объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна





Р4 - 12632

М.И.Широков

# МИНИМАЛЬНО-НЕЛОКАЛЬНАЯ КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА СВЯЗАННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ БЕЗ ПОТЕНЦИАЛОВ

1979

P4 - 12632

М.И.Широков

# МИНИМАЛЬНО-НЕЛОКАЛЬНАЯ КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА СВЯЗАННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ БЕЗ ПОТЕНЦИАЛОВ

*Направлено в "Journal of Physics, A"*

Широков М.И.

P4 - 12632

Минимально-нелокальная квантовая электродинамика связанных электронов без потенциалов

В формулировках квантовой электродинамики, не использующих потенциалы, заряженное поле $\psi$ нелокально взаимодействует с электромагнитными полями $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Предлагаемая формулировка в случае связанных электронов имеет минимально нелокальное взаимодействие по сравнению с другими известными безпотенциальными формулировками. Обсуждаются приложения новой формы теории.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

**Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979**

Shirokov M.I.

P4 - 12632

Minimally Nonlocal Quantum Electrodynamics without Potentials for Bound Electrons

In the formulations of QED which do not use potentials the charged field $\psi$ interacts nonlocally with the electromagnetic fields $\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$. The suggested formulation in the case of bound electrons has the minimally nonlocal interaction as compared with the other known formulations without potentials. Some application of the new formulation are discussed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

**Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979**

## *1. ВВЕДЕНИЕ*

Как известно, в задачах со связанными электронами следует использовать кулоновскую калибровку, а не лоренцевскую, /см., например, книгу Гайтлера [1]/.

Кулоновскую калибровку можно рассматривать как пример такой формы квантовой электродинамики, в которой заряженное поле нелокально взаимодействует с электромагнитными полями $\vec{E}$ и $\vec{H}$ /потенциалы и калибровочная группа отсутствуют/. Действительно, поперечный потенциал $\vec{A}_{\perp}$ может быть выражен через $\vec{H}$

$$\vec{A}_{\perp}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3y \, \mathrm{rot}\, \vec{H}(\vec{y}) \, / \, |\vec{x}-\vec{y}| \qquad /\text{см.}^{/1/}/. \qquad /1/$$

Другие безпотенциальные формулировки см., напр., в [3-5]. Все перечисленные формулировки являются сильно нелокальными теориями. Напр., в кулоновской калибровке как непосредственное кулоновское взаимодействие зарядов, так и их взаимодействие с магнитным полем через посредство $\vec{A}_{\perp}$ см /1/, характеризуются "формфактором" $1/|\vec{x}-\vec{y}|$ бесконечного радиуса. Аналогичная ситуация наблюдается в других безпотенциальных формулировках /см. далее раздел 2/.

В настоящей работе предполагается еще одна безпотенциальная форма квантовой электродинамики, которая в случае связанных зарядов оказывается наименее нелокальной по сравнению с известными. Нелокальность взаимодействия зарядов с $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в ней ограничена областью локализации связанного заряда.

В разделе 3 даны некоторые модификации и обобщения новой формы теории.

Возможные ее применения и связь с другими подходами обсуждаются в разделе 4.

В дополнении указано различие между безпотенциальными подходами Де Витта [3] и Мандельстама [4], существенное для вывода важной для нас формулы /8/.

## 2. МИНИМАЛЬНО-НЕЛОКАЛЬНАЯ ФОРМА КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Новую форму теории мы построим, исходя из кулоновской калибровки. Электроны и позитроны будут описываться новым полем $\psi'$:

$$\psi'(\vec{x}) = \psi(\vec{x}) \exp\left[-ie \int_{\vec{r}}^{\vec{x}} (\vec{A}_{\perp} d\vec{\xi})\right]. \qquad /2/$$

Здесь $\psi(x)$, $\vec{A}_{\perp}$, $\psi'$ - шредингеровские операторы, интеграл

$$\int(\vec{A}_{\perp} d\vec{\xi}) = \int[A_{\perp x}(\vec{\xi})\, d\xi_x + A_{\perp y}(\vec{\xi})\, d\xi_y + A_{\perp z}(\vec{\xi})\, d\xi_z]$$

берется по прямой линии, соединяющей некоторую точку $\vec{r}$ с точкой $\vec{x}$. Мы полагаем $h=1$ и $c=1$. В теорию введен новый элемент $\vec{r}$. Если электроны рассматриваемой физической системы каким-то образом локализованы в некотором объеме V, то в качестве $\vec{r}$ можно взять центр этого объема. В теории локализация осуществляется посредством введения внешнего потенциала U .

Конструкции вида /2/ известны /см., например [2,3,6,7]/. Но у нас цель /2/ состоит не в получении калибровочно-инвариантного заряженного поля /как $\psi$, так и $\psi'$ калибровочно-инвариантны/. /2/ предназначается для получения менее нелокальной безпотенциальной теории *

Переход /2/ от $\psi$ к $\psi'$ мы представим как каноническое преобразование вида $\psi' = S^{+}\psi S$ и введем, кроме $\psi'$, новые операторы $\vec{E}'$ и $\vec{H}'$ и для фотонов. Тогда одновременные коммутаторы для $\psi'$, $\vec{E}'$, $\vec{H}'$ будут те же самые, что и для $\psi$, E ,

* Конструкция /2/ может быть мотивирована с помощью терминов, вводимых далее в разделе 4: мы хотим построить квазиградиентно-инвариантный оператор заряженного поля, см. /27/.

