangle &= I_{(a)} \langle \underline{JM} | \hat{A}_{(a)ij} | \underline{JM} \rangle = \quad /19''/ \\
 &= I_{(a)} \langle \underline{JM} | \frac{\mathcal{L}_i^J \mathcal{L}_j^J + \mathcal{L}_j^J \mathcal{L}_i^J}{2} - \frac{2}{3} \delta_{ij} | \underline{JM} \rangle, I_{(a)} = k_{(a)} \langle 11 | G_{(a)} A_{(a)33} | 11 \rangle, \\
 &\quad k_{(a)} = 3.
 \end{aligned}$$

В адиабатическом представлении величины  $I_{(a)}$  выражаются через матричные элементы по КСФ:

$$\begin{aligned}
 I_{(a)} &= k_{(a)} \sum_{mm'} \sum_{jj'} \int_0^\infty dR \chi_{jm}^{J\lambda}(R) \cdot N_{jm}(R) \times \\
 &\times \left\{ \frac{R^3}{8} \int_1^\infty d\xi \int_{-1}^1 d\eta (\xi^2 - \eta^2) \Pi_{mj}(\xi; R) \Xi_{mj}(\eta; R) G_{(a)}(R, \xi, \eta) \times \quad /20/ \right. \\
 &\times A_{(a)mm'}(R, \xi, \eta) \Pi_{m'j'}(\xi; R) \Xi_{m'j'}(\eta; R) \left. N_{j'm'}(R) \chi_{j'm'}^{J\lambda}(R) \right\}
 \end{aligned}$$

где  $\bar{A}_{(a)mm'}$  - усредненные по углам  $\beta$ -и /или  $\beta\beta$ -и/ компоненты оператора  $A_{(a)}$ :

Таблица 1

Коэффициенты  $E_i$  эффективного спинового гамильтониана /23/ /эВ/; уровни энергии  $hfs E_i^{(j)}$  /эВ/; вероятность  $\xi$  (26) состояния со спином  $s=1/2$ ;  $\gamma_0$  - фактор; скорость  $\omega_{pp\mu}$   $\mu^-$  -захвата в мезомолекуле

	Halpern /6/	Halpern /8/	Данная работа
$E_1$	-0,00043 $\pm$ 5%	-0,000444 $\pm$ 0.8%	-0,000320 <sup>*</sup> )
$E_2$	+0,00274 $\pm$ 2%	+0,002229 $\pm$ 0.8%	+0,001324
$E_3$	+0,1077 $\pm$ 2%	+0,0922 $\pm$ 0.5%	+0,091689
$E_4$	-0,00292 $\pm$ 6%	-0,003003 $\pm$ 0.8%	-0,002927
$E_5$	+0,00072 $\pm$ 10%	+0,000640 $\pm$ 0.8%	+0,000639
$E(5/2)$	+0,055	+0,0467	+0,04581
$E(3/2)$	+0,051	+0,0472	+0,04714
$E(3/2)$	-0,108	-0,0929	-0,09212
$E(1/2)$	+0,055	+0,0431	+0,04345
$E(1/2)$	-0,106	-0,0910	-0,09090
$\xi$	0,999	0,9994	0,99960
$2\gamma_0$	1,18	1,01	1,009
$\omega_{pp\mu}$			$\omega_c + \omega_i$

Таблица 2

Значения коэффициентов  $E_i$  в эВ, полученные из /23/ заменой каждого  $I_{(a)}$  на частичную сумму ряда /20/, в которой суммирование проводилось в пределах  $0 \leq m, m' \leq \bar{m}$  и  $1 \leq (n_1 + n_2 + m + 1), (n'_1 + n'_2 + m' + 1) \leq \bar{n}$  по классификации разъединенного атома /22/

$\bar{m}$	$\bar{n}$	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$
0	1	-0,000318	+0,001344	+0,092689	-0,002879	0,000639
0	2	-0,000313	+0,001361	+0,091762	-0,002905	0,000639
0	3	-0,000313	+0,001364	+0,091688	-0,002917	0,000639
1	3	-0,000320	+0,001324	0,091688	-0,002927	0,000639

