сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р4 - 12576

К.И.Иванов, А.Т.Маринов

МЕТОД ФАЗОВЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ДАЛЬНОДЕЙСТВУЮЩИХ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

1979

P4 - 12576

К.И.Иванов, А.Т.Маринов

МЕТОД ФАЗОВЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ДАЛЬНОДЕЙСТВУЮЩИХ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Иванов К.И., Маринов А.Т. P4 - 12576

Метод фазовых функций для дальнодействующих
сферически симметричных потенциалов

Развивается метод фазовых функций дальнодействующих сферически симметричных потенциалов, убывающих на бесконечности. Доказывается существование асимптотически компенсирующего оператора /АКО/ для таких потенциалов, через который выражаются операторы, сопряженные с обобщенными волновыми операторами. Выводятся фазовые уравнения с короткодействующими эффективными потенциалами, зависящими от энергии. В эти уравнения как базисные функции входят линейно независимые решения свободного радиального уравнения Шредингера. Поскольку эффективные потенциалы являются короткодействующими, то фазовые функции, удовлетворяющие рассматриваемым фазовым уравнениям,имеют конечные значения на бесконечности. Через эти значения выражаются фазы рассеяния. К рассматриваемым фазовым уравнениям применимы обычные методы нахождения их решений - итерационные, вариационные, метод линеаризации, метод формальных рядов и другие.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообшение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Ivanov K.I., Marinov A.T. P4 - 12576

The Variable Phase Method for Long-Range Spherical
Symmetric Potentials

The variable phase method for long-range spherical symmetric potentials which decrease at infinity as some reverse powers of the distance and even slower ones is developed. The prove of the existence of the asymptotically compensating operator is given. The modified Lypmann-Schwinger equations for the long-range spherical symmetric potentials have been used to obtain phase equations with short-range effective potentials, the basic functions of which satisfy the free radial Schrödinger equation. Using values of the phase functions at the infinity one can express the phase shifts. The phase equations are solvable by iterative methods and by the method of formal series.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

1. ВВЕДЕНИЕ

Метод фазовых функций, при котором используется стандартное фазовое уравнение Калоджеро-Бабикова [1,2], становится малоэффективным в случае дальнодействующего потенциала, убывающего на бесконечности как обратная величина модуля r радиус-вектора $\vec{r}$, или еще медленнее. В этом случае обычно выводится другое фазовое уравнение, в котором вместо волновых функций свободного движения участвуют линейно независимые решения радиального уравнения Шредингера с потенциалом, равным дальнодействующей компоненте данного потенциала [2]. Такой подход применим, если, например, потенциал можно представить в виде суперпозиции кулоновского и короткодействующего сферически симметричного потенциала. Однако если дальнодействующая компонента потенциала не является кулоновским потенциалом, то, вообще говоря, нахождение соответствующих решений уравнения Шредингера, используемых как базисные функции в новом фазовом уравнении - весьма сложная математическая задача. Поэтому для большинства дальнодействующих потенциалов метод фазовых функций в таком виде мало используется для численных расчетов фаз рассеяния.

В настоящей работе рассматриваются такие фазовые уравнения для дальнодействующих сферических симметричных потенциалов, в которые входят волновые функции свободного движения и эффективные короткодействующие потенциалы, зависящие от энергии. Эти фазовые уравнения выводятся из модифицированных уравнений Липпмана-Швингера, полученных в работе [3] при помощи так называемого асимптотически компенсирующего оператора (АКО)Z. В работе [3] доказано существование АКО для потенциалов, убывающих на бесконечности как r^{-a} для $a \in (½,\ 1]$. Установленные нами результаты относятся к гораздо более широкому классу дальнодействующих потенциалов, убывающих не только как некоторая отрицательная степень r, но и медленнее такой произвольной степени.