$\vec{H}$, и новые операторы электронов будут независимы от /новых/ фотонных операторов. Положим

$$S = \exp\left[-ie\int \rho(\vec{x}')\, d^3x' \int_{\vec{r}}^{\vec{x}'} (A_\perp d\vec{\xi})\right]. \qquad /3/$$

Здесь $\rho = \psi^+\psi$ - плотность заряда, интеграл по $\vec{x}'$ берется по всему пространству. С помощью формулы

$$e^A B e^{-A} = B + [A,B] + \frac{1}{2}[A,[A,B]] + \ldots \qquad /4/$$

убеждаемся, что $\psi' = S^+\psi S$ /вычисленное с помощью одновременных коммутаторов/ совпадает с /2/.

Мы имеем $\vec{A}_\perp = S^+\vec{A}_\perp S = \vec{A}_\perp$ и $\vec{H}' = \vec{H}$, так что $S$ изменяет, кроме $\psi$, еще только поперечное электрическое поле

$$E'_{\perp m}(\vec{x}) = S^+E_{\perp m}(x)\, S = E_{\perp m} + e\int d^3x'\rho(\vec{x}') \int_{\vec{r}}^{\vec{x}'} \sum_n d\xi_n \delta^{tr}_{nm}(\vec{\xi}-\vec{x}). \qquad /5/$$

Для вычисления /5/ использовалась коммутация

$$[A_{\perp k}(\vec{y}), E_{\perp m}(\vec{x})] = -i\,\delta^{tr}_{km}(\vec{y}-\vec{x}) =$$
$$= -i\left[\delta_{km}\,\delta^{(3)}(\vec{y}-\vec{x}) - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y_k}\frac{\partial}{\partial x_m}\frac{1}{|\vec{y}-\vec{x}|}\right] \qquad /6/$$

см. /14.17/ в [8].

Нашей целью является выражение гамильтониана $H$ кулоновской калибровки в терминах новых операторов. Мы берем $H$ из § 89 книги [8]:

$$H = \frac{1}{2}\int d^3x\,[\vec{H}^2(\vec{x}) + \vec{E}_\perp^2(\vec{x})] + \int d^3x\,\psi^+(\vec{x})\,[\vec{\alpha}(-i\vec{\nabla} - e\vec{A}_\perp(\vec{x})) + \beta m]\psi(\vec{x}) +$$
$$+ \frac{e^2}{8\pi}\int d^3x \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x})\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} - e\int d^3x\,\psi^+\gamma_0\gamma_\mu U_\mu\psi. \qquad /7/$$

Последний член содержит внешний потенциал $U$ /см. выше/. В дополнении к этой работе дан вывод формулы

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\int_{\vec{r}}^{\vec{x}} (\vec{A}\,d\vec{\xi}) = A_k(\vec{x}) - \mathfrak{A}_k(\vec{x}) \qquad /8/$$

$$\vec{\mathfrak{A}}(\vec{x}) = -\int_0^1 \alpha\, d\alpha\,(\vec{x}-\vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r} + \alpha(\vec{x}-\vec{r})) \qquad /9/$$

/$\times$ означает векторное произведение/. С помощью /8/ получаем

$$\vec{\nabla}\,\psi'(\vec{x}) = \exp\left[-ie\int(\vec{A}_\perp d\vec{\xi})\right]\{\,\vec{\nabla} - ie(\vec{A} - \vec{\mathfrak{a}})\,\}\,\psi(\vec{x})\,. \qquad /10/$$

Умножая обе части /10/ на $\psi'^{+} = \psi^{+}\exp ie\int$, получаем соотношение, которое можно записать в виде

$$\psi^{+}(\vec{x})\,[-i\vec{\nabla} - e\vec{A}_\perp(x)]\,\psi(\vec{x}) = \psi'^{+}(\vec{x})\,[-i\vec{\nabla} - e\vec{\mathfrak{a}}(\vec{x})]\,\psi'(\vec{x})\,. \qquad /11/$$

Далее, используя /5/, /6/ и соотношение $\operatorname{div}\vec{E}'_\perp = 0$, получаем

$$\int \vec{E}_\perp^2\, d^3x = \int \vec{E}_\perp'^2\, d^3x - 2e\int\rho(\vec{y})\, d^3y \int_{\vec{r}}^{\vec{y}} (\vec{E}'_\perp(\vec{\xi})\, d\vec{\xi}) +$$

$$+ e^2 \int\int d^3y\, d^3y'\, \rho(\vec{y})\,\rho(\vec{y}')\int_r^y\int_r^{y'}\delta(\vec{\xi} - \vec{\xi}')\,(d\vec{\xi}\cdot d\vec{\xi}') -$$

$$- e^2\int\int d^3y\, d^3y'\,\frac{\rho(\vec{y})\,\rho(\vec{y}')}{4\pi\,|\vec{y} - \vec{y}'|} - 2\int\frac{Q\, e\,\rho(\vec{y})\, d^3y}{4\pi\,|\vec{y} - \vec{r}|} + \frac{Q^2}{4\pi\,|\vec{r} - \vec{r}|}\,. \qquad /12/$$

Здесь $Q \equiv e\int d^3x\,\psi'^{+}(\vec{x})\,\psi'(\vec{x})$ - сохраняющийся полный заряд системы. Предпоследний член в /12/ есть кулоновское взаимодействие электронного поля с точечным зарядом величиной $Q$, расположенным в точке $\vec{r}$. Последний член бесконечен и описывает кулоновское самовзаимодействие этого заряда. Его можно выбросить на том же основании, на каком отбрасывается кулоновское самовзаимодействие в кулоновской калибровке.