\*Значение масс: протона - 938,28 МэВ/с;  $\mu^-$  -мезона - 105,66 МэВ/с и аномальных магнитных моментов - соответственно 1,7928 я.м. и 0,0012 ( $\frac{eh}{2M\mu c}$ );  $1/a = 137,036$ .

$$\bar{A}_{(a)mm'}(R, \xi, \eta) = \int_0^\pi \sin \Theta d\Theta \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^{2\pi} d\phi \bar{D}_{m1}^{J\lambda} A_{(a)3} \text{ (или } 33) D_{m'1}^{J\lambda} / 21/$$

Интегрирование /21/ выполнено аналитически; в Приложении 3 приведены выражения для  $A_{(a)3}$  /или 33/ и  $\bar{A}_{(a)mm'}$ . Интегрирование по  $\xi$  и  $\eta$  осуществлялось по специально созданной программе, реализованной на ЭВМ CDC-6500, КСФ II и III разлагались в ряды с коэффициентами, вычисленными по рекуррентным соотношениям /12, 19/. Далее проводилось переразложение этих рядов в терминах новой переменной  $(\xi - \eta)$  с последующим аналитическим интегрированием по ней и численным - по  $\xi$ . Интегрирование по R проводилось также численно с функциями  $\chi_{jm}^{J\lambda}$ , полученными при решении задачи Штурма-Лиувилля для системы интегродифференциальных уравнений /13/ согласно алгоритму /16/. Требуемая точность вычисления была достигнута суммированием в /20/ по всем  $(jmg)$ ,  $(j'm'g)$ , указанным в табл. 2. /Для ядер равных масс  $\chi_{jmu}^{J\lambda}$  тождественно равны нулю/.

После подстановки правых частей /19'/ и /19''/ с полученными описанным выше методом значениями  $I_{(a)}$  /20/ в цепочку равенств /18/ матричные элементы эффективного спинового гамильтониана  $H^{eff}$  примут вид:

$$(H^{eff})_{\mathcal{J}_s, \mathcal{J}_s'} = \langle \mathcal{J} S I, \mathcal{J}_3 | \sum_a k_{(a)} v_{(a)} I_{(a)} \hat{A}_{(a)} \hat{B}_{(a)} | \mathcal{J} S I, \mathcal{J}_3 \rangle, /22/$$

где  $|\mathcal{J} S I, \mathcal{J}_3\rangle$  - базисные векторы компоненты  $(\mathcal{J})$  прямого произведения представлений  $(J) \otimes (s')$ . Равенство /22/ позволяет интерпретировать  $H^{eff}$  как оператор в пространстве прямых произведений представлений  $(J) \otimes (s_a) \otimes (s_b) \otimes (s_c)$ . Выделение спиновых структур в /22/ приводит к следующему окончательному выражению для эффективного спинового гамильтониана ( $\hbar = e = 1$ ):

$$\begin{aligned} H^{eff} = & E_1 (\vec{I} \cdot \vec{\mathcal{L}}^J) + E_2 (\vec{s}_c \cdot \vec{\mathcal{L}}^J) + E_3 (\vec{I} \cdot \vec{s}_c) + \\ & + E_4 \left[ \frac{1}{2} \{ (\vec{s}_c \cdot \vec{\mathcal{L}}^J) (\vec{I} \cdot \vec{\mathcal{L}}^J) + (\vec{I} \cdot \vec{\mathcal{L}}^J) (\vec{s}_c \cdot \vec{\mathcal{L}}^J) \} - \frac{2}{3} (\vec{I} \cdot \vec{s}_c) \right] + \\ & + E_5 \left[ (\vec{I} \cdot \vec{\mathcal{L}}^J)^2 + \frac{1}{2} (\vec{I} \cdot \vec{\mathcal{L}}^J) - \frac{4}{3} \right], \end{aligned}$$

$$E_1 = \frac{a^2}{M_\mu M_p} \left( \frac{2 + \mu}{1 + \mu} I_{(7)} + \frac{\mu}{1 + \mu} I_{(8)} - \mu I_{(9)} \right).$$

$$E_2 = \frac{2a^2}{M_\mu M_p} \left( \frac{2+\mu}{1+\mu} I_{(9)} + \frac{\mu}{1+\mu} I_{(10)} \right),$$