Поскольку S-матричное описание процесса рассеяния на дальнодействующем потенциале и вывод модифицированных уравнений Липпмана-Швингера осуществляются с помощью обобщенных волновых операторов $\Omega_{\pm}$ /4,5,6/, мы рассматриваем /в разделе 2/определение и некоторые свойства этих операторов для дальнодействующих потенциалов, которые удовлетворяют сформулированным ниже условиям. Доказательство существования АКО и вывод модифицированных уравнений Липпмана-Швингера методом, использованным в /3/, даны в разделе 3. В разделе 4 выводятся фазовые уравнения и устанавливаются основные свойства их решений. Некоторые результаты, полученные в разделах 2, 3 и 4, вытекают непосредственно из соответствующих результатов для дальнодействующих сфероидальных потенциалов, рассматриваемых в работе /7/. Поэтому мы здесь не приводим их подробные доказательства.

Относительно рассматриваемых нами сферически симметричных дальнодействующих потенциалов предполагается, что они являются вещественными функциями модуля радиус-вектора $\vec{r}$ точки трехмерного векторного пространства R^3, и что они удовлетворяют следующему общему условию /8/:

$$\text{K)}\quad U(r) \in L^2(R^3) + L^{\infty}(R^3).$$

Из этого условия вытекает H_0- ограниченность $(H_0 = -\Delta)$ оператора U и самосопряженность полного гамильтониана $H = H_0 + U$ на области определения $D(H_0) \subset \mathcal{H} = L^2(R^3)$ оператора U.

Сформулируем более подробно условия, которым удовлетворяют потенциалы U.

1/ Будем предполагать, что функция $rU(r) \in L^1(\Lambda)$, где Λ- произвольное компактное борелево подмножество множества $R^1_+ = \{r \mid r \geq 0\}$ и что существует такое $\beta > 1/2$, что

$$|U(r)| = O(r^{\beta-2}), \quad (r \to 0).$$

2/ Существует некоторое $R_0 > 0$, такое, что сужение функции U на интервале $[R_0, \infty)$ является $C^2([R_0, \infty))$ - функцией.

Пусть $\Gamma^3(R^1_+;\ R_0)$ - множество всех функций $\tau(r) \in C^3(R^1_+ \setminus \{0\})$, таких, что

$$\tau(0) = 0,\ \tau'(r) > 0,\ \lim_{r\to\infty} \tau(r) = \infty,\ M_0 = \sup_{r \geq R_0} \frac{r\tau'(r)}{\tau(r)} < \infty.$$

Будем предполагать, что

3/ Существует такое $M > 0$ и такая функция $\tau \in \Gamma^3(R^1_+, R_0)$, удовлетворяющая для любого $\delta > 0$ условию

$$\tau(r) = o(r^{1+\delta}), \quad (r \to \infty),$$

что для произвольного $r \geq R_0$,

$$|U(r)| \leq \frac{M}{\tau(r)}, \quad |U'(r)| \leq \frac{M\tau'(r)}{\tau^2(r)},$$

$$|U'(r)| \leq \frac{M}{r\tau(r)}, \quad |U''(r)| \leq \frac{M\tau'(r)}{r\tau^2(r)}.$$

Сформулированным условиям удовлетворяют, кроме степенных потенциалов $U = \text{const.}\, r^{-a}$, $(a > 0)$, также

а/ логарифмические потенциалы

$$U = \text{const.}\, r^{-a} \ln^{-\beta} r, \quad (0 \leq a \leq 1,\ \beta > 0,\ r \geq R_0 > 1);$$

б/ потенциалы вида

$$U = \text{const}/\ln\ln r, \quad (r \geq R_0 \geq 1 + e)$$

и другие. Частным случаем рассматриваемых потенциалов являются потенциалы, имеющие кулоновское поведение на бесконечности.

