объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р4 - 12560

К.И.Иванов

ВОЛНОВЫЕ ОПЕРАТОРЫ ДЛЯ ДАЛЬНОДЕЙСТВУЮЩИХ СФЕРОИДАЛЬНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ И МЕТОД ФАЗОВЫХ ФУНКЦИЙ

1979

P4 - 12560

К.И.Иванов

ВОЛНОВЫЕ ОПЕРАТОРЫ ДЛЯ ДАЛЬНОДЕЙСТВУЮЩИХ СФЕРОИДАЛЬНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ И МЕТОД ФАЗОВЫХ ФУНКЦИЙ

Направлено в ТМФ

Р4 12560

Иванов К.И.

Волновые операторы для дальнодействующих сфероидальных потенциалов и метод фазовых функций

Рассматриваются волновые операторы $\Omega_\pm$ для дальнодействующих сфероидальных потенциалов, убывающих на бесконечности не только как некоторая отрицательная степень расстояния до данной точки, но и медленнее любой такой степени. Показано, что для таких потенциалов имеет место принцип инвариантности Бирмана-Като. Доказывается также существование асимптотического компенсирующего оператора, с помощью которого можно выразить сопряженные операторы $\Omega_\pm^*$ на плотных в $\mathrm{Ran}\,\Omega_\pm$ множествах. С использованием модифицированных уравнений Липпмана-Швингера для рассматриваемых дальнодействующих сфероидальных потенциалов развивается метод фазовых функций и получены фазовые уравнения с короткодействующими эффективными потенциалами и базисными функциями, являющимися решениями свободного радиального сфероидального уравнения Шредингера.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

P4 12560

Ivanov K.I.

Wave Operators for Long-Range Spheroidal Potentials and the Variable Phase Method

The subject of this paper is wave operators for long-range spheroidal potentials which decrease at infinity as some reverse powers and even slower. We prove the validity of the Birman-Kato invariance principle for such potentials. We point to the existence of an asymptotic compensating operator by means of which one can express the adjoint operators $\Omega_\pm$ in dense in $\mathrm{Ran}\,\Omega_\pm$ sets. A modified Lippmann-Schwinger equation for the long-range spheroidal potentials under consideration has been used to develop a variable phase method and to obtain a phase equation with short range effective potentials, the basis functions of which satisfy the free radial Schrödinger equation with a spheroidal potential.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

I. Введение

В квантовой теории рассеяния волновые операторы $\Omega_{\pm}$ определяются как изометрические операторы в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, соответствующие паре плотно определенных самосопряженных в $\mathcal{H}$ операторов H и H_o. Оператор H рассматривается как полный гамильтониан системы частиц, а оператор H_o обычно интерпретируется как свободный гамильтониан этой системы и предполагается, что он имеет чисто непрерывный спектр. В тех случаях, когда оператор взаимодействия $U = H - H_o$ является короткодействующим потенциалом, волновые операторы (операторы Меллера) определяются как сильные пределы унитарных операторов

$$\Omega_{\pm} = \operatorname*{s\,lim}_{t \to \mp\infty} e^{iHt} e^{-iH_o t}. \tag{I.I}$$

Эти пределы, однако, не существуют, если потенциал U имеет кулоновское поведение или убывает медленнее кулоновского потенциала на бесконечности /I,2/. Для таких дальнодействующих потенциалов определяются обобщенные волновые операторы /2,3,4,5/ на плотном в $\mathcal{H}$ множестве векторов ψ формулой

$$\Omega_{\pm}\psi = \underset{t\to\mp\infty}{s\,lim}\, e^{iHt}\mathcal{D}e^{-iH_0t}\psi, \qquad (I.2)$$

где $\mathcal{D}$ - не зависящий от t оператор, который не обязательно является унитарным. В работе /4/ доказывается существование пределов (I.2), изометричность и полнота операторов $\Omega_{\pm}$ и эквивалентность определения (I.2) определению волновых операторов, получаемому по рецепту стационарной теории рассеяния для гладких потенциалов, убывающих на бесконечности не медленнее $|\vec{r}|^{-\alpha}$, $(\alpha\in(0,1])$.

Как показано в работах /4,6,7/, обобщенные волновые операторы осуществляют унитарную эквивалентность оператора H_0 и некоторой части оператора H. Используя этот результат, а также идею об асимптотическом компенсирующем операторе (АКО) /8/, можно получить методами адиабатического включения взаимодействия модифицированные уравнения Липпмана-Швингера для дальнодействующих потенциалов /2,8/. В работе /8/ доказано существование АКО для дальнодействующих сферически симметричных потенциалов, убывающих на бесконечности не медленнее $|\vec{r}|^{-\alpha}$, $(\alpha\in(\frac{1}{2},1])$. Форма уравнения Липпмана-Швингера, в которой участвует АКО, можно использовать для вывода фазовых уравнений, удовлетворяемых конечной на бесконечности фазовой функцией.

В предлагаемой работе определяются волновые операторы для дальнодействующих сфероидальных потенциалов вида

$$U(\vec{r}) = \frac{v(\xi)+s(\eta)}{f^2(\xi^2-\eta^2)} = V_\xi + V_\eta,\quad V_\xi = \frac{v(\xi)}{f^2(\xi^2-\eta^2)}, \qquad (I.3)$$

где ξ, η, φ - вытянутые сфероидальные координаты точки трехмерного векторного пространства R^3 /9/, а f - половина расстояния между фокусами сфероидальной системы координат. При этом предполагается, что $U(\vec{r})$ - вещественно-значная функция и

K) $U(\vec{r})\in L^2(R^3)+L^\infty(R^3)$. /10/

Из этого условия следует, что оператор U является H_0- ограниченным ($H_0=-\Delta$) и что полный гамильтониан H самосопряжен на области определения $\mathcal{D}(H_0)$ оператора H_0. Таким образом, рассматриваемый нами класс сфероидальных потенциалов содержит не только потенциалы, к которым относятся результаты, установленные в работах /I,4,8/, но и потенциалы, убывающие на бесконечности медленнее $|\vec{r}|^{-\alpha}$ для произвольного $\alpha>0$.

Сформулируем более конкретно условия, которым удовлетворяют рассматриваемые нами сфероидальные потенциалы вида (3).

R) Будем считать, что потенциал $V_\xi(\vec{r})$ является регулярным, т.е. функция $v(\xi) \in L^1(\Lambda)$, где Λ - произвольное компактное борелево подмножество интервала $[1,\infty)$, и что существует такое $\beta > 1/2$, что

$$|v(\xi)| = O\left((\xi-1)^{\beta-1}\right), \quad \xi \to 1. \tag{I.4}$$

Отметим, что некоторые утверждения можно доказать, предполагая $\beta > 0$.