/23/

$$E_3 = \frac{2a^2}{3M_\mu M_p} I_{(12)}, \quad E_4 = \frac{3a^2}{M_\mu M_p} I_{(11)},$$

$$E_5 = -\frac{3a^2}{2M_\mu M_p} \mu I_{(14)},$$

где  $I_{(a)}/a = 1, \dots, 14/$  определены соотношением /20/. Коэффициенты  $E_1, \dots, E_5$  и  $\gamma_0$ -фактор, который в адиабатическом представлении имеет вид /20/

$$\gamma_0 = \frac{1}{2} \int_0^\infty dR [\sum_j N_{j0}(R) \chi_{j0}(R)]^2, \quad /24/$$

позволяют определить скорость захвата  $\mu^-$ -мезона  $\omega_{pp\mu}$  в мезомолекуле  $pp\mu$  через известные значения скоростей  $\mu^-$ -захвата  $\omega_0$  и  $\omega_1$  в синглетном и триплетном состояниях мезоатомов  $p\mu$  /2,6/. Согласно формулам Вайнберга-Хальперна /5,6/

$$\omega_{pp\mu} = \xi \omega(1/2) + (1-\xi) \omega(3/2),$$

/25/

$$\omega(1/2) = 2\gamma_0 (3/4 \omega_0 + 1/4 \omega_1),$$

$$\omega(3/2) = 2\gamma_0 \cdot \omega_1,$$

где  $\omega(s)$  - скорость  $\mu^-$ -захвата в состоянии с полным спином  $s = 1/2, 3/2$ , а вероятность  $\xi$  состояния с  $s = 1/2$  равна:

$$\xi = \frac{1}{3} [\xi_1^2 + (1-\xi_1)^2] + \frac{2}{3} [\xi_3^2 + (1-\xi_3)^2],$$

$$\xi_1 = \frac{1}{2} \left[ 1 + \left\{ 1 + 2 \left( \frac{-4E_1 + 4E_2 - 5E_4 + 10E_5}{2E_1 + 7E_2 - 9E_3 - 5E_4 - 5E_5} \right)^2 \right\}^{-1/2} \right], \quad /26/$$

$$\xi_3 = \frac{1}{2} \left[ 1 + \left\{ 1 + 5 \left( \frac{-4E_1 + 4E_2 - E_4 - 2E_5}{8E_1 + E_2 - 9E_3 + 4E_4 + 4E_5} \right)^2 \right\} \right].$$

## 5. СРАВНЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В табл. 1 приведены значения коэффициентов  $E_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , эффективного спинового гамильтониана /23/; уровней энергии

$hfs E(\mathcal{J})$  мезомолекулы  $p\bar{p}\mu(\uparrow\uparrow_i)$  /один уровень энергии с  $\mathcal{J}=5/2$ , два уровня с  $\mathcal{J}=3/2$  и два - с  $\mathcal{J}=1/2$  /;  $\gamma_0$  - фактора /24/ - отношения вероятности обнаружения  $\mu^-$ -мезона вблизи протона в  $p\bar{p}\mu$  и  $p\mu$  и вероятности  $\xi(26)$  нахождения  $\mu^-$ -мезона в состоянии мезомолекулы  $p\bar{p}\mu$  с полным спином  $S=1/2$ . Для сравнения приведены результаты вычислений  $hfs$  мезомолекулы  $p\bar{p}\mu$ , полученные Хальперном в работах /6,8/. В последней строке табл. 2 представлено явное выражение скорости захвата  $\omega_{p\bar{p}\mu}/25/$   $\mu^-$ -мезона в мезомолекуле  $p\bar{p}\mu(\uparrow\uparrow_i)$  через скорости  $\mu^-$ -захвата  $\omega_0$  и  $\omega_1$  в синглетном и триплетном состояниях  $p\mu$ -атомов.

Различие в результатах объясняется несколькими причинами:

1. В данной работе учитывается внутренняя структура ядер, что дает поправку  $-0,5\%$ .

2. По-видимому, спиновый гамильтониан /11/ отличается от гамильтониана Хальперна коэффициентами  $v_{(a)}$ ,  $a=1, \dots, 14$ , см. /16/ /к сожалению, последний не выписан явно, и поэтому невозможно установить, в чем именно заключается это отличие/.