Из условия 3 следует, что для любого данного $k > 0$

$$\nu_0(k) = \sup\{r \mid r \ge R_0,\ k^2 - U(r) = 0\} < \infty. \qquad /1.1/$$

/Функцию ν_0 считаем равной R_0, если множество, входящее в /1.1/, является пустым/. Возьмем любое $\delta > 0$ и определим функцию

$$r_0(k) = \begin{cases} \sup\limits_{k>0} \nu_0(k) + \delta, & \text{если} \ \sup\limits_{k>0} \nu_0(k) < \infty; \\ \kappa\left(\dfrac{M}{k^2} + \tau(R_0)\right) + \delta, & \text{если} \ \sup\limits_{k>0} \nu_0(k) = \infty, \end{cases}$$

где $\kappa(\tau)$ - функция, обратная функции τ. Легко показать, что $r_0(k)$ является $C^2(R^1_+ \setminus \{0\})$ - функцией. Эта функция участвует в некоторых определениях, которые встречаются в разделах 2, 3 и 4.

Отметим, что все формулы в настоящей работе написаны в мерной системе, в которой масса рассеивающейся частицы $m = 1/2$ и $\hbar = 1$.

2. *ВОЛНОВЫЕ ОПЕРАТОРЫ ДЛЯ ДАЛЬНОДЕЙСТВУЮЩИХ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ*

Волновые операторы $\Omega_\pm$ пары самосопряженных операторов (H, H_0) в стационарной теории рассеяния определяются при помощи регулярных решений радиального уравнения Шредингера. Если потенциал удовлетворяет условиям 1/, 2/, и 3/, то можно доказать существование двух регулярных решений $u^\pm_\ell(k; r)$, $(\ell = 0, 1, \dots)$ этого уравнения со следующей асимптотикой на бесконечности $(k > 0)$

$$u^\pm_\ell(k, r) \underset{r\to\infty}{=} \pm\frac{i}{2} e^{\pm i\pi\ell/2}\{e^{\mp i\kappa(k,r)} - e^{\pm i[2\delta_\ell(k) - \pi\ell + \kappa(k,r)]}\}.$$

В этой формуле $k = \sqrt{E}$,/ E - энергия рассеивающейся частицы/,

$$\kappa(k, r) = \int_{r_0(k)}^{r} \sqrt{k^2 - U(x)}\,dx + k\, r_0(k),$$

а $\delta_\ell(k)$ - вещественные фазы, являющиеся непрерывно дифференцируемыми функциями k на $R^1_+ \setminus \{0\}$. Определим функции

$$\Phi^\pm_{m\ell}(k; \vec r) = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, u^\pm_\ell(k; r)\, Y^m_\ell(\theta, \phi), \quad (k > 0), \qquad /2.1/$$

$$\Phi_{m\ell}(k; \vec r) = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, j_\ell(kr)\, Y^m_\ell(\theta, \phi), \qquad /2.2/$$

где r, θ, ϕ - сферические координаты точки пространства R^3, Y^m_ℓ - нормированные сферические функции Лапласа /$\ell = 0, 1, \dots$, $m = 0, \pm 1, \dots, \pm\ell$/, и $j_\ell(z)$ - функции Рикатти-Бесселя [1].
Пусть $C^1_0(R^1_+)$ - множество всех непрерывно дифференцируемых функций переменной k на R^1_+ с компактными носителями, отделимыми от нуля. Нетрудно показать, что множество $C^1_0(R^1_+)$ плотно в гильбертовом пространстве $L^2(R^1_+)$.
На $C^1_0(R^1_+)$ определим операторы $\omega^\pm_{m\ell}$ и $\omega^0_{m\ell}$ формулами

$$(\omega^\pm_{m\ell} f)(\vec r) = \int_0^\infty \Phi^\pm_{m\ell}(k; \vec r) f(k)\,dk,$$

$$(\omega^0_{m\ell} f)(\vec r) = \int_0^\infty \Phi_{m\ell}(k; \vec r) f(k)\,dk,$$

и продолжим их по изометричности на все пространство $L^2(R^1_+)$.
Из вещественности фаз $\delta_\ell(k)$ вытекает, что подпространства $\mathrm{Ran}\,\omega^+_{m\ell}$ и $\mathrm{Ran}\,\omega^-_{m\ell}$ гильбертова пространства $\mathcal{H}$ совпадают

$$\mathrm{Ran}\,\omega^+_{m\ell} = \mathrm{Ran}\,\omega^-_{m\ell} = L_{m\ell}, \qquad /2.3/$$

и что подпространства /2.3/ попарно ортогональны.