Подставляя /11/ и /12/ в /7/, получаем искомое выражение H через новые операторы

$$H = \frac{1}{2}\int d^3x\,(\vec{H}'^2 + \vec{E}_\perp'^2) + \int d^3x\,\psi'^{+}[\,\vec{\alpha}(-i\vec{\nabla} - e\vec{\mathfrak{a}}) + \beta m\,]\,\psi' -$$

$$- e\int\rho(\vec{x})\, d^3x\int_{\vec{r}}^{\vec{x}}(\vec{E}'(\vec{\xi})\, d\vec{\xi}) - e\int d^3x\,\psi'^{+}\gamma_0\gamma_\mu\psi' U_\mu +$$

$$+ e^2\int\int d^3x\, d^3x'\,\rho(\vec{x})\,\rho(\vec{x}')\int_{\vec{r}}^{\vec{x}}\int_{\vec{r}}^{\vec{x}'}\delta^{(3)}(\vec{\xi} - \vec{\xi}')\,(d\vec{\xi}\cdot d\vec{\xi}') -$$

$$- 2\int\frac{Q\, e\,\rho(\vec{x})}{4\pi\,|\vec{x} - \vec{r}|}\, d^3x\,. \qquad /13/$$

Член кулоновского взаимодействия, который был в /7/, исчез: он взаимно уничтожился с соответствующим /четвертым/ членом из /12/. Вместо него в /13/ появились два последних члена. Поле $\psi'$ взаимодействует с магнитным полем через $\vec{\mathfrak{a}}(\vec{x})$, см. /9/, и с поперечным электрическим полем $\vec{E}'_{\perp}$

$$e\int\rho(\vec{x})\,d^3x\int_{\vec{r}}^{\vec{x}}(\vec{E}'_{\perp}(\vec{\xi})\,d\vec{\xi}) = e\int\rho(x)\,d^3x\int_0^1 d\alpha\,(\vec{x}-\vec{r})\,\vec{E}'_{\perp}\,(\vec{r}+\alpha(\vec{x}-\vec{r}))\,. \qquad /14/$$

Оба эти взаимодействия нелокальны: $\psi'(\vec{x})$ взаимодействует с $\vec{H}'(\vec{\xi})$ и $\vec{E}'_{\perp}(\vec{\xi})$, взятых в точках $\xi$ прямой линии, соединяющей $\vec{x}$ с $\vec{r}$. Если электроны локализованы в области V, то это нелокальное взаимодействие сосредоточено тоже в V.

В формулировке де Витта [3] заряженное поле в точке $\vec{x}$ взаимодействует с $\vec{E}$ и $\vec{H}$, взятых в точках линии, уходящей от $\vec{x}$ в бесконечность. Таков же характер нелокальности и в формулировке Мандельстама [4] /см., в частности, коммутационные соотношения /3.11/ из [4] /. Нелокальность кулоновской калибровки уже была охарактеризована во введении.

Формулировки [5,9,10] еще более нелокальны: в них взаимодействие размазано и во времени.

Итак, в полученной форме квантовой электродинамики взаимодействие минимально нелокально по сравнению с другими известными безпотенциальными формами. По-видимому, еще менее нелокальной формы не существует.

Этот раздел мы закончим двумя замечаниями.

а/ Связь $\psi'$, $\vec{\mathfrak{a}}$ и $\psi$, $\vec{A}_{\perp}$ можно записать в виде операторного калибровочного преобразования

$$\psi'(\vec{x},t) = \psi(\vec{x},t)\exp ie\Lambda(\vec{x},t)\,, \qquad \vec{\mathfrak{a}}(\vec{x},t) = \vec{A}(\vec{x},t) - \vec{\nabla}\Lambda(\vec{x},t)$$

$$\Lambda(\vec{x},t) = -\int_{\vec{r}}^{\vec{x}}(\vec{A}_{\perp}(\vec{\xi},t)\,d\vec{\xi})\,. \qquad /15/$$

Действительно, соотношения /15/ есть просто соотношения /2/ и /8/, но записанные в терминах гейзенберговских операторов. Заметим, что полное электрическое поле $\vec{E}$ одно и то же в новой и кулоновской калибровках, но только в новой оно должно быть выражено через $E'_{\perp}$. Для этого надо в

$$\vec{E} = \vec{E}_{\perp} - \vec{\nabla}\int d^3y\,\rho(\vec{y})/4\pi|\vec{x}-\vec{y}|$$

заменить $E_\perp$ на $E'_\perp$ с помощью /5/. Соотношение $\mathrm{div}\,\vec{\mathcal{Q}}=0$ теперь не имеет места, новая калибровка характеризуется условием

$$\int_{\vec{r}}^{\vec{x}} (\vec{\mathcal{Q}}(\vec{\xi})\, d\vec{\xi}) = 0\,, \qquad \forall\, \vec{x}. \qquad /16/$$

Оно может быть проверено взятием интеграла /16/ от соотношения $\vec{\mathcal{Q}} = \vec{A}_\perp - \vec{\nabla}\Lambda$ см. /15/, или от соотношения /9/.