C) Существует некоторое $R_0 > 1$, такое, что $v(\xi) \in C^2([R_0,\infty))$.

Пусть $\Gamma^3(R^1_+; R_0)$, ($R^1_+ = \{\xi \,|\, \xi \geqslant 0\}$)- множество всех функций $\tau(\xi) \in C^3(R^1_+ \setminus \{0\})$, таких, что

$$\tau(0) = 0, \quad \tau'(\xi) > 0, \quad \lim_{\xi\to\infty} \tau(\xi) = \infty, \tag{I.5}$$

$$M_0 = \sup_{\xi \geqslant R_0} \frac{\xi \tau'(\xi)}{\tau(\xi)} < \infty.$$

Для функции $V(\xi) = v(\xi)(\xi^2-1)^{-1}$ предположим, что

H) существует такое $M > 0$ и такая функция $\tau \in \Gamma^3(R^1_+, R_0)$, удовлетворяющая для произвольного $\delta > 0$ условию

$$\tau(\xi) = o(\xi^{1+\delta}), \quad (\xi \to \infty), \tag{I.6}$$

что для каждого $\xi \geqslant R_0$

$$|V(\xi)| \leqslant \frac{M}{\tau(\xi)}, \quad |V'(\xi)| \leqslant \frac{M\tau'(\xi)}{\tau^2(\xi)}, \tag{I.7}$$

$$|V'(\xi)| \leqslant \frac{M}{\xi\tau(\xi)}, \quad |V''(\xi)| \leqslant \frac{M\tau'(\xi)}{\xi\tau^2(\xi)}.$$

Условиям R) , C) и H) удовлетворяют, например,

а) степенные потенциалы, для которых

$$v(\xi) = \mathrm{const.}\,\xi^{2-\alpha}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1, \tag{I.8}$$

и, в частности, потенциал кулоновского взаимодействия ($\alpha = 1$);

б) логарифмические потенциалы, для которых

$$v(\xi) = \mathrm{const.}\,\frac{\xi^{2-\alpha}}{\ln^\beta \xi}, \ \beta > 0, \ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, (\xi \geqslant R_0 > 1); \tag{I.9}$$

в) потенциалы, для которых

$$v(\xi)=\frac{\text{const.}\,\xi^2}{\ln\ln\xi}, \quad (\xi \geq R_0 > e), \tag{I.10}$$

и другие.

Относительно потенциала $V_\eta(\vec{r})$ будем предполагать, что функция $s(\eta)$ есть непрерывная функция в интервале $[-1,1]$ и что для каждого $m=0,1,\dots$ задача Штурма-Лиувилля

$$\frac{d}{d\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{d\Sigma}{d\eta}\right]+\left[A-c^2\eta^2-\frac{m^2}{1-\eta^2}-s(\eta)\right]\Sigma=0, \tag{I.11}$$

$$|\Sigma(c;\pm1)|<\infty,$$

(c - неотрицательный параметр) имеет счетное множество собственных значений $A_{m\ell}(c)$, $(\ell=m,m+1,\dots)$,

$$A_{mm}(c)\leq A_{m,m+1}(c)\leq\dots,$$

являющихся непрерывными функциями c в R^1_+. Будем также предполагать, что нормированные собственные решения $\Sigma_\mu(c;\eta)$ задачи (I.11) (здесь индекс μ используется для обозначения системы из двух индексов m,ℓ) образуют полную ортонормированную систему в $L^2([-1,1])$. Эти условия удовлетворяются, например, в тех случаях, когда $s=\text{const}$, $s=\text{const.}(1-\eta^2)$ и $s=\text{const.}\,\eta$.

В разделе 2 рассматриваются операторы $\Omega_\pm$ для дальнодействующих сфероидальных потенциалов, с точки зрения стационарной теории рассеяния доказывается асимптотическая полнота этих операторов. В разделе 3 определен оператор $\mathscr{D}$, входящий в формулу (I.2), и показано, что волновые операторы удовлетворяют принципу инвариантности Бирмана-Като /4,11,12/. Определяется также АКО $\mathscr{Z}$ и, в соответствии с методами, использованными в /8/, получены модифицированные уравнения Липпмана-Швингера. В разделе 4 определяется S -матрица и получены фазовые уравнения для дальнодействующих сфероидальных потенциалов. В целях сокращения записи формул используется система единиц, в которой масса рассеивающейся частицы $m=1/2$ и $\hbar=1$. Из полученных результатов легко можно получить соответствующие результаты для сферически симметричных дальнодействующих потенциалов.

2. Волновые операторы для дальнодействующих сфероидальных потенциалов с точки зрения стационарной теории рассеяния

Волновые операторы для потенциалов вида (I.3) можно определить с помощью регулярных решений радиального уравнения Шредингера

$$y''(\xi)-\left\{\frac{\lambda_\mu(c)}{\xi^2-1}+\frac{m^2-1}{(\xi^2-1)^2}\right\}y(\xi)=-\left[c^2-V(\xi)\right]y(\xi), \tag{2.1}$$

в котором $c=fk$, $k=\sqrt{E}$, E – энергия рассеивающейся частицы и $\lambda_\mu=A_\mu(c)-c^2$, ($\mu=(m,\ell)$, $\ell=0,1,\dots,m=0,\pm1,\dots,\pm\ell$). Поскольку коэффициенты уравнения (2.I) зависят сложным образом от энергии и квантовых чисел m и ℓ, то доказательства аналитических свойств регулярных решений этого уравнения становятся более сложными, чем в случае сферически симметричных потенциалов. Используя соотношение

$$\frac{dA_\mu(c)}{dc}=2c\int_{-1}^{+1}t^2\sum\nolimits_\mu^2(c;t)dt, \tag{2.2}$$

можно показать, что функции $A_\mu(c)$ и $\Sigma_\mu(c;\eta)$ имеют производные всех порядков по c в интервале $[0,\infty)$. Они, вообще говоря, не являются целыми функциями c. Например, в случае $s(\eta)\equiv 0$ доказано существование точек ветвления функции $\lambda_\mu(c)$ на комплексной плоскости c /9/. Ограничиваясь рассмотрением только неотрицательных значений c, можно доказать существование вещественного регулярного решения уравнения (2.I) со следующей асимптотикой при $\xi\to1$:

$$\phi_\mu(c;\xi)=(\xi-1)^{\frac{m+1}{2}}\begin{cases}1+O((\xi-1)^{\varepsilon_1}), & m=1,2,\dots,\\ 1+O((\xi-1)^{\varepsilon_1}\ln(\xi-1)), & m=0,\end{cases} \tag{2.3}$$

где $\varepsilon_1=\min(1,\beta)$. Функция ϕ_μ удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерра второго рода, которое можно решать итерационными методами.