Волновые операторы $\Omega_\pm$ пары (H, H_0) определяются как непрерывные линейные отображения $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$, сужения которых на линейной оболочке $L^0(C^1_0)$ векторов множеств $L^0_{m\ell} = \omega^0_{m\ell}[C^1_0(R^1_+)]$, являющейся плотным множеством в $\mathcal{H}$, задаются формулой

$$((\Omega_\pm \restriction L^0(C^1_0))\psi)(\vec r) = \sum_{m,\ell}((\omega^\pm_{m\ell}\omega^{0*}_{m\ell})\psi)(\vec r) \qquad (\psi \in L^0(C^1_0)). \qquad /2.4/$$

где $\omega^{0*}_{m\ell}$ - оператор, сопряженный с $\omega_{m\ell}$.

Нетрудно убедиться в корректности этого определения. В самом деле, из того, что операторы $\omega^{\pm}_{m\ell}$ и $\omega^{0}_{m\ell}$ - изометрические, подпространства /2.3/ - попарно отрогональны, и сумма в правой стороне равенства /2.4/ является конечной, вытекает изометричность операторов $\Omega_{\pm}$ и, следовательно, их можно продолжить на все пространство $\mathcal{H}$ с сохранением нормы.

Для операторов $\Omega_{\pm}$ верны следующие теоремы:

Теорема 2.1. Пусть потенциал U удовлетворяет условиям 1/, 2/ и 3/ и пусть $F(\lambda)$ - произвольная борелева функция на интервале $(-\infty, \infty)$. Тогда на плотной в $\mathcal{H}$ области определения $D(F(H_0))$ оператора $F(H_0)$

а/ $F(H)\Omega_{\pm} = \Omega_{\pm} F(H_0)$;

б/ S - матрица, определяемая соотношением

$$S = \Omega^*_{-} \Omega_{+}, \qquad /2.5/$$

коммутирует с оператором $F(H_0)$.

Теорема 2.2. Пусть $F(\lambda)$- произвольная вещественная, возрастающая и выпуклая $C^3(-\infty, \infty)$ -функция и пусть потенциал удовлетворяет условиям 1/, 2/ и 3/. Тогда для векторов ψ из $L^0(C^1_0)$

$$\Omega_{\pm}\psi = \operatorname*{slim}_{t\to\mp\infty} e^{itF(H)} D e^{-itF(H_0)}\psi, \qquad /2.6/$$

где D - не зависящий от t оператор, определенный на $L^0(C^1_0)$.

Доказательства этих теорем приводятся так же, как и доказательства соответствующих утверждений для сфероидальных потенциалов, которые рассматриваются в работе [7]. Нетрудно показать, что каждое из подпространств $L^{\pm} = \mathrm{Ran}\,\Omega_{\pm}$ равно ортогональной сумме всех подпространств /2.3/, так что оператор /2.5/ является унитарным. Элементы матрицы этого оператора в представлении, определяемом сферическими функциями Лапласа, выражаются непосредственно через фазы $\delta_\ell(k)$. Следовательно, если мы найдем эти фазы, то сможем осуществить S-матричное описание процесса рассеяния и вычислить парциальные эффективные сечения.

Отметим, что формула /2.6/ выражает принцип инвариантности Бирмана-Като [9], согласно которому волновые операторы пары (H, H_0) совпадают с волновыми операторами пары $(F(H), F(H_0))$.