б/ Покажем, что результаты расчетов с гамильтонианом /13/ не зависят от параметра $\vec{r}$, явно фигурирующего в членах взаимодействия /13/. Для примера рассмотрим взаимодействие /14/.

Поскольку коммутационные соотношения для $\psi'$, $\vec{E}'_\perp$, $\vec{H}'$ те же, что и в кулоновской калибровке, то мы можем принять для $\psi'$, $\vec{E}'_\perp$, $\vec{H}'$ обычные разложения по операторам уничтожения - рождения электронов-позитронов $a'^+$, $a'$, $b'^+$, $b'$ и поперечных фотонов $c'^+$, $c'$. Конечно, /2/ означает, что $a'^+$, $a'$ выражаются не только через старые электрон-позитронные операторы, но и через старые фотонные.

Для $\psi'$ следует применять разложение по собственным функциям гамильтониана уравнения Дирака с внешним потенциалом U. Эти функции фактически зависят от $\vec{x}-\vec{r}$, если $\vec{r}$ есть центр U. Поэтому матричные элементы $\langle|\rho|\rangle$ от оператора $\rho(\vec{x})$ в /14/ должны зависеть от $\vec{x}-\vec{r}$: $\langle|\rho|\rangle \equiv M(\vec{x}-\vec{r})$. Интеграл

$$\int d^3x\, M(\vec{x}-\vec{r}) \int_0^1 d\alpha\, (\vec{x}-\vec{r})\, \vec{E}'_\perp(\vec{r}+\alpha(\vec{x}-\vec{r})) \qquad /17/$$

после замены переменных $x' = x - r$ превращается в

$$\int d^3x' M(\vec{x}') \int_0^1 d\alpha\, \vec{x}' \vec{E}'_\perp(\vec{r}+\alpha\,\vec{x}')\,. \qquad /18/$$

Оператор $\vec{E}'_\perp(\vec{x})$ можно разлагать не по $\exp i\vec{k}\vec{x}$, а по $\exp i\vec{k}(\vec{x}-\vec{r})$

$$\vec{E}'_\perp(\vec{x}) = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \sum_{\lambda=1,2} \sqrt{\frac{k}{2}}\, \vec{e}_\lambda(\vec{k}) \left[ e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{r})} c'(\vec{k},\lambda) - \text{э.с.} \right]. \qquad /19/$$

Такое разложение может быть удобным для расчетов в дипольном приближении, когда $\vec{E}'_\perp(\vec{\xi})$ в /14/ или /18/ заменяется на $\vec{E}'_\perp(\vec{r})$. Поскольку левая часть /19/ от $\vec{r}$ не зависит, то мы должны считать, что операторы $c'(\vec{k},\lambda)$ зависят от $\vec{r}$. При разложении /19/ $\vec{E}'_\perp(\vec{r}+\alpha\vec{x}')$ будет зависеть от $\vec{r}$ только через посредство $c'(\vec{k},\lambda)$.

Итак, получаем, что матричные элементы /14/ не зависят явно от $\vec{r}$. Неявная же зависимость через посредство операторов рождения-уничтожения не отражается на результатах, если для этих операторов мы выбираем обычное фоковское представление, одно и то же для любого $\vec{r}$.

Эти рассуждения можно повторить для всех других членов /13/, явно содержащих $\vec{r}$. Таким образом, физические следствия /13/ не зависят от $\vec{r}$ /как это и должно быть для изолированной системы/.

## *3. МОДИФИКАЦИИ И ОБОБЩЕНИЯ*

*3.1.* Вместо интегрирования $(\vec{A}_\perp d\vec{\xi})$ по прямой $\vec{r} \to \vec{x}$ можно интегрировать по некоторой криволинейной траектории. Однако тогда в теории кроме $\vec{r}$ будут фигурировать дополнительные параметры /кривизна траектории, например/.

*3.2.* Интеграл $\int(\vec{A}_\perp d\vec{\xi})$ берется по точкам $\vec{\xi}$ с одинаковым $t$. Возможно обобщение на определенный тип пространственноподобных траекторий. Однако такое обобщение более естественно применять, если в качестве исходной брать ковариантную лоренцевскую калибровку, а не кулоновскую. Такой подход имел бы как свои достоинства, так и недостатки / связанные с необходимостью учета дополнительного условия Лоренца/.

*3.3.* Можно провести усреднение по некоторому множеству $M$ точек $\vec{r}$. Для этого всюду в разделе 2, где фигурирует интеграл $\int_{\vec{r}}^{\vec{x}}$, перед ним надо поставить $\int d^3r\, m(\vec{r})$. Функция $m(\vec{r})$ должна быть нормирована на единицу. Если $M$ расположено в области локализации электрона $V$, то взаимодействие остается минимально-нелокальным. В частности, можно расположить точки вблизи границы $V$, например, равномерно на минимальной сфере, содержащей $V$.