Точность результатов данной работы определяется:

1. Точностью вычисления КСФ  $/10^{-5} \div 10^{-6}$  или лучше/ и функций  $\chi_{jm}^{j\lambda} /10^{-4} \div 10^{-5} /$ .

2. Ошибками численного интегрирования  $10^{-5}$  для  $E_3$  и  $\leq 1 \cdot 10^{-4}$  для остальных  $E_i$ .

3. Количеством членов в разложении /20/ как по дискретному, так и по непрерывному спектрам задачи двух центров /14/. В табл. 2 приведены вклады в  $E_i$  /23/ от разных пар решений дискретного спектра задачи двух центров. Оценки вклада в  $E_3$  от дискретно-непрерывных /ДН/ и непрерывно-непрерывных /НН/ пар позволяют сказать, что он  $\sim 1 \cdot 10^{-5}$  эВ.

В целом сверхтонкая структура, обусловленная эффективным спиновым гамильтонианом /23/, определена с относительной точностью не хуже  $1 \cdot 10^{-3}$ . В табл. 1 результаты приведены с четырьмя значащими цифрами, однако следует иметь в виду, что эффекты высших порядков по  $\alpha$  сказываются по крайней мере в последней из них.



## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развитый в данной работе подход позволил вычислить сверхтонкое расщепление уровня энергии мезомолекулы  $\text{p}\mu$  в состоянии  $(v=0, J=1, I=1)$  с относительной точностью  $\sim 1 \cdot 10^{-8}$ .

По сравнению с ранее предложенными подходами он имеет следующие преимущества:

Во-первых, он пригоден для расчета любых и в том числе высоковозбужденных и слабосвязанных состояний  $\mu$ -мезомолекул.

Во-вторых, в этом подходе последовательно учтены приведенные массы и внутренняя структура частиц.

В-третьих, с вычислительной точки зрения его точность может быть повышена до  $10^{-6} \div 10^{-8}$  благодаря отсутствию сингулярных членов в операторе спинового взаимодействия /11.6, 12/, которые в обычном подходе ограничивают точность вычислений /21/ и не позволяют выйти за рамки теории возмущений.

Построенный таким образом гамильтониан системы трех частиц /4/, /11/ можно использовать также в задаче рассеяния для описания процесса /2/ с переворотом спина.

В заключение авторы благодарят Л.И.Пономарева и И.И.Тодорова за постоянную поддержку и полезные обсуждения, Л.Александрова, Д.Караджова, В.С.Мележика, И.В.Пузынина, Т.П.Пузынину, Л.Н.Сомова и Н.Ф.Трускову за разностороннюю помощь.

### ПРИЛОЖЕНИЕ 1

В случае  $M_a = M_b$  координаты Якоби  $\vec{R}$ ,  $\vec{r}$ ,  $\vec{r}$  системы трех частиц  $a, b, c$  связаны с их координатами  $\vec{R}_i, i = a, b, c$ , соотношениями

$$\vec{R} = \frac{M_a \vec{R}_a + M_b \vec{R}_b + M_c \vec{R}_c}{M_a + M_b + M_c}, \quad \vec{R} = \vec{R}_b - \vec{R}_a,$$

$$\vec{r} = \vec{R}_c - 1/2(\vec{R}_a + \vec{R}_b).$$

Кроме того, удобно использовать вектора  $\vec{\Gamma}_{a,b}$ :

$$\vec{\Gamma}_{a,b} = \vec{r} \pm 1/2\vec{R}.$$

Импульсы, сопряженные  $\vec{R}$ ,  $\vec{r}$  и  $\vec{r}$ , выражаются через импульсы  $\vec{p}_k = -i \nabla_{\vec{R}_k}$  по формулам

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{P}_a + \vec{P}_b + \vec{P}_c,$$

$$\vec{P} = 1/2(\vec{P}_b - \vec{P}_a),$$

$$\vec{p} = \frac{2}{2+\mu} \vec{P}_c - \frac{\mu}{2+\mu} (\vec{P}_a + \vec{P}_b), \quad \mu = \frac{M_c}{M}.$$