3. АСИМПТОТИЧЕСКИ КОМПЕНСИРУЮЩИЙ ОПЕРАТОР Z

Пусть $\eta > 0$ - произвольное число, а $g_\eta(r)$ - некоторая $C^3([0, \infty))$ -функция со следующими свойствами

$$g^{(p)}_\eta(0) = 0, \ (p = 0,1,2,3), \quad 0 \le g_\eta(r) \le 1,$$

$$g_\eta(r) = 1, \ (r \ge \eta), \quad 0 \le g'_\eta(r) \le C/\eta,$$

где C - постоянная, не зависящая от η. Определим на области $\omega_0 = \{(k, r) | k > 0, \ r \ge 0\}$ функцию

$$w(k,r) = \begin{cases} 0, & 0 \le r \le r_0(k) - \delta/2, \\ g_{\delta/2}\left(r - r_0(k) + \frac{\delta}{2}\right) \int\limits_{r_0(k)}^{r_0+\delta_1} w_0(k,t)\, g'_{\delta_1}(t - r_0(k))\,dt, & r_0(k) - \frac{\delta}{2} \le r \le r_0(k), \\ w_0(k,r)\, g_{\delta_1}(r - r_0(k)) + \int\limits_{r}^{r_0(k)+\delta_1} w_0(k,t)\, g'_{\delta_1}(t - r_0)\,dt, & r \ge r_0(k). \end{cases}$$

Здесь $\delta_1 > 0$ - произвольное число, удовлетворяющее условию $\delta_1 < \min(\delta/2, \ \delta/(3C))$, а функция w_0 определяется из трансцендентного уравнения

$$\int\limits_{r_0(k)}^{r+w_0} \sqrt{k^2 - U(x)}\,dx = kr - kr_0(k). \qquad /3.1/$$

Легко видеть, что функция w является непрерывно дифференцируемой функцией на ω_0 и что при $r > 0$

$$1 + \partial w/\partial r > 0.$$

С помощью функции w определим для векторов $\psi^{\pm} \in \Omega_{\pm}[L^0(C^1_0)]$ АКО Z формулой

$$(Z\psi^{\pm})(\vec{r}) = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{m,\ell} Y^m_\ell(\theta,\phi) \int\limits_0^\infty u^{\pm}_\ell(\,;r + w(k,r))(\omega^{0*}_{m\ell}\,\Omega^*_{\pm}\,\psi^{\pm})\,dk. \qquad /3.2/$$

Для этого оператора справедлива

Теорема 3.1. Для любой функции $f(k) \in C_0^1(R_+^1)$

$$\text{а/}\quad (Z\omega^{\pm}_{m\ell} f)(\vec r) \in \mathcal{H}; \qquad /3.3/$$

$$\text{б/}\quad \operatorname*{slim}_{t\to\mp\infty} (Z\omega^{\pm}_{m\ell} - \omega^{0}_{m\ell})(e^{-ik^2t} f) = 0 . \qquad /3.4/$$

Доказательство: Пусть $\operatorname{supp} f \subset [\epsilon_0, N_0]$, $(\epsilon_0 > 0, \quad N_0 > \epsilon_0)$. Очевидно, для достаточно малых r модуль интеграла /3.3/ меньше некоторой постоянной $M_{m\ell}$. При достаточно большом r на основании /3.1/ в этом интеграле появится экспонента $\exp(\pm ikr)$. Конечность нормы вектора /3.3/ доказывается путем применения теоремы Римана-Лебега.

Чтобы доказать утверждение б/, рассмотрим функцию

$$C^{\pm}_{m\ell}(\vec r;t) \equiv ((Z\omega^{\pm}_{m\ell} - \omega^{0}_{m\ell})(e^{\pm ik^2t} f)(\vec r) =$$

$$= \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, Y^m_\ell(\theta,\phi) \int_{\epsilon_0}^{N_0} f(k)\{u^{\pm}_\ell(k; r+w) - j_\ell(kr)\} e^{\pm ik^2t}\, dk, \quad (t>0). \qquad /3.5/$$