При таком усреднении последний член в /13/ превращается в $Q^2/R$/ $R$ - радиус сферы/, становится фактически с-числовым и может быть опущен из $H$. Таким образом, взаимодействие электронов с фиктивным зарядом $Q$ исчезает, если $Q$ размазано по сфере, а электроны локализованы внутри.

Можно показать, что при $R \to \infty$ новая форма превращается в кулоновскую калибровку.

*3.4.* Смешанная калибровка: в /3/ интеграл по $\vec{x}'$ берется не по всему пространству, а по конечной области $V$, где эффективно локализованы электроны. В этом случае плотность гамильтониана имеет разный вид вне и внутри $V$.

*3.5.* Если электроны локализуются не в одной, а в нескольких удаленных друг от друга областях пространства $V_1, V_2, \ldots$, то минимально-нелокальная форма теории будет получена при следующем обобщении S. Пусть все пространство разделено на части $W_1, W_2, \ldots$, так что $V_n \subset W_n$. Тогда

$$S = \exp[-ie\int_{W_n} d^3x\,\rho(\vec{x})\int_{\vec{r}_n}^{\vec{x}}(\vec{A}_\perp d\vec{\xi})],$$

если преобразуется поле в точке $\vec{x} \in W_n$ /$r_n$ есть "центр" $V_n$ /. Эквивалентная запись:

$$S = \exp[-ie\int d^3x \sum_n \Pi_n\,\rho(\vec{x})\int_{\vec{r}_n}^{\vec{x}}(\vec{A}_\perp\, d\vec{\xi})], \qquad /20/$$

где $\Pi_n = 1$, если $\vec{x} \in W_n$ и $\Pi_n = 0$, если $\vec{x}$ вне $W_n$. Возможно другое определение $\Pi_n$: $\Pi_n = 1$, если $\vec{x} \in V_n$ и $\Pi_n = 0$, если $\vec{x} \notin V_n$. Тогда получаем обобщение смешанной калибровки пункта 3.4.

*3.6.* Квантовая электродинамика с несколькими заряженными полями. Пусть есть два поля - электронное $\psi_e$ и протонное $\psi_p$. Тогда

$$S = \exp\{-ie\int d^3x\,[\rho_e(\vec{x}) - \rho_p(\vec{x})]\int_{\vec{r}}^{\vec{x}}(\vec{A}_\perp\, d\vec{\xi})\}. \qquad /21/$$

Такое S дает минимально-нелокальное взаимодействие в случае, если и электроны и протоны локализованы в одной области /например, в кристалле/.

## *4. ПРИМЕНЕНИЯ*

Обсудим приложения новой формы теории на примере одной нерелятивистской бесспиновой частицы /будем называть ее по-прежнему электроном/, взаимодействующей с квантованным электромагнитным полем. Гамильтониан в кулоновской калибровке имеет вид

$$H = [\vec{p} - e\vec{A}_\perp(\vec{q})]^2/2m + U(\vec{q} - \vec{r}) + \frac{1}{8\pi}\int d^3x(\vec{E}^2 + \vec{H}^2). \qquad /22/$$

Замена $\vec p - e\vec A_\perp$ на $\vec p\,' - e\vec{\mathfrak{A}}$, ср. /11/, осуществляется преобразованием:

$$S = \exp\left[-ie\int_{\vec r}^{\vec q}(\vec A_\perp(\vec\xi)\, d\vec\xi\,)\right]. \qquad /23/$$

где $\vec q$ - координата электрона. В терминах $\vec p\,' = S^{-1}\vec p S$ и $\vec E' = S^{-1}\vec E_\perp S$ гамильтониан /22/ приобретает вид

$$H = [\vec p\,' - e\vec{\mathfrak{A}}(\vec q\,)]^2/2m + U(\vec q - \vec r\,) + \frac{1}{8\pi}\int d^3x\,(\vec E_\perp'^{\,2} + \vec H'^{\,2}) +$$
$$+ e\int_{\vec r}^{\vec q}(\vec E_\perp'(\vec\xi)\, d\vec\xi\,) + e\sum_m \int_{\vec r}^{\vec q} d\xi_m \int_{\vec r}^{\vec q} d\xi_m'\, \delta^{(3)}(\vec\xi - \vec\xi\,') - \frac{e^2}{2\pi|\vec q - \vec r\,|}. \qquad /24/$$

Последний член есть кулоновское взаимодействие с фиктивным зарядом, равным полному заряду системы $e$ и расположенному в точке $\vec r$.

В дипольном приближении, когда $\vec E_\perp'(\vec\xi)$ и $\vec H'(\vec\xi)$ в $\vec{\mathfrak{A}}$, см. /9/, заменяются на $\vec E'(\vec r)$ и $\vec H'(\vec r)$, имеем

$$\int_{\vec r}^{\vec q}(\vec E'(\vec\xi)\, d\vec\xi\,) = \vec E'(\vec r)(\vec q - \vec r\,). \qquad /25/$$
$$\vec{\mathfrak{A}} = -\frac{1}{2}(\vec q - \vec r\,)\times\vec H(\vec r\,).$$

Положим в дальнейшем $\vec r = 0$. Если мы учтем следующие члены мультипольных разложений $\vec E'(\vec\xi)$ и $\vec H(\vec\xi)$, то получим из /24/ гамильтониан /78/ из работы Пауэра и Зинау /11/ /для случая одного электрона/. Эти авторы получили /78/ из гамильтониана кулоновской калибровки с помощью преобразования, которое может быть получено из /23/, если заменить там $\vec A_\perp(\vec\xi)$ его разложением в ряд Маклорена.