Из условия H) следует, что для каждого $c>0$

$$\nu_0(c)=\sup\left\{\xi\,\middle|\,\xi\geq R_0,\ c^2-V(\xi)=0\right\}<\infty, \tag{2.4}$$

(функцию $\nu_0(c)$ считаем равной R_0, если $\{\xi\,|\,\xi\geq R_0,\ c^2-V(\xi)=0\}=\emptyset$). Возьмем любое $\delta>0$ и определим функцию

$$\xi_0(c)=\begin{cases}\sup\limits_{c>0}\nu_0(c)+\delta, & \text{если } \sup\limits_{c>0}\nu_0(c)<\infty,\\ \varkappa\left(\dfrac{M}{c^2}+\tau(R_0)\right)+\delta, & \text{если } \sup\limits_{c>0}\nu_0(c)=\infty,\end{cases} \qquad (2.5)$$

где $\varkappa(\tau)$ – обратная функция функции $\tau(\xi)$. Легко показать, что $\xi_0(c)\in C^2(R^1_+\setminus\{0\})$. С помощью итерационного процесса доказывается существование решений $g^{\pm}_{\mu}(c;\xi)$ следующих интегральных уравнений:

$$g^{\pm}_{\mu}(c;\xi)=1+\int_{\xi}^{\infty}K^{\pm}_{\mu}(c;\xi,t)g^{\pm}_{\mu}(c;t)\,dt,\quad \xi\geqslant\xi_0(c),\ c>0, \qquad (2.6)$$

$$K^{\pm}_{\mu}(c;\xi,t)=\left[\frac{\lambda_\mu(c)}{t^2-1}+\frac{m^2-1}{(t^2-1)^2}\pm\frac{i\,V'(t)}{2\sqrt{c^2-V(t)}}\right]\times$$

$$\times\int_{\xi}^{t}\exp\left\{\pm 2i\int_{x}^{t}\sqrt{c^2-V(\theta)}\,d\theta\right\}dx.$$

Для функций $g^{\pm}_{\mu}$ можно утверждать, что

а) для каждого $c>0$

$$\eta^{\pm}_{\mu}(c;\xi)\equiv g^{\pm}_{\mu}(c;\xi)-1=O\left(\frac{1}{\tau(\xi)}\right),\quad \xi\to\infty; \qquad (2.7)$$

б) если $\varepsilon_0>0$ и $N_0>\varepsilon_0$ – произвольные числа, то можно найти такую постоянную $M_\mu>0$, что в области $\omega_{\varepsilon_0,N_0}=\{(c,\xi)\,|\,c\in[\varepsilon_0,N_0],\ \xi\geqslant\xi_0(c)\}$,

$$\left|\frac{\partial^p}{\partial c^p}g^{\pm}_{\mu}\right|\leqslant\frac{M_\mu}{\tau(\xi)},\ (p=0,1),\quad \left|\frac{\partial g^{\pm}_{\mu}}{\partial\xi}\right|\leqslant\frac{M_\mu}{\xi\tau(\xi)},\quad \left|\frac{\partial^2 g^{\pm}_{\mu}}{\partial c\,\partial\xi}\right|\leqslant\frac{M_\mu}{\tau(\xi)}. \qquad (2.8)$$

Из этих результатов следует, что функции

$$f^{\pm}_{\mu}(c;\xi)=g^{\pm}_{\mu}(c;\xi)\exp\left\{\pm i\left[\int_{\xi_0}^{\xi}\sqrt{c^2-V(x)}\,dx+c\xi_0\right]\right\}, \qquad (2.9)$$

$$\xi\geqslant\xi_0(c),\quad c>0,$$

являются линейно независимыми решениями уравнения (2.I). Выражая решение ψ_μ через функции (2.9), получим асимптотическую формулу

$$\psi_\mu(c;\xi)=B_\mu(c)\sin\varkappa_\mu(c;\xi)+O\left(\frac{1}{\tau(\xi)}\right),\ \xi\to\infty,\ (c>0), \qquad (2.10)$$

в которой

$$B_\mu(c)=\frac{1}{c}\left|W(\psi_\mu,f_\mu^+)\right|=\frac{1}{c}\left|W(\psi_\mu,f_\mu^-)\right|, \tag{2.11}$$

$$\exp(2i\delta_\mu(c))=e^{i\pi\ell}W(\psi_\mu,f_\mu^-)/W(\psi_\mu,f_\mu^+), \tag{2.12}$$

$$W(\psi_\mu,f_\mu^\pm)=\psi_\mu\frac{\partial f_\mu^\pm}{\partial\xi}-f_\mu^\pm\frac{\partial\psi_\mu}{\partial\xi}, \tag{2.13}$$

$$\varkappa_\mu=\delta_\mu(c)+c\xi_0(c)-\frac{\pi\ell}{2}+\int_{\xi_0}^{\xi}\sqrt{c^2-V(x)}\,dx. \tag{2.14}$$

Отметим, что определяемые равенством (2.13) фазы $\delta_\mu(c)$ являются вещественными, непрерывно дифференцируемыми функциями на интервале $(0,\infty)$.

Пусть $C_0^p(R_+^1)$, ($p=0,1,\ldots$) – множество всех p раз непрерывно дифференцируемых функций $f(c)$ на R_+^1 с компактными насителями, отделимыми от нуля. Каждое из этих множеств является плотным относительно гильбертовой нормы в $L^2(R_+^1)$. Рассмотрим функции

$$\Phi_\mu^\pm(c;\vec{r})=\sqrt{\frac{2}{\pi f^3}}\,\frac{u_\mu^\pm(c;\xi)}{\sqrt{\xi^2-1}}\,Y_\mu(c;\eta,\varphi),\ c>0,\ \vec{r}\in R^3; \tag{2.15}$$

$$\Phi_\mu(c;\vec{r})=\sqrt{\frac{2}{\pi f^3}}\,\frac{u_\mu(c;\xi)}{\sqrt{\xi^2-1}}\,Y_\mu^{(0)}(c;\eta,\varphi),\ c>0,\ \vec{r}\in R^3; \tag{2.16}$$