Выбирая достаточно большое t и интегрируя по частям относительно $\exp(\pm ik^2t)$, получим оценку

$$|C^{\pm}_{m\ell}(\vec r;t)| \le M_{m\ell}/t, \quad 0 \le r \le \sqrt{t}.$$

Если $r \ge \sqrt{t}$, то имеет место представление

$$C^{\pm}_{m,\ell}(\vec r;t) = \frac{Y^m_\ell(\theta,\phi)}{r\sqrt{2\pi}} \{ e^{\pm i(\ell+1)\pi/2}\, O_{\ell,1}(r) +$$

$$+ e^{\mp i(\ell+1)\pi/2}\, O^{\pm}_{\ell,2}(r)\}, \qquad /3.6/$$

$$O^{\pm}_{\ell,a}(r) = \int_{\epsilon_0}^{N_0} p^{\pm}_{\ell,a}(k,r)\, e^{\pm i(k^2t + (-1)^a kr)} f(k)\, dk, \quad (a = 1,2).$$

Для функций $p^{\pm}_{\ell,a}$, входящих в /3.6/, получаются следующие равномерные относительно $k \in [\epsilon_0, N_0]$ оценки

$$\left|\frac{\partial^\sigma p^{\pm}_{\ell,1}(k,r)}{\partial k^\sigma}\right| \le \frac{M_\ell}{\tau(r^{1/4})}, \quad \left|\frac{\partial^\sigma p^{\pm}_{\ell,2}(k,r)}{\partial k^\sigma}\right| \le M_\ell,$$

$$r \ge \sqrt{t}, \quad (\sigma = 0,1),$$

где M_ℓ - некоторая постоянная. Из этих оценок вытекает неравенство

$$|O^{\pm}_{\ell,2}(r)| \le \frac{M_\ell}{r+t}, \quad r \ge t.$$

В интеграле $O^{\pm}_{\ell,1}$ делаем замену $k = z + r/(2t)$. После интегрирования по частям, при котором появятся интегралы Френеля, получим

$$|O^{\pm}_{\ell,1}(r)| \le \begin{cases} \dfrac{M}{\sqrt{t}\,\tau(r^{1/4})}, & \sqrt{t} \le r \le 3N_0 t, \\ M_\ell (r - 2N_0 t)^{-1}, & r \ge 3N_0 t. \end{cases}$$

С помощью доказанных неравенств находим, что

$$\|C^{\pm}_{m\ell}(\vec r;t)\|^2 \le \text{const.}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{\tau^2(t^{1/8})}\right),$$

откуда следует утверждение б/.

Из этой теоремы вытекает, что для любого вектора $\psi \in L^0(C_0^1)$ /3/

$$\operatorname*{slim}_{t\to\mp\infty} e^{iH_0t} Z e^{-iHt} \psi^{\pm} = \Omega^*_{\pm} \psi^{\pm}, \quad (\psi^{\pm} = \Omega_{\pm}\psi),$$

$$\operatorname*{slim}_{t\to\mp\infty} (Z\Omega_{\pm} - J) e^{-iH_0t}\psi = 0. \qquad /3.7/$$

Формулой /3.7/ выражаются сопряженные операторы $\Omega^*_\pm$ через АКО на множествах $\Omega_\pm[L^0(C^1_0)]$, являющихся плотными в $\operatorname{Ran}\Omega_\pm$.

Методом, использованным в [3], при котором рассматриваются интегралы Бохнера от сильно непрерывных функций, можно получить уравнения

$$Z\psi^\pm = \psi + \operatorname{slim}_{\epsilon\to 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_0-\lambda}{H_0-\lambda \mp i\epsilon} Z\, dP^H_\lambda \psi^\pm , \qquad /3.8/$$

$$\psi^\pm = \Omega_\pm \psi, \quad (\psi \in L^0(C^1_0)),$$

где P^H_ω - проекторнозначная мера оператора H. Из этого уравнения и из определения оператора Z вытекает интегральное уравнение