Можно считать, что дипольные члены взаимодействия кулоновской калибровки /из первого члена /22// в новой форме заменяются взаимодействием $\vec E_\perp'\vec q$ /можно пренебречь взаимодействием нерелятивистского электрона с $\vec H$ через посредство $\vec{\mathfrak{A}}$, см. первый член /24//. $\vec E\vec q$ взаимодействие приобрело известность в связи с формой линии уровня $2^2S_{1/2}$ водорода*

---

* Оно известно уже давно в случае, когда $E$ - внешнее поле, а не квантованное. Например, оно используется в расчете эффекта Штарка. В этих же рамках $\vec E\vec q$ взаимодействие обсуждается и в недавних работах /12,13/.

Полученная в экспериментах Лэмба форма не согласовывалась с обычным расчетом, использующим взаимодействие $-\vec{p}\vec{A}/m$, но согласовывалась с $\vec{E}\vec{q}$. Этот вопрос важен для теории лэмбовского сдвига: сдвиг много меньше ширины уровня и важно точно найти центр линии. Подробное его обсуждение и ссылки можно найти в /14/. Там показано, что более тщательный расчет формы уровня со взаимодействием $-\vec{p}\vec{A}/m$ согласуется с $\vec{E}\vec{q}$ расчетом, но последний оказывается более простым. В связи с этим напомним, что новая форма теории отличается от кулоновской калибровки только сменой калибровки /15/.

Однако вопрос об эквивалентности оказывается более сложным в другой задаче, которую мы сейчас изложим.

Рассмотрим систему, описываемую гамильтонианом /22/ с внешним потенциалом $U$, локализующим электрон в области $V$. Пусть система находится в некотором стационарном состоянии, пока в момент $t_0$ не включается внешний ток $I$, локализованный внутри области $W$, удаленной от $V$ /в/22/ появляется член вида $\int d^3x I A$/. К моменту $t>t_0$ напряженности $\vec{E}$ и $\vec{H}$ изменяются только в конечной области $W_t$, граница которой отстоит от границы $W$ на расстояние $c(t-t_0)$. В /15/ показано, что гейзенберговский оператор $A_\perp$ в этих условиях изменяется и вне $W_t$ /за "световым фронтом"/, причем градиентным образом

$$\vec{A}_\perp(\vec{x},t) \to \vec{A}_\perp(\vec{x},t) + \vec{\nabla}\lambda(\vec{x},t)\,. \qquad /26/$$

Такое "непричинное" поведение $A_\perp$ является следствием нелокальной формулы /1/. В /26/ функция $\lambda$ -гармоническая, $\Delta\lambda=0$, но только вне $W_t$ *.

Вне $W_t$ изменяется и оператор импульса: $\vec{p}\to\vec{p}+e\nabla\lambda$ /а также и вторично-квантованное поле: $\psi\to\psi\exp(ie\lambda(\vec{x}))$. /. Вместо изменения $\vec{p}$ можно говорить об изменении волновой функции электрона $\phi(\vec{q})\to\phi(\vec{q})\exp ie\lambda(\vec{q})$. Эти изменения $A_\perp$ и $\phi$ названы в /15/ квазиградиентными преобразованиями, поскольку имеют вид калибровочных /градиентных второго рода/

---

*Если бы $\lambda$ была гармонической везде и если мы требуем, чтобы $A_\perp$ убывало на бесконечности, то тогда $\nabla\lambda=0$ всюду. Именно поэтому калибровочные преобразования отсутствуют в кулоновской калибровке.

преобразований, но только вне $W_t$. Они не должны приводить к каким-либо наблюдаемым эффектам в области V в момент t, если расстояние R между V и W превышает $c(t-t_0)$. Однако ненаблюдаемое изменение $\phi(\vec{q}) \to \phi(\vec{q}) \exp ie\lambda(\vec{q})$ волновой функции уже не сводится в импульсном представлении к умножению на фазовый множитель. Распределение по импульсам $|\phi(\vec{p})|^2$ изменяется, но это изменение следует считать фиктивным. В моменты времени, когда $W_t$ частично накрывает V, изменение $|\phi(\vec{p})|^2$ оказывается фиктивным только частично. То же самое можно сказать и о распределении электрона по энергиям, если под его энергией понимать оператор $\vec{p}^{\,2}/2m + U(\vec{q})$. Другими словами, часть вычисленной в кулоновской калибровке вероятности возбуждения электрона в описанной ситуации может оказаться фиктивной, ненаблюдаемой.

Изложенная трудность отсутствует в новой форме и в этом ее достоинство. Например, оператор $\psi'(\vec{x})$ при $\psi \to \psi \exp ie\lambda(\vec{x})$ и $\vec{A}_\perp \to \vec{A}_\perp + \vec{\nabla}\lambda$, согласно /2/, приобретает только фазовый множитель, не зависящий от $\vec{x}$:

$$\psi'(\vec{x}) \to \psi'(\vec{x}) \exp ie\lambda(\vec{r}) . \qquad /27/$$

Это преобразование не изменяет ни координатного, ни импульсного распределения. Можно также непосредственно показать, что $\vec{p}' = S^+\vec{p}S$, в отличие от $\vec{p}$, не изменяется, пока $W_t$ не накроет область локализации электрона V.