Тензорные операторы  $T_{ac}$ ,  $T_{bc}$ ,  $T_{ab}$  и орбитальные моменты  $\vec{L}, \vec{\Lambda}, \vec{\ell}, \vec{\lambda}$  в выражении /11/ для  $V^{spin}$  определены соотношениями

$$\begin{aligned} \vec{L}_{bc} &= (\vec{R}_c - \vec{R}_b) \times (-i \nabla_{(\vec{R}_c - \vec{R}_b)}) | \vec{R}_b + \mu \vec{R}_c = \text{const} = \\ &= \frac{2+\mu}{1+\mu} \left\{ \frac{1}{2} \vec{\ell} - \frac{1}{4} \vec{\lambda} \right\} + \frac{\mu}{2+\mu} \left( \frac{1}{2} \vec{L} - \vec{\Lambda} \right), \end{aligned}$$

где

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad \vec{L} = \vec{R} \times \vec{P}, \quad \vec{\Lambda} = \vec{r} \times \vec{P}, \quad \vec{\lambda} = \vec{R} \times \vec{p}.$$

$$\vec{L}_{ac} = \frac{R+\mu}{1+\mu} \left( \frac{1}{2} \vec{\ell} + \frac{1}{4} \vec{\lambda} \right) + \frac{\mu}{1+\mu} \left( \frac{1}{2} \vec{L} + \vec{\Lambda} \right),$$

$$\vec{L}_{ab} = \vec{L}; \quad (T_{ic})_{k\ell} = \frac{3(r_i)_k (r_i)_\ell}{r_i^2} - \delta_{k\ell},$$

$$i = a, b; \quad k, \ell = 1, 2, 3,$$

$$(T_{ab})_{k\ell} = \frac{3R_k R_\ell}{R^2} - \delta_{k\ell}.$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Электромагнитные свойства частиц со спином 1/2 описывались с помощью дираковского ( $F_1$ ) и паулиевского ( $F_2$ ) форм-факторов, в терминах которых матричный элемент тока  $J_\mu^{(i)}$   $i$ -й частицы имеет вид:

$$\langle p_2 | J_\mu^{(i)} | p_1 \rangle = F_1^{(i)}(q^2) \gamma_\mu + i \frac{A^{(i)}}{2M_i} \sigma_{\mu\nu} q^\nu F_2^{(i)}(q^2),$$

$$q = p_2 - p_1, \quad q^2 = q_0^2 - \vec{q}^2, \quad F_1^{(i)}(0) = F_2^{(i)}(0) = 1.$$

Функция  $f_{kl}^{(ij)}$  в выражении /11/ определена равенством

$$f_{kl}^{(ij)}(r) = r \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{q}\vec{r}} F_k^{(i)}(-q^2) F_l^{(j)}(-q^2) / q^2.$$

Опуская индексы  $i, j, k, l$ , для функций  $\bar{f}, \tilde{f}, \hat{f}$  в /10/ имеем:

$$\bar{f} = \frac{f - r f'}{r^3}, \quad \tilde{f} = \frac{f - r f' + \frac{r^2}{3} f''}{r^3},$$

$$\hat{f} \equiv -\Delta\left(\frac{f}{r}\right) = 4\pi\delta(\vec{r}) - \frac{f''}{r}.$$

В выражении /11/ для  $V^{\text{spin}}$  встречаются пять комбинаций функций  $\bar{f}, \tilde{f}, \hat{f}$ :  $\bar{f}_{(m)}, \tilde{f}_{(m)}, \hat{f}_{(m)}$ ,  $m = 1, \dots, 5$ , которые по тем же формулам выражаются через

$$f_{(1)} = \left(1 + \frac{M_\mu}{2M_p}\right) f_{11}^{(p\mu)} + A^{(p)} \left(1 + \frac{M_\mu}{M_p}\right) f_{21}^{(p\mu)},$$

$$f_{(2)} = \left(1 + \frac{M_p}{2M_\mu}\right) f_{11}^{(p\mu)} + A^{(\mu)} \left(1 + \frac{M_p}{M_\mu}\right) f_{12}^{(p\mu)},$$

$$f_{(3)} = f_{11}^{(p\mu)} + A^{(p)} f_{21}^{(p\mu)} + A^{(\mu)} f_{12}^{(p\mu)} + A^{(\mu)} A^{(p)} f_{22}^{(p\mu)},$$

$$f_{(4)} = \frac{3}{2} f_{11}^{(pp)} + 2A^{(p)} f_{12}^{(pp)},$$

$$f_{(5)} = f_{11}^{(pp)} + 2A^{(p)} f_{12}^{(pp)} + (A^{(p)})^2 f_{22}^{(pp)}.$$