$$u^\pm_\ell(k; r + w(k,r)) = j_\ell(kr) +$$

$$+ \int_0^\infty \mathcal{G}^\pm_\ell(k; r, r')(H^{(r')}_\ell - k^2) u^\pm_\ell(k; r' + w(k,r'))\, dr', \qquad /3.9/$$

$$H^{(r)}_\ell = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}, \qquad /3.10/$$

$$\mathcal{G}^\pm_\ell(k; r, r') = \mp\frac{1}{ik} j_\ell(kr_<) w^\pm_\ell(kr_>),\ r_< = \min(r,r'),\ r_> = \max(r,r'). \qquad /3.11/$$

Входящие в /3.10/ функции $w^\pm_\ell(z)$ - функции Рикатти-Ханкеля [2], которые выражаются как линейные комбинации функций Рикатти-Бесселя $j_\ell(z)$ и Рикатти-Ноймана $n_\ell(z)$

$$w^\pm_\ell(z) = j_\ell(z) \pm i n_\ell(z).$$

Как отмечалось во введении, с помощью интегрального уравнения /3.9/ можно развить метод фазовых функций и вывести фазовые уравнения.

4. МЕТОД ФАЗОВЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ДАЛЬНОДЕЙСТВУЮЩИХ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Легко понять, что действие оператора $H^{(r)}_\ell - k^2$, входящего в интегральное уравнение /3.9/, эквивалентно действию некоторого эффективного потенциала, в котором линейно участвует оператор дифференцирования $\partial/\partial r$. Чтобы получить фазовые уравнения, в которые входит эффективный потенциал, являющийся оператором умножения, положим

$$u^\pm_\ell(k; r + w(k,r)) =$$

$$\sqrt{1 + w'_r}\,\{\frac{1}{2} w^\pm_\ell(kr) X^\ell_1(k; r) + j_\ell(kr) X^\ell_2(k; r)\}, \qquad /4.1/$$

$$\frac{1}{2} w^\pm_\ell \frac{\partial X^\ell_1}{\partial r} + j_\ell \frac{\partial X^\ell_2}{\partial r} = 0.$$

Из интегрального уравнения /3.9/ вытекает, что система функций (X^ℓ_1, X^ℓ_2) является решением следующей задачи

$$\frac{\partial}{\partial r} X^\ell_\alpha(k; r) = \sum_{\beta=1}^{2} a^\ell_{\alpha\beta}(k; r) X^\ell_\beta(k; r), \quad (\alpha = 1,2), \qquad /4.2/$$

$$X^\ell_1(k; 0) = 0, \quad X^\ell_2(k; r) = O(1), \quad (r \to 0). \qquad /4.3/$$

В формуле /4.2/

$$a^\ell_{11} = -a^\ell_{22} = \frac{1}{ik} W_\ell(k; r) w^\pm_\ell(kr) j_\ell(kr),$$

$$a^\ell_{12} = -\frac{2}{ik} W_\ell(k; r) j^2_\ell(kr), \quad a^\ell_{21} = \frac{i}{2k} W_\ell(k; r)[w^\pm_\ell(kr)]^2,$$

$$W_\ell(k; r) = V_\ell(k; r) - \frac{1}{2}\{r + w, r\}, \qquad /4.4/$$

$$V_\ell(k; r) = U(r + w(k,r)) + (w'^2_r + 2w'_r)[U(r + w(k,r)) - k^2] +$$

$$+ \ell(\ell+1)\left[\frac{(1+w'_r)^2}{(r+w)^2} - \frac{1}{r^2}\right],$$

$$\{r + w, r\} = (1 + w'_r)^{-1} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{3}{2}(1 + w'_r)^{-2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right)^2.$$

Функцию /4.4/ будем рассматривать как эффективный потенциал, зависящий от энергии и квантового числа ℓ. Нетрудно показать, что для любого данного $k > 0$ можно найти такие постоянные $\gamma_\ell(k)$ и $C_\ell(k)$, что для произвольного $r \ge \gamma_\ell(k)$

$$|W_\ell(k;r)| \le \frac{C_\ell(k)}{r^2 \tau(r^{1/4})}. \qquad /4.5/$$

Неравенство /4.5/ показывает, что эффективный потенциал является короткодействующим.