Таким образом, кулоновская калибровка и новая форма в описанной задаче дадут одинаковые результаты, только если в расчетах кулоновской калибровки мы сумеем надлежащим образом выделить и отбросить фиктивные части квазиградиентного происхождения.

В заключение одно замечание об инфракрасных расходимостях. Бялыницки-Бируля /16/ интегралы вида $\int A\, d\xi$ тоже использовал для переформулировки квантовой электродинамики, однако он вводил их только в функции Грина. Он показал, что модифицированные пропагаторы свободны от инфракрасных расходимостей. Ввиду этого можно ожидать, что и в предлагаемой форме теории инфракрасной проблемы нет.

Благодарю В.И.Огиевецкого за обсуждение этой работы.

## *ДОПОЛНЕНИЕ*

Отметим, что безпотенциальные формулировки Мандельстама[4] и Де Витта[3] существенно различаются, несмотря на внешнее сходство исходных выражений $\psi' = \psi \exp[-ie\int^{x} A_\mu \, d\xi_\mu]$. У Мандельстама траектория интегрирования не фиксирована и $\psi'$ зависит от вариации траектории, см. /2.8/ в[4]. Ввиду определения /2.11/ “градиентно-инвариантной производной“ имеем, согласно[4],

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \int_{-\infty}^{x} A \, d\xi = \Big[ \int_{-\infty}^{x+\Lambda x_\mu} - \int_{-\infty}^{x} \Big] / \Lambda x_\mu = A_\mu(x),$$

где $\int_{-\infty}^{x+\Lambda x_\mu}$ определяется как сумма $\int_{-\infty}^{x} + \int_{x}^{x+\Lambda x_\mu}$, в которой второй интеграл берется по прямой, соединяющей точки $x$ и $x + \Lambda x_\mu$.

В подходе Де Витта, который принят здесь, траектория фиксирована. Координаты $\xi_m$ точек траектории, подходящей к точке $x$, описываются функциями $\phi_m(x, \alpha)$, зависящими от одного параметра $\alpha$: $\xi = \phi(x, \alpha)$. У нас $\phi_m(x, 0) = r_m$ и $\phi_m(x, 1) = x_m$. Простейшая траектория, соединяющая $r$ с $x$, есть прямая $\xi = r + \alpha(x - r)$.

Производная $\frac{\partial}{\partial x_k} \int A \, d\xi$ теперь должна определяться и вычисляться следующим образом:

$$\lim \frac{1}{\Lambda} \Big[ \int_{r}^{x+e_k\Lambda} A d\xi - \int_{r}^{x} A d\xi \Big] = \lim \frac{1}{\Lambda} \Big[ \int_{r}^{x+e_k\Lambda} +$$

$$+ \int_{x+e_k\Lambda}^{x} + \int_{x}^{r} + \int_{x+e_k\Lambda}^{x} \Big] = \lim \frac{1}{\Lambda} \oint A d\xi + A_k(x). \qquad /Д.1/$$

Здесь $e_k$ есть $k$-тый орт. Мы прибавили и вычли интеграл $\int_{x}^{x+e_k\Lambda} = A_k(x)\,\Lambda$. Интеграл $\oint$ берется по замкнутому пути $\vec{r} \to \vec{x} + \vec{e}_k\Lambda \to \vec{x} \to \vec{r}$ /см. *рис. 1*/. Согласно формуле Стокса,

$$\oint (\vec{A} d\vec{\xi}) = \frac{1}{2} \iint \sum_{m,n} \Big( \frac{\partial}{\partial \xi_m} A_n - \frac{\partial}{\partial \xi_n} A_m \Big) d\xi_m d\xi_n =$$

$$= \frac{1}{2} \iint \sum_{mn} F_{mn}(\vec{\xi}) \, d\xi_m \, d\xi_n. \qquad /Д.2/$$

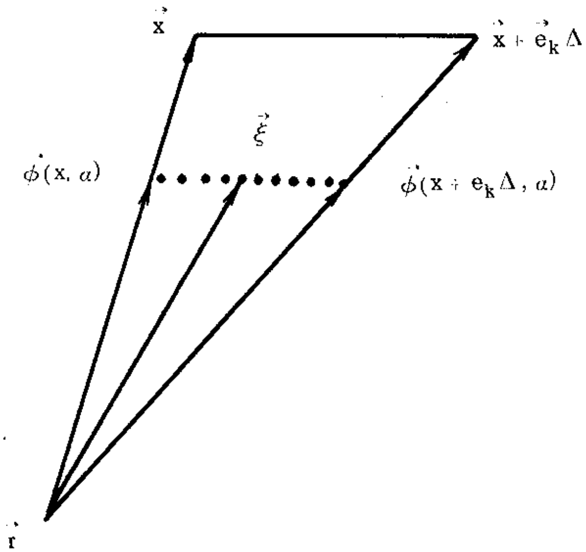


*Рис.1*

Точка $\vec{\xi}$ поверхности, по которой берется интеграл $\iint$ есть сумма вектора $\vec{\phi}(\vec{x},\alpha)$ и вектора $\beta\vec{a} \equiv \beta\,[\vec{\phi}(\vec{x}+\vec{e}\,\Delta,\alpha)-\vec{\phi}(\vec{x},\alpha)]$. На *рис. 1* $\vec{a}$ обозначен пунктиром. Когда $\beta$ меняется от О до 1, $\vec{\xi}$ пробегает значения от $\vec{\phi}(\vec{x},\alpha)$ до $\vec{\phi}(\vec{x}+\vec{e}_k\Delta,\alpha)$