где

$$\mu=(m,\ell),\ \ell=0,1,\ldots,\ m=0,\pm1,\ldots,\pm\ell,$$

$$Y_\mu(c;\eta,\varphi)=(2\pi)^{-1/2}e^{im\varphi}\Sigma_{|m|\ell}(c;\eta), \tag{2.17}$$

$$Y_\mu^{(0)}(c;\eta,\varphi)=(2\pi)^{-1/2}e^{im\varphi}\bar{S}_{|m|\ell}(c;\eta), \tag{2.18}$$

$$u_\mu^\pm(c;\xi)\equiv u_{|m|\ell}^\pm(c;\xi)=\frac{e^{i\delta_{|m|\ell}(c)}}{B_{|m|\ell}(c)}\psi_{|m|\ell}(c;\xi)= \tag{2.19}$$

$$=\frac{1}{2}e^{\pm i(\ell+1)/2}\left\{f_{|m|\ell}^\mp(c;\xi)-f_{|m|\ell}^\pm(c;\xi)e^{\mp i(\pi\ell-2\delta_{|m|\ell}(c))}\right\},$$

$$u_\mu(c;\xi)\equiv u_{|m|\ell}(c;\xi)=c\sqrt{\xi^2-1}\,R_{|m|\ell}(c;\xi),$$

а $\bar{S}_{m\ell}$ и $R_{m\ell}$ – вытянутые угловые и радиальные сфероидальные функции /9/. Легко понять, что функции (2.15) и (2.16) являются обобщенными векторными функциями /13/, заданными на пространстве $C_0^1(R_+^1)$ основных функций, со значениями в $L^2(R^3)$ и что они нормированы на δ-функцию

$$\int\Phi_\mu^{\pm *}(c;\vec{r})\Phi_{\mu'}^\pm(c';\vec{r})d\vec{r}=\int\Phi_\mu^*(c;\vec{r})\Phi_{\mu'}(c';\vec{r})d\vec{r}=\delta_{\mu\mu'}\delta(c-c').$$

Функциям (2.15) и (2.16) соответствуют линейные непрерывные отображения $\omega_\mu^\pm$ и ω_μ^c пространства $L^2(R^1_+)$ в $\mathcal{H}$, сужения которых на плотном в $L^2(R^1_+)$ линейном многообразии $C_0^1(R^1_+)$ определяются формулами

$$((\omega_\mu^\pm \upharpoonright C_0^1(R^1_+))f)(\vec{r}) = \int_0^\infty \Phi_\mu^\pm(c;\vec{r})f(c)dc, \quad f(c)\in C_0^1(R^1_+), \tag{2.20}$$

$$((\omega_\mu^c \upharpoonright C_0^1(R^1_+))f)(\vec{r}) = \int_0^\infty \Phi_\mu(c;\vec{r})f(c)dc, \quad f(c)\in C_0^1(R^1_+). \tag{2.21}$$

Операторы $\omega_\mu^\pm$ и ω_μ^c являются изометрическими и для произвольных $f_1, f_2 \in L^2(R^1_+)$

$$(\omega_\mu^\pm f_1, \omega_{\mu'}^\pm f_2) = (\omega_\mu^c f_1, \omega_{\mu'}^o f_2) = \delta_{\mu\mu'}(f_1, f_2), \tag{2.22}$$

$$(\omega_\mu^\mp f_1, \omega_{\mu'}^\pm f_2) = \delta_{\mu\mu'}(f_1, exp[\pm 2i\delta_{lm;\ell}(c)] f_2). \tag{2.23}$$

Так как фазы $\delta_\mu(c)$ - вещественные функции c при $c>0$ из соотношения (2.23) следует, что подпространства $Ran\,\omega_\mu^+$ и $Ran\,\omega_\mu^-$ совпадают

$$Ran\,\omega_\mu^+ = Ran\,\omega_\mu^- = L_\mu. \tag{2.24}$$

Легко показать, что каждое из подпространств L_μ является инвариантным подпространством оператора H, что векторы линейного многообразия $L_\mu^\pm(C_0^1) = \omega_\mu^\pm[C_0^1(R^1_+)]$ плотного в L_μ являются аналитическими векторами оператора $H_\mu = H \upharpoonright L_\mu$ с областью определения $\mathcal{D}(H_\mu) = L_\mu \cap \mathcal{D}(H)$ (так что H_μ самосопряжен в существенном на $L_\mu^\pm$) и что, если $F(\lambda)$ - произвольная борелева функция на R^1, то для любого $\psi \in L_\mu \cap \mathcal{D}(F(H))$

$$(F(H)\upharpoonright L_\mu)\psi = F(H_\mu)\psi = \omega_\mu^\pm F(c^2/f^2)\,\omega_\mu^{\pm *}\psi, \tag{2.25}$$

где $\omega_\mu^{\pm *}$ - оператор, сопряженный с оператором $\omega_\mu^\pm$, определенный на $L^2(R^3)$ выражением

$$(\omega_\mu^{\pm *}\psi)(c) = l.i.m. \int \Phi_\mu^{\pm *}(c;\vec{r})\psi(\vec{r})d\vec{r}. \tag{2.26}$$

Из свойств операторов ω_μ^o и свободного гамильтониана $H_0 = -\Delta$ следует, что линейная оболочка $L^o(C_0^1)$ векторов множеств $L_\mu^c = \omega_\mu^o[C_0^1(R^1_+)]$ плотна в $\mathcal{H}$. Произвольный ненулевой вектор $\psi \in L^o(C_0^1)$ можно представить в виде

$$\psi(\vec{r})=\sum_{\ell=0}^{L(\psi)}\sum_{m=-\ell}^{\ell}(\omega^{o}_{m\ell}f_{m\ell})(\vec{r})\equiv\sum_{\mu}^{L(\psi)}(\omega^{o}_{\mu}f_{\mu})(\vec{r}), \qquad (2.27)$$

где $f_{m\ell}\in C^1_0(R^1_+)$, а $L(\psi)$ – такое неотрицательное целое число, что для любого натурального $\ell'>L(\psi)$ и для любого $m=0,\pm1,\ldots,\pm\ell'$, $\omega^{o*}_{m\ell'}\psi=0$ и по меньшей мере для одного $m=0,\pm1,\ldots,\pm L(\psi)$, $\omega^{o*}_{mL}\psi\neq0$.