В приближении бесструктурного  $\mu^-$ -мезона  $F_1^{(\mu)} = F_2^{(\mu)} = 1$ . Аппроксимация  $F_{1,2}^{(p)}$  функциями типа  $F_k^{\text{appr}}(q) = \sum_{n=1}^{NK} c_n^k (1 + q^2 / (\Lambda_n^k)^2)^{s_n^k}$

приводит к следующим выражениям для функций  $f_{kl}^{(ij)}$ ,

см. /9/, /10/ ( $x_i^k = \Lambda_i^k r$ ):

$$f_{11}^{(p\mu)}(r) = f_{12}^{(p\mu)}(r) = c_1 \left(1 - e^{-x_1^1} \left(1 + \frac{x_1^1}{2}\right)\right) + c_2 \left(1 - e^{-x_2^1} \left(1 + \frac{5}{8} x_2^1 + \frac{1}{8} (x_2^1)^2\right)\right),$$

$$f_{21}^{(PM)}(\mathbf{r}) = f_{22}^{(PM)}(\mathbf{r}) = c_1(1 - e^{-x_1^2} (1 + \frac{5}{8}x_1^2 + \frac{1}{8}(x_1^2)^2)) +$$

$$+ c_2(1 - e^{-x_2^2} (1 + \frac{5}{8}(x_2^2) + \frac{1}{8}(x_2^2)^2)),$$

где значения параметров  $c_i^k, s_i^k, \Lambda_i^k, k, i=1,2$  приведены ниже. В то же время в пределах принятой точности  $f_{kl}^{(PP)} = 1$ .

Формфактор	k	N <sup>k</sup>	c <sub>1</sub> <sup>k</sup>	Λ <sub>1</sub> <sup>k</sup> /МэВ/с/	s <sub>1</sub> <sup>k</sup>	c <sub>2</sub> <sup>k</sup>	Λ <sub>2</sub> <sup>k</sup> /МэВ/с/	s <sub>2</sub> <sup>k</sup>
Дирака	1	2	0,78908	851.7	2	0,21102	2095.	3
Паули	2	2	0,43680	796.9	3	0,56311	1194.	3

### ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Компоненты вектора  $\vec{r} = (x, y, z)$  по "вращающейся" системе координат, третья ось которой совпадает с вектором  $\vec{R}$ , а начало - с его серединой, связаны с компонентами  $\vec{r} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$  в "фиксированной" системе матрицей поворота:

$$\vec{r}_i = M_{ij} \tilde{r}_j, \quad M = \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\Phi - \sin\Phi & \sin\theta \cos\Phi \\ \cos\theta \sin\Phi & \cos\Phi & \sin\theta \sin\Phi \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Импульсы в фиксированной системе  $\vec{p} = -i\nabla_{\vec{r}}|_{\vec{R}=\text{const}}$  и  $\vec{P} = -i\nabla_{\vec{r}}|_{\vec{R}=\text{const}}$  выражаются через операторы  $\vec{p} = -i\nabla_{\vec{r}}|_{\vec{R}=\text{const}}$ ,  $\vec{P} = -i\nabla_{\vec{r}}|_{\vec{R}=\text{const}}$ , действующие в пространстве функций, зависящих от координат во вращающейся системе:  $p_i = M_{ij} p_j$ ,

$$\tilde{P}_i = P_i + r_k M_{kl}^{-1} \frac{\partial M_{lj}}{\partial R_i} p_j.$$

Выражения для компонент вектора  $\vec{r}$  в вытянутых сферои-дальных координатах имеют вид:

$$x = \frac{R}{2} Q \cos\phi, \quad y = \frac{R}{2} Q \sin\phi, \quad z = \frac{R}{2} P,$$

где

$$Q = [(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)]^{1/2}, \quad P = \xi\eta, \quad \xi \geq 1, \quad -1 \leq \eta \leq 1, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi.$$