$$\vec{\xi} = \vec{\phi}(\vec{x},\alpha) + \beta\,[\vec{\phi}(\vec{x}+\vec{e}_k\Delta,\alpha)-\vec{\phi}(\vec{x},\alpha)] \simeq$$

$$\simeq \vec{\phi}(\vec{x},\alpha) + \beta\Delta\frac{\partial}{\partial x_k}\vec{\phi}(\vec{x},\alpha)\,. \qquad /Д.3/$$

С точностью до величины порядка $\Delta^2$ имеем

$$D(\xi_m,\xi_n)\,/\,D(\alpha,\beta) = \left(\frac{\partial\phi_m}{\partial\alpha}\frac{\partial\phi_n}{\partial x_k} - \frac{\partial\phi_n}{\partial\alpha}\frac{\partial\phi_m}{\partial x_k}\right)\Delta\,, \qquad /Д.4/$$

Ввиду $\Delta\to 0$ $F_{mn}(\vec{\xi})$ в /Д.2/ можно взять в точке $\vec{\phi}(\vec{x},\alpha)$ и тогда

$$\oint(\vec{A}\,d\vec{\xi}) = \frac{1}{2}\int_0^1 d\alpha\, F_{mn}(\vec{\phi}(\vec{x},\alpha))\left(\frac{\partial\phi_m}{\partial\alpha}\frac{\partial\phi_n}{\partial x_k} - \frac{\partial\phi_n}{\partial\alpha}\frac{\partial\phi_m}{\partial x_k}\right)\times$$

$$\times\,\Delta\int_0^1 d\beta = \Delta\int_0^1 d\alpha\, F_{mn}\frac{\partial\phi_m}{\partial\alpha}\frac{\partial\phi_n}{\partial x_k} \qquad /Д.5/$$

/использовано $F_{mn} = -F_{nm}$ /. Итак, из /Д.1/, /Д.2/ и /Д.5/ получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \int_{\vec{r}}^{\vec{x}} (A d\xi) = \int_0^1 d\alpha \, F_{mn} \frac{\partial \phi_m}{\partial \alpha} \frac{\partial \phi_n}{\partial x_k} + A_k(x) . \qquad /Д.6/$$

Если $\xi = \vec{r} + \alpha (\vec{x} - \vec{r})$, то интеграл /Д.5/ равен

$$\int_0^1 d\alpha \sum_{m,n} F_{mn} (\vec{x} - \vec{r})_m \delta_{nk} \alpha = - \int_0^1 \alpha d\alpha \, (\vec{x} - \vec{r}) \times \vec{H} . \qquad /Д.7/$$

Подставляя /Д.7/ в /Д.6/, получаем /8/.

В [7] тоже вводится интеграл $\int \vec{A} d\vec{\xi}$ по конечному отрезку, но уравнение /16/ из [7] для $\vec{\nabla} \int \vec{A} \, d\vec{\xi}$ неправильно. Ввиду этого мы и привели вывод /8/. Заметим, что наш результат совместен с соотношением /7/ из [3].

*ЛИТЕРАТУРА*


1. *Гайтлер В. Квантовая теория излучения. ИИЛ, М., 1956.*
2. *Belinfante F.J. Phys.Rev., 1962, 128, p. 2832.*
3. *DeWitt B.S. Phys.Rev., 1962, 125, p. 2182.*
4. *Mandelstam S. Ann. of Phys., 1962, 19, p. 1.*
5. *Огиевецкий В.И., Полубаринов И.В. ЖЭТФ, 1962, 43, с. 1365.*
6. *Dirac P.A. Proc.Camb.Phil.Soc., 1934, 30, p. 150, Can.Journ. Phys., 1955, 33, p. 650.*
7. *Capps R.H., Holladay W.G. Phys.Rev., 1955, 99, p. 931.*
8. *Бьеркен Д., Дрелл С. Релятивистская квантовая теория. "Наука", М., 1978, т. 2.*
9. *Levy M. Nucl.Phys., 1964, 57, p. 152.*
10. *Rohrlich F., Strocchi F. Phys.Rev., 1965, B139, p. 476.*
11. *Power E.A., Zienau S. Phil.Trans.Roy.Soc., 1959, 251, p. 427.*
12. *Kuo-Ho Yang. Ann. of Phys., 1976, 101, p. 62.*
13. *Forney J.J. et al. Nuovo Cim., 1977, 37B, p. 78.*
14. *Fried Z. Phys.Rev., 1973, A8, p. 2835.*
15. *Широков М.И. УФН, 1978, 124, с. 697.*
16. *Bialynicki -Birula I. Math.Phys. and Phys.Math., v. 2, ed. Maurin, Polish. Sci.Publ.Boston, 1976, p. 39.*



*Рукопись поступила в издательский отдел*
*9 июля 1979 года.*