Волновые операторы $\Omega_\pm(H_0,H)$ пары самосопряженных в $\mathcal{H}=L^2(R^3)$ операторов H_0 и H определим как непрерывные линейные отображения $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}$, сужения которых на плотном в $\mathcal{H}$ линейном многообразии $L^0(C^1_0)$ определяются формулой

$$((\Omega_\pm\restriction L^0(C^1_0))\psi)(\vec{r})=\sum_{\mu}^{L(\psi)}(\omega^{\pm}_{\mu}\omega^{o*}_{\mu}\psi)(\vec{r}),\ (\psi\in L^0(C^1_0)). \qquad (2.28)$$

Эти операторы являются изометрическими. Рассматривая операторную последовательность $\left\{\sum_{\mu}^{L}\omega^{\pm}_{\mu}\omega^{o*}_{\mu}\right\}_{L=0}^{\infty}$ и учитывая теорему Банаха-Штейнхауса, получаем для произвольного вектора $\psi\in\mathcal{H}$ формулу

$$(\Omega_\pm\psi)(\vec{r})=\underset{L\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\sum_{\mu}^{L}(\omega^{\pm}_{\mu}\omega^{o*}_{\mu}\psi)(\vec{r})= \qquad (2.29)$$
$$=\mathrm{l.i.m.}\sum_{\mu}(\omega^{\pm}_{\mu}\omega^{o*}_{\mu}\psi)(\vec{r}).$$

Из соотношения (2.24) вытекает, что подпространства $L^\pm=\mathrm{Ran}\,\Omega_\pm\subset\mathcal{H}$ совпадают с ортогональной суммой подпространств L_μ:

$$L^\pm=\oplus\sum_{\mu}L_\mu. \qquad (2.30)$$

Этот результат выражает асимптотическую полноту операторов $\Omega_\pm$.

Асимптотическая полнота операторов $\Omega_\pm$ является необходимым и достаточным условием для унитарности S-матрицы

$$S=\Omega^*_-\Omega_+. \qquad (2.31)$$

Унитарность оператора S можно непосредственно доказать, если воспользоваться вытекающей из (2.29), (2.23) и теоремы Банаха-Штейнхауса формулой

$$(S\psi)(\vec{r})=\mathrm{l.i.m.}\sum_{\mu}(\omega^{o}_{\mu}(e^{2i\delta_\mu(c)}(\omega^{o*}_{\mu}\psi)(c))(\vec{r}), \qquad (2.32)$$

в которой ψ – произвольный вектор $\mathcal{H}$. С помощью этой формулы легко получаются матрицы оператора S в разных представлениях.

Два основных свойства операторов $\Omega_\pm$ выражаются следующей теоремой:

Теорема 2.1. Пусть $F(\lambda)$ - произвольная борелева функция на R^1. Тогда на плотной в $\mathcal{H}$ области определения $\mathcal{D}(F(H_0))$ оператора $F(H_0)$

$$F(H)\Omega_\pm = \Omega_\pm F(H_0), \tag{2.33}$$

$$F(H_0)S = SF(H_0). \tag{2.34}$$

Доказательство: Формула (2.33) легко доказывается для проекторов P_ω^H и $P_\omega^{H_0}$ проекторнозначных мер операторов H и H_0

$$P_\omega^H \Omega_\pm = \Omega_\pm P_\omega^{H_0}. \tag{2.35}$$

Пользуясь этой формулой и спектральной теоремой, получаем (2.33). При доказательстве (2.34) можем считать $F(\lambda)$ вещественнозначной функцией. Имея в виду, что из условия $\psi \in \mathcal{D}(F(H_0))$ следует $\Omega_\pm \psi \in \mathcal{D}(F(H))$, получаем для произвольных $\psi, \psi_1 \in \mathcal{D}(F(H_0))$

$$(S\psi, F(H_0)\psi_1) = (F(H)\Omega_+\psi, \Omega_-\psi_1) = (SF(H_0)\psi, \psi_1). \tag{2.36}$$

Из (2.36) следует (2.34).

Другие свойства операторов $\Omega_\pm$ можно доказать, используя определение этих операторов, которое дается в следующем разделе.

3. Принцип инвариантности Бирмана-Като

Покажем теперь, что волновые операторы $\Omega_\pm$ можно определить на плотном в $\mathcal{H}$ линейном многообразии формулой (1.2) и укажем вид оператора $\mathcal{D}$. Такое определение используется в нестационарной теории рассеяния. Будем рассматривать ради простоты только такие сфероидальные дальнодействующие потенциалы, для которых функции (2.17) совпадают с функциями (2.18). Полученные результаты, однако, можно обобщить и на другие случаи.

Пусть $\theta > 0$ - произвольное число, а $g_\theta(\xi)$ - некоторая $C^3([0,\infty))$ - функция со следующими свойствами

$$g_\theta^{(p)}(0) = 0, \ (p = 0,1,2,3), \ 0 \leq g_\theta(\xi) \leq 1, \ g_\theta(\xi) = 1, \ (\xi \geq \theta),$$

$$0 \leq g_\theta'(\xi) \leq C/\theta,$$

где C – постоянная, не зависящая от θ. Определим функцию

$$u(c,\xi)= \tag{3.1}$$

$$=\begin{cases} 0, & 1\le\xi\le\xi_0(c)-\delta/2,\\ g_{\delta/2}(\xi-\xi_0+\frac{\delta}{2})\int_{\xi_0}^{\xi_0+\delta_1}u_0(c,t)g'_{\delta_1}(t-\xi)dt, & \xi_0-\frac{\delta}{2}\le\xi\le\xi_0,\\ u_0(c,\xi)g_{\delta_1}(\xi-\xi_0)+\int_{\xi}^{\xi_0+\delta_1}u_0(c,t)g'_{\delta_1}(t-\xi)dt, & \xi\ge\xi_0(c). \end{cases}$$

Входящая в это выражение функция u_0 определяется равенством

$$u_0(c,\xi)=\int_{\xi_0}^{\xi}\left[\sqrt{c^2-V(x)}-c\right]dx,\ c>0,\ \xi\ge\xi_0(c),$$

а δ_1 – произвольное число из интервала $(0,\min(\delta/2,\delta/(3C)))$. На плотном в $\mathcal{H}$ линейном многообразии $L^0(C_0^1)$ определим оператор $\mathcal{D}$ следующей формулой

$$(\mathcal{D}\phi)(\vec{\tau})=\sum_{\mu}^{L(\phi)}\int_0^{\infty}\bar{\Phi}_{\mu}(c;\xi+\frac{1}{c}u(c,\xi),\eta,\varphi)\frac{(\omega_{\mu}^{c*}\phi)(c)dc}{\sqrt{\xi^2-1}}, \tag{3.2}$$

$$\bar{\Phi}_{\mu}(c;\xi,\eta,\varphi)=\sqrt{\xi^2-1}\,\Phi_{\mu}(c;\vec{\tau}),\ \phi\in L^0(C_0^1).$$