Решение системы /4.2/, функции которого удовлетворяют условиям /4.3/, будем называть регулярным решением. Легко видеть, что все регулярные решения системы /4.2/ - линейно зависимые. Каждое регулярное решение является решением системы из двух интегральных уравнений, которую можно решить методом итераций. Если мы нашли некоторое ненулевое регулярное решение (x_1^ℓ, x_2^ℓ) системы /4.2/, то сможем легко вычислить фазы $\delta_\ell(k)$, воспользовавшись соотношением

$$e^{2i\delta_\ell(k)} = \frac{x_1^\ell(k;\infty) + x_2^\ell(k;\infty)}{x_2^\ell(k;\infty)}. \qquad /4.6/$$

Ясно тогда, что уравнения /4.2/ являются по существу фазовыми уравнениями для дальнодействующего потенциала $U(r)$.

Уравнения системы /4.2/ могут быть использованы для получения новых фазовых уравнений. Если ввести амплитудную функцию

$$A_\ell(k;r) = \frac{1}{2i} \frac{x_1^\ell(k;r)}{x_2^\ell(k;r)},$$

то легко проверить, что она удовлетворяет уравнению Рикатти

$$\frac{\partial A_\ell(k;r)}{\partial r} = -\frac{1}{k} W_\ell(k;r)\{j_\ell(kr) + i w_\ell^{+}(kr) A_\ell(k;r)\}^2,$$
$$/4.7/$$
$$A_\ell(k;r) = o(r^{(2\ell+1)}), \quad (r \to 0).$$

Фазовая функция, определяемая из соотношений

$$1 + 2iA_\ell(k;r) = e^{2i\delta_\ell(k;r)},$$
$$\delta_\ell(k;0) = 0, \qquad /4.8/$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \delta_\ell(k;r)}{\partial r} = -\frac{1}{k} W_\ell(k;r)\{j_\ell(kr)\cos\delta_\ell(k;r) - n_\ell(kr)\sin\delta_\ell(kr)\}^2. \qquad /4.9/$$

Поскольку потенциал /4.9/ является короткодействующим, то решение /4.9/, удовлетворяющее /4.8/, имеет конечный предел при $r \to \infty$, через который непосредственно выражаются фазы $\delta_\ell(k)$.

Полученные фазовые уравнения можно решить итерационным методом, методом линеаризации и др. В случае малой константы связи применим метод формальных рядов /10/, с помощью которого можно найти особые точки амплитудной функции в комплексной плоскости k.

В заключение авторы хотят поблагодарить А.А.Атанасова и В.П.Великова за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Калоджеро Ф. Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния. "Мир", М., 1976.*
2. *Бабиков В.В. Метод фазовых функций в квантовой механике. "Наука", М., 1976.*
3. *Masson D., Prugovečki E. J.Math. Phys., 1976, 17, p.298.*
4. *Буслаев В.С., Матвеев В.Б. ТМФ, 1970, 2, с. 367.*
5. *Матвеев В.Б., Скриганов М.М. ТМФ, 1972, 10, с. 238.*
6. *Prugovečki E., Zorbas J. J.Math.,Phys., 1973, 14, p.1398.*
7. *Иванов К.И. ОИЯИ, Р4-12560, Дубна, 1979.*
8. *Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. "Мир", М., 1978, т. II.*
9. *Бирман М.С. Изв. АН СССР, Сер.мат., М., 1963, 27, с. 833.*
10. *Atanasov A.A., Ivanov K.I. Acta Phys. Pol., 1975, 6B6, p.129.*

Рукопись поступила в издательский отдел 22 июня 1979 года.