Операторы  $\vec{p}$  и  $\vec{P}$  принимают вид:

$$\vec{p}_1 = -\frac{2i}{R} \left( \frac{Q}{D} \cos\phi W_1 - \frac{\sin\phi}{Q} \frac{\partial}{\partial \phi} \right),$$

$$\tilde{P}_2 = -\frac{2i}{R} \left( \frac{Q}{D} \sin \phi W_1 + \frac{\cos \phi}{Q} \frac{\partial}{\partial \phi} \right),$$

$$\tilde{P}_3 = -\frac{2i}{R} \left( \frac{P}{D} W_1 + \frac{1}{D} W_2 \right),$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_1 = & -i \sin \theta \cos \Phi \left( \frac{\partial}{\partial R} - \frac{W_0}{R} \right) - i \frac{\cos \theta \cos \Phi}{R} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} - i l_2 \right) + \\ & + i \frac{\sin \Phi}{R \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \Phi} + i \sin \theta l_1 - i \cos \theta l_3 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_2 = & -i \sin \theta \sin \Phi \left( \frac{\partial}{\partial R} - \frac{W_0}{R} \right) - i \frac{\cos \theta \sin \Phi}{R} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} - i l_2 \right) - \\ & - i \frac{\cos \Phi}{R \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \Phi} + i \sin \theta l_1 - i \cos \theta l_3 \right), \end{aligned}$$

$$\tilde{P}_3 = i \cos \theta \left( \frac{\partial}{\partial R} - \frac{W_0}{R} \right) + i \frac{\sin \theta}{R} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} - i l_2 \right).$$

Здесь:

$$W_1 = \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial}{\partial \eta}; \quad W_2 = \xi \frac{\partial}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial}{\partial \xi}; \quad W = W_1 + W_2;$$

$$W_0 = \frac{1}{D} (\xi(\xi^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta(1 - \eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta}); \quad D = \xi^2 - \eta^2;$$

$$l_{\pm} = l_1 \pm i l_2 = e^{\pm i \phi} \left( \mp \frac{Q}{D} W_2 + i \frac{P}{Q} \frac{\partial}{\partial \phi} \right); \quad l_3 = -i \frac{\partial}{\partial \phi}.$$

Третьи компоненты векторных операторов в /19/ равны:

$$\tilde{L}_3 = -i \frac{\partial}{\partial \Phi} + \sin \theta l_1 - \cos \theta l_3, \quad \tilde{l}_3 = -\sin \theta l_1 + \cos \theta l_3,$$

$$\tilde{\lambda}_3 = -2i \sin \theta \left( \frac{Q}{D} \sin \phi \cdot W_1 + \frac{\cos \phi}{Q} \frac{\partial}{\partial \phi} \right),$$

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}_3 = & \frac{i}{2} \left\{ Q \sin \theta \sin \phi \left( R \frac{\partial}{\partial R} \right) - Q \sin \theta \sin \phi \cdot W_0 + \right. \\ & + Q \cos \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{PQ}{D} \sin \theta \sin \phi W_2 + (2P \cos \theta + \\ & \left. + Q \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \cos \phi + \frac{P^2}{Q} \sin \theta \cos \phi \right) \frac{\partial}{\partial \phi} - (Q \operatorname{ctg} \theta \cos \phi + P) \frac{\partial}{\partial \Phi} \left. \right\}. \end{aligned}$$

33-и компоненты тензорных операторов равны:

$$T_{ac(bc)33} = \frac{3(Q \sin \theta \cos \phi - (P \pm 1) \cos \theta)^2 - (\xi \pm \eta)^2}{(\xi \pm \eta)^2}, \quad T_{ab33} = 3 \cos^2 \theta - 1.$$

Усреднение их по углам /21/ приводит к:

$$\bar{L}_{00} = 1; \bar{L}_{01} = \frac{1}{2} \left( \frac{Q}{D} W_2 - \frac{P}{Q} \right); \bar{L}_{10} = -\frac{1}{2} \frac{Q}{D} W_2; \bar{L}_{11} = \frac{1}{2};$$

$$\bar{\ell}_{00} = 0; \bar{\ell}_{01} = -\bar{L}_{01}; \bar{\ell}_{10} = -\bar{L}_{10}; \bar{\ell}_{11} = \frac{1}{2};$$

$$\bar{\lambda}_{00} = 0; \bar{\lambda}_{01} = \frac{1}{Q} + \frac{Q}{D} W_1; \bar{\lambda}_{10} = -\frac{Q}{D} W_1; \bar{\lambda}_{11} = 0;$$