Нетрудно показать, что из условия $\phi\in L^0(C_0^1)$ следует $\mathcal{D}\phi\in\mathcal{H}$. Для оператора $\mathcal{D}$ верна следующая теорема:

Теорема 3.I. Пусть $F(\lambda)$ – произвольная вещественнозначная и выпуклая $C^3((-\infty,\infty))$ – функция. Тогда для векторов $\phi\in L^0(C_0^1)$

$$\Omega_{\pm}\phi=\operatorname*{s\,lim}_{t\to\mp\infty}e^{itF(H)}\mathcal{D}e^{-itF(H_0)}\phi. \tag{3.3}$$

Доказательство: Теорема будет доказана, если покажем, что для любой функции $\varphi_0(c)\in C_0^1(R_+^1)$

$$\lim_{t\to\infty}\|((\omega_{\mu}^{\pm}-\mathcal{D}\omega_{\mu}^{0})(\exp[\pm itF(\tfrac{c^2}{f^2})]\varphi_0))(\vec{\tau})\|=0. \tag{3.4}$$

Пусть $\operatorname{supp}\varphi_0\subset[\varepsilon_0,N_0]$, ($\varepsilon_0>0$, $N_0>\varepsilon_0$). Если $1\le\xi\le\sqrt{t}$, то интегрированием по частям относительно экспоненты в формуле

$$B_{\mu}^{\pm}(\vec{\tau};t)\equiv((\omega_{\mu}^{\pm}-\mathcal{D}\omega_{\mu}^{0})(e^{\pm itF(c^2/f^2)}\varphi_0))(\vec{\tau})= \tag{3.5}$$

$$=\int_{\varepsilon_0}^{N_0}\left\{\bar{\Phi}_{\mu}^{\pm}(c;\xi,\eta,\varphi)-\bar{\Phi}_{\mu}(c;\xi+\frac{u}{c},\eta,\varphi)\right\}e^{\pm itF(c^2/f^2)}\times$$

$$\times \frac{\varphi_0(c)dc}{\sqrt{\xi^2-1}}, \quad \bar{\Phi}^{\pm}_{\mu}(c;\xi,\eta,\varphi)=\sqrt{\xi^2-1}\,\phi^{\pm}_{\mu}(c;\vec{\tau}),$$

находим, что $|B^{\pm}_{\mu}(\tau;t)|\leqslant K_{\mu}/t$, где K_{μ} – постоянная, независящая от t. Если $\xi\geqslant\sqrt{t}$, то представим интеграл (3.5) как сумму из двух интегралов так, чтобы в одном из них содержалась экспонента $exp\{\mp i[c\xi+u-tF(c^2/f^2)]\}$. Тогда во втором интеграле не будет стационарной фазы и его можно легко оценить. Чтобы оценить первый интеграл сделаем в нем в соответствии с методом стационарной фазы /14/ замену переменной c на z, при которой появится экспонента $exp(\mp itz^2)$, выражаемая через производные интегралов Френеля. Интегрируя затем по частям, получим оценку

$$|B^{\pm}_{\mu}(\vec{\tau};t)|\leqslant\frac{K_{\mu}}{\xi}\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{t}\,\tau(\sqrt{t})}+\dfrac{1}{\xi+t}, & \sqrt{t}\leqslant\xi\leqslant\dfrac{4N_0t}{f^2}b,\\[2ex] \dfrac{1}{\xi\tau(\xi)}+\dfrac{1}{\xi+t}, & \xi\geqslant\dfrac{4N_0t}{f^2}b,\ b=\sup\limits_{c\in[\varepsilon_0,N_0]}F'\left(\dfrac{c^2}{f^2}\right).\end{cases}$$

Из полученных оценок вытекает неравенство

$$\|B^{\pm}_{\mu}(\vec{\tau};t)\|^2\leqslant const.\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{1}{\tau^2(\sqrt{t})}+\frac{\ln\sqrt{t}}{\sqrt{t}\,\tau(\sqrt{t})}\right\},$$

из которого следует (3.4).

Как следствие из теоремы 3.I получаем, что для любого вектора $\phi\in L^0(C^1_0)$

$$\Omega_{\pm}\phi=\underset{t\to\mp\infty}{s\lim}\,e^{iHt}\mathscr{D}e^{-iH_0t}\phi, \tag{3.6}$$

$$\underset{t\to\mp\infty}{s\lim}\,(\Omega_{\pm}-\mathscr{D})e^{-iF(H_0)t}\phi=0. \tag{3.7}$$

Если используем формулу (3.3) для определения волновых операторов $\Omega_{\pm}$ пары самосопряженных операторов $F(H_0)$ и $F(H)$, то, очевидно, имеет место равенство

$$\Omega_{\pm}(H_0,H)=\Omega_{\pm}(F(H_0),F(H)), \tag{3.8}$$

выражающее принцип инвариантности Бирмана-Като.

Теорема 3.I дает возможность формулировать асимптотическое условие для векторов состояния рассеяния. Если условимся описывать состояние рассеяния векторами

$$\psi_t=e^{-iHt}\Omega_{+}\psi_{in}=e^{-iHt}\Omega_{-}\psi_{out},$$

где ψ_{in} - произвольный вектор $\mathcal{H}$, а $\psi_{out} = S\psi_{in}$, то в начале процесса столкновения ($t \to -\infty$) вектор ψ_t можно аппроксимировать с произвольно малой ошибкой вектором $\mathcal{D}\exp(-iH_0t)\psi_{in}^0$, $(\psi_{in}^0 \in L^0(C_0^1))$. Аналогичным образом в конце процесса столкновения ($t \to +\infty$) вектор ψ_t можно заменить на такой вектор $\mathcal{D}\exp(-iH_0t)\psi_{out}^0$, $(\psi_{out}^0 \in L^0(C_0^1))$, чтобы норма разности этих векторов была сколь угодно малой.

Покажем теперь, что сопряженные операторы $\Omega_\pm^*$ можно выразить через АКО $\mathcal{Z}$, как это делается в /8/. В этой работе доказано существование АКО для сферически симметричных потенциалов, убывающих на бесконечности не медленнее $|\vec{r}|^{-\alpha}$, $(\alpha \in (\frac{1}{2}, 1])$. Мы докажем существование операторов $\mathcal{Z}$ для более широкого класса дальнодействующих сфероидальных потенциалов.

Определим на области $\omega_1 = \{(c,\xi) \mid c>0,\ \xi \geqslant 1\}$ функцию $w(c,\xi)$ формулой (3.I), в которой вместо $u_0(c,\xi)$ поставим функцию $w_0(c,\xi)$, определяемую из уравнения

$$\int\limits_{\xi_0(c)}^{\xi+w_0} \sqrt{c^2 - V(x)}\, dx = c\xi - c\xi_0(c), \quad c>0,\ \xi \geqslant \xi_0 . \tag{3.8}$$

С помощью функции w определим на $\Omega_\pm [L^0(C_0^1)]$ оператор $\mathcal{Z}$ формулой

$$(\mathcal{Z}\psi^\pm)(\vec{r}) = \sum_\mu \int\limits_0^\infty \bar{\Phi}_\mu^\pm(c;\xi+w,\eta,\varphi)(\omega_\mu^{0*}\Omega_\pm^*\psi^\mp)(c)\frac{dc}{\sqrt{\xi^2-1}} . \tag{3.9}$$

Для этого оператора справедлива

Теорема 3.2. Для любой функции $f_0(c) \in C_0^1(R_+^1)$

а) $(\mathcal{Z}\omega_\mu^\pm f_0)(\vec{r}) \in \mathcal{H}$; б) $\underset{t\to\mp\infty}{\mathrm{slim}} (\mathcal{Z}\omega_\mu^\pm - \omega_\mu^0)(e^{-\frac{ic^2t}{J}} f_0) = 0$.

Доказательство: Утверждение а) доказывается интегрированием по частям относительно $\exp(\mp ic\xi)$ в интеграле, выражающем $\mathcal{Z}\omega_\mu^\pm f_0$, и использованием некоторых неравенств для функции w и ее производных. Чтобы доказать утверждение б), предположим, что $\mathrm{supp} f_0 \subset [\varepsilon_0, N_0]$, ($\varepsilon_0 > 0$, $N_0 > \varepsilon_0$), и выберем достаточно большое $t>0$. Тогда

I. При $1 \leqslant \xi \leqslant \sqrt{t}$ интегрированием по частям относительно экспоненты в формуле

$$C_\mu^\pm(\vec{r}) = ((\mathcal{Z}\omega_\mu^\pm - \omega_\mu^0)(e^{\pm ic^2t/f^2} f_0))(\vec{r}) = \tag{3.10}$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi f^3}}(\xi^2-1)^{-1/2} \int\limits_{\varepsilon_0}^{N_0} f_0(c) Y_\mu^{(0)}(c;\eta,\varphi)[u_\mu^\pm(c;\xi+w) - u_\mu(c,\xi)]e^{\pm ic^2t/f^2} dc,$$

получаем оценку $|C_{\mu}^{\pm}(\vec{\tau})| \leq M_{\mu}/t$, где M_{μ} – постоянная, не зависящая от t .

2. При $\xi \geqslant \sqrt{t}$ представим интеграл (3.10) в виде суммы из двух интегралов, так чтобы в одном из них содержалась экспонента $\exp[\pm i(c\xi - c^2 t/f^2)]$. Делаем замену переменной $c = \mathcal{Z} + f^2\xi/(2t)$ и интегрированием по частям, при котором опять появятся интегралы Френеля, получим оценку

$$|C_{\mu}^{\pm}(\vec{\tau})| \leqslant \frac{M_{\mu}}{\xi} \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{t}\,\tau(\xi^{1/4})}, & \sqrt{t} \leqslant \xi \leqslant 3N_0 t/f^2, \\ \dfrac{1}{\xi(\xi+t)}, & \xi \geqslant 3N_0 t/f^2. \end{cases}$$

С помощью этих оценок получаем неравенство

$$\| C_{\mu}^{\pm}(\vec{\tau})\|^2 \leqslant \mathrm{const.}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{\tau^2(t^{1/8})}\right),$$

из которого вытекает утверждение б).

На основании этой теоремы доказывается, что для каждого вектора ψ из плотного в $\mathcal{H}$ множества $L^0(C_0^1)$ /8/

$$\operatorname*{s\,lim}_{t\to\mp\infty} e^{iH_0 t}\mathcal{Z}e^{-iHt}\psi^{\pm} = \Omega_{\pm}^{*}\psi^{\pm}, \quad (\psi^{\pm} = \Omega_{\pm}\psi), \tag{3.II}$$

$$\operatorname*{s\,lim}_{t\to\mp\infty} (\mathcal{Z}\Omega_{\pm} - J)e^{-iH_0 t}\psi = 0. \tag{3.I2}$$

Формулой (3.II) выражаются сопряженные операторы $\Omega_{\pm}^{*}$ через АКО $\mathcal{Z}$ на множестве $\Omega_{\pm}[L^0(C_0^1)]$, которое является плотным в $\mathrm{Ran}\,\Omega_{\pm}$.

4. Метод фазовых функций для дальнодействующих сфероидальных потенциалов

Используя метод адиабатического включения взаимодействия /I,I3/, можно получить интегральные представления для операторов $\Omega_{\pm}$. Эти представления получаются с помощью интегралов Бохнера от сильно непрерывных функций

$$\Sigma_{\pm\varepsilon}\psi^{\pm} = \mp\varepsilon\int_0^{\mp\infty} e^{-\varepsilon|t|}e^{iH_0 t}\mathcal{Z}e^{-iHt}\psi^{\pm}dt, \quad \psi^{\pm}\in\Omega_{\pm}[L^0], \tag{4.I}$$

где ε – положительное число. Нетрудно показать, что эти интегралы сходятся. Можно показать также, что интегралы (4.I) имеют пределы при $\varepsilon \to 0+$ и что

$$\Omega_{\pm}^{*}\psi^{\pm} = \operatorname*{s\,lim}_{\varepsilon\to 0+} \Sigma_{\pm\varepsilon}\psi^{\pm}. \tag{4.2}$$

Из (4.I) и (4.2) выводятся модифицированные уравнения Липпмана-Швингера [8] ($\phi \in L^0(C_0^1)$)

$$\mathcal{Z}\Omega_{\pm}\psi = \psi + \underset{\varepsilon\to 0+}{s\lim} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_0-\lambda}{H_0-\lambda\mp i\varepsilon} \mathcal{Z} dP_\lambda^H \Omega_{\pm}\psi, \tag{4.3}$$

и интегральное представление T -матрицы на энергетической поверхности

$$T\psi = \frac{i}{4\pi}(S-\mathcal{I})\psi = -\underset{\varepsilon\to 0+}{s\lim} \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_0-\lambda}{(H_0-\lambda)^2+\varepsilon^2} \mathcal{Z}\Omega_{\pm} dP_\lambda^{H_0}\psi. \tag{4.4}$$