$$\bar{\Lambda}_{00} = \frac{P}{2}; \bar{\Lambda}_{01} = -\frac{Q}{4} \left( R \frac{\partial}{\partial R} - W_0 - \frac{P}{D} W_2 \right) - \frac{P^2}{4Q};$$

$$\bar{\bar{\Lambda}}_{10} = \frac{Q}{4} \left( 1 + R \frac{\partial}{\partial R} - W_0 - \frac{P}{D} W_2 \right); \bar{\bar{\Lambda}}_{11} = 0;$$

$$\bar{T}_{bc00} = \frac{1}{5} - \frac{3(P-1)^2}{5(\xi-\eta)^2}; \bar{T}_{bc01} = \bar{T}_{bc10} = -\frac{3Q(P-1)}{(\xi-\eta)^2}; \bar{T}_{bc11} = \frac{3(P-1)^2}{5(\xi-\eta)^2} - \frac{2}{5};$$

$$\bar{T}_{ac_{m,m}} = \bar{T}_{bc_{m,m}} (\eta \rightarrow -\eta); \bar{T}_{ab_{00}} = -\frac{2}{5}; \bar{T}_{ab_{01}} = \bar{T}_{ab_{10}} = 0; \bar{T}_{ab_{11}} = \frac{1}{5}.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ponomarev L.I. Proc. of the Sixth Int. Conf. on Atomic Phys., August 17-22, 1978, Riga, USSR, p.181-206. Zinatne, Riga. Plenum Press, New York-London, 1979.
2. Gerstein S.S., Ponomarev L.I. In: "Muon Physics". Ed. Hughes V.W. and Wu C.S. Academic Press, New York, 1975, vol.III. Zavattini E. In: "Muon Physics", Ed. V.W.Hughes and C.S.Wu. Academic Press., New York, 1975, vol.II.

3. Gerstein S.S., Ponomarev L.I. Phys.Lett., 1977, 72B, 80; erratum, 1978, 76B, p.664.
4. Melezhik V.S., Ponomarev L.I. Phys.Lett., 1978, 77B, p.217.
5. Weinberg S. Phys.Rev.Lett., 1960, 4, p.575.
6. Halpern A.M. Phys.Rev., 1964, A135, p.34.
7. Зельдович Я.Б., Герштейн С.С. УФН, 1960, 71, с.581.
8. Halpern A. Phys.Rev., 1968, 174, p.62.
9. Halpern A. Phys.Rev., 1969, 186, p.14;  
Виницкий С.И., Пономарев Л.И., ЯФ, 1974, 20, с.576.
10. Ризов В.А., Тодоров И.Т. ЭЧАЯ, 1975, 6, №3, с.669.
11. Бакалов Д.Д. ОИЯИ, P2-12221, Дубна, 1979.
12. Комаров И.В., Пономарев Л.И., Славянов С.Ю. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. "Наука", М., 1976.
13. Ponomarev L.I., Vinitzky S.I. J.Phys.B, 1979, 12, p.567; Ponomarev L.I. et al. J.Phys. B, 1978, 11, p.1375; Ponomarev L.I. et al. J.Phys.B., 1977, 10, p.1335.
14. Foldy L.L., Krajcik R.A. Phys.Rev., 1975, D12, p.1700.
15. Wigner E. Group Theory. Academic Press, New York, 1959.
16. Пузынин И.В., Пузынина Т.П. В сб: "Algorithms and Programs". KFKI-34, 93, Budapest, 1974.
17. Александров Л. ОИЯИ, P5-7259, Дубна, 1973.
18. Биленькая С.И. и др. ЖЭТФ, 1971, 61, с.2225.
19. Пономарев Л.И., Пузынина Т.П. ОИЯИ, P4-5040, Дубна, 1970.
20. Patterson M.R., Becker R.L. "Non-Adiabaticity Correction..." (Thesis), Oak Ridge Nat. Lab., ORNL-TM-1850, 1967.
21. Sommerville W.B. Mon. Not. R. Astr. Soc., 1968, 139, p.63.
22. Faifman M.P. et al. J.Phys.B., 1976, 9, p.2255.

Рукопись поступила в издательский отдел  
15 августа 1979 года.