Используя определение оператора $\mathcal{Z}$ (4.3), получим интегральное уравнение

$$u_\mu^{\pm}(c;\xi+w(c,\xi)) = u_\mu(c;\xi) + \tag{4.5}$$

$$+\int_1^\infty \mathcal{G}_\mu^{\pm}(c;\xi,\xi')(H_\mu^{(\xi')}-c^2)u_\mu^{\pm}(c;\xi'+w(c,\xi'))d\xi',$$

$$\mathcal{G}_\mu^{\pm}(c;\xi,\xi') = \mp\frac{1}{ic} u_\mu(c;\xi_<)\, w_\mu^{(\pm)}(c;\xi_>), \tag{4.6}$$

$$\xi_< = \min(\xi,\xi'), \quad \xi_> = \max(\xi,\xi'),$$

$$H_\mu^{(\xi)} = -\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{A_\mu(c)-c^2}{\xi^2-1} - \frac{1-m^2}{(\xi^2-1)^2}, \tag{4.7}$$

$$w_\mu^{(\pm)}(c;\xi) = c\sqrt{\xi^2-1}\left[R_\mu(c;\xi) \pm i R_\mu^{(2)}(c;\xi)\right] \equiv u_\mu(c;\xi) \pm i v_\mu(c;\xi),$$

где $R_\mu^{(2)}(c;\xi)$ - вытянутые сфероидальные радиальные функции второго рода [9]. Поскольку оператор $\mathcal{Z}$ компенсирует неограниченно возрастающую часть фазы в асимптотике "физической волновой функции" (2.I7), то ясно, что матричные элементы оператора T в представлении сфероидальных функций (2.I8) выражаются только через фазы $\delta_\mu(c)$. Эти фазы можно определить методом фазовых функций [I5].

Легко понять, что действие оператора $H_\mu^{(\xi)} - c^2$, входящего в интегральное уравнение (4.5), эквивалентно действию некоторого эффективного потенциала, в котором участвует линейно оператор дифференцирования $\partial/\partial\xi$. Чтобы получить эффективный потенциал, в который не входит оператор $\partial/\partial\xi$, будем работать с функцией

$$\psi_\mu^{+}(c;\xi) = (1+w_\xi')^{-1/2} u_\mu^{+}(c;\xi+w(c,\xi)), \quad (w_\xi' = \partial w/\partial\xi), \tag{4.8}$$

имеющей ту же самую асимптотику, что и функция $u^{+}_{\mu}(c;\xi+w)$ /I5/. Пользуясь известными методами получения фазовых уравнений /I5/, получим для рассматриваемых дальнодействующих сфероидальных потенциалов следующее фазовое уравнение /I6/:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\delta_{\mu}(c;\xi)=-\frac{1}{c}W_{\mu}(c;\xi)\{u_{\mu}(c;\xi)\cos\delta_{\mu}(c;\xi)-v_{\mu}(c;\xi)\sin\delta_{\mu}(c;\xi)\}^{2}, \tag{4.9}$$

$$\delta_{\mu}(c;1)=0.$$

В этом уравнении $W_{\mu}(c;\xi)$ – эффективный потенциал, который определяется следующим образом:

$$W_{\mu}(c;\xi)=V_{\mu}(c;\xi)-\frac{1}{2}\{\xi+w,\xi\}, \tag{4.10}$$

где

$$V_{\mu}(c;\xi)=V(\xi+w)+(2w'_{\xi}+w'^{2}_{\xi})[V(\xi+w)-c^{2}]+(1-m^{2})\times$$
$$\times\left\{\frac{1}{(1-\xi^{2})^{2}}-\frac{(1+w'_{\xi})^{2}}{[(\xi+w)^{2}-1]^{2}}\right\}+\lambda^{(0)}_{\mu}(c)\left\{\frac{(1+w'_{\xi})^{2}}{(\xi+w)^{2}-1}-\frac{1}{\xi^{2}-1}\right\},$$

$\lambda^{(0)}_{\mu}(c)$ – собственные значения задачи (I.II) при $s(\eta)\equiv 0$, а с $\{\xi+w,\xi\}$ обозначена производная Шварца функции $\xi+w$:

$$\{\xi+w,\xi\}=(1+w'_{\xi})^{-1}\frac{\partial^{3}w}{\partial\xi^{3}}-\frac{3}{2}(1+w'_{\xi})^{-2}\left(\frac{\partial^{2}w}{\partial\xi^{2}}\right)^{2}.$$

Так как потенциал (4.I0) является короткодействующим, то фазовая функция $\delta_{\mu}(c;\xi)$ стремится к конечному пределу при $\xi\to\infty$ и этот предел равняется фазе $\delta_{\mu}(c)$. Отметим еще раз, что положительное число δ в (2.5) выбирается произвольным – изменение δ ведет к появлению одинакового слагаемого во всех фазах $\delta_{\mu}(c)$, а это не имеет значения для физических следствий теории.

В заключение автор выражает глубокую признательность К.В.Комарову и Е.Х.Христову за полезные обсуждения проблем, рассматриваемых в данной работе.

Литература

I. J.D.Dollard. J.Math.Phys., 7, 802, 1966.
2. E.Prugovečki, J.Zorbas. J.Math.Phys., 14, 1398, 1973.
3. В.С.Буслаев, В.Б.Матвеев. ТМФ, 2, 367, 1970.
4. В.Б.Матвеев, М.М.Скриганов. ТМФ, IO, 238, 1972.

5. J.Zorbas. J.Math.Phys., 19, 577, 1978.
6. W.O.Amrein, Ph.Martin and B.Misra. Acta Phys.Helv., 43, 313, 1970.
7. E.Prugovečki. Nuovo Cim., B4, 124, 1971.
8. D.Masson, E.Prugovečki. J.Math.Phys., 17, 297, 1976.
9. И.В.Комаров, Л.И.Пономарев, С.Ю.Славянов. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции, "Наука", 1976.
10. М.Рид, Б.Саймон. Методы современной теоретической физики, т.1,2, "Мир", 1978.
11. М.С.Бирман. Изв. АН СССР, сер.мат., 27, 833, 1963.
12. S.N.Sokolov. Ref. TH. 2614-CERN, (preprint) 1978.
13. А.С.Шварц. Математические основы квантовой теории поля, "Атомиздат", 1975.
14. В.П.Маслов. Операторные методы, "Наука", 1973.
15. В.В.Бабиков. Метод фазовых функций в квантовой механике, "Наука", 1976.

Рукопись поступила в издательский отдел
18 июня 1979 года.