сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P4 - 12090

В.Н.Ефимов

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ ТРЕХ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ЧАСТИЦ В МОДЕЛИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ.

IX. Трехчастичное уравнение Шредингера в модели граничных условий

1979

Р4 - 12090

В.Н.Ефимов

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ ТРЕХ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ЧАСТИЦ В МОДЕЛИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ.

IX. Трехчастичное уравнение Шредингера в модели граничных условий

Ефимов В.Н.

Р4 - 12090

Интегральное уравнение для волновой функции трех тождественных частиц в модели граничных условий.
IX. Трехчастичное уравнение Шредингера в модели граничных условий

Рассмотрено уравнение Шредингера с учетом высших парциальных компонент для системы трех тождественных частиц, парные взаимодействия которых описываются моделью граничных условий с постоянными логарифмическими производными. Эта модель определяется как совокупность граничных условий, формально накладываемых на внемассовые двухчастичные волновые функции. Показано, что на основе этих условий трехчастичное уравнение Шредингера точным образом сводится к одномерному (в векторном смысле) уравнению, которое имеет однозначное решение, соответственно однозначно определяющее полную волновую функцию. Показано также, что фаддеевские компоненты полной функции (функции каналов) оказываются неоднозначными (произвольными) во всем конфигурационном пространстве. Указан способ определения вида этих неоднозначностей и показано, что они не имеют физического смысла и могут быть устранены с помощью некоторого дополнительного условия, совместимого с необходимым условием, имеющим место при учете симметрии полной волновой функции в случае потенциального описания модели граничных условий.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Efimov V.N.

P4 - 12090

Integral Equation for the Wave Function of Three Identical Particles in the Boundary Condition Model.
IX. The Three-Particle Schrödinger Equation in the Boundary Condition Model

The Schrödinger equation with higher particle components has been considered for three identical particles with pair interactions described by the boundary condition model with constant logarithmic derivatived. This model is determined as some boundary conditions imposed formally on the two-particle off-shell wave functions. It is shown that on the basis of these conditions the three-particle Schrödinger equation is exactly reduced to one-dimensional (with only one vector variable) equation which has an unique solution correspondingly determing uniquely the total wave function. It is also shown that Faddeev's components of the total wave function (the channel function) are arbitrary over all configuration space. The method of determining this ambiguities is indicated and it is shown that these do not have a physical a sense and could be removed with the help of an additional condition which coincides with necessary condition in the case of describing the boundary condition model by some potential and by utilizing the symmetry properties of total wave function.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе будет рассмотрена задача трех тождественных бозонов с полным угловым моментом $L \geq 0$ в предположении, что каждая пара частиц взаимодействует в конечном числе парциальных состояний с $\ell \leq \ell_0$ /$\ell_0 \neq 0$/ и их взаимодействие описывается моделью граничных условий /моделью ГУ/ с постоянной логарифмической производной без внешнего потенциала[1,2]. Рассмотрение будет основано на предположении, что внемассовые двухчастичные волновые функции с энергией Z, орбитальным моментом ℓ и с импульсом в начальном состоянии k ($k^2 \neq Z$) удовлетворяют условиям[3] ($\ell \leq \ell_0$):

$$\langle r | \psi_\ell^{(2)}(Z) | k \rangle = 0, \qquad r < c_\ell \,, \qquad /1/$$

$$c_\ell \left[\frac{d}{dr} r \langle r | \psi_\ell^{(2)}(Z) | k \rangle \right]_{r = c_\ell^{(+)}} = f_\ell \left[r \langle r | \psi_\ell^{(2)}(Z) | k \rangle \right]_{r = c_\ell^{(+)}} , \qquad /2/$$

где $c_\ell^{(+)} = c_\ell + \epsilon$, $\epsilon \to 0$, c_ℓ /радиус граничных условий/ и f_ℓ - параметры модели. Условия /1/, /2/ являются обобщением рассматриваемых обычно граничных условий для волновых функций на массовой поверхности ($Z = k^2$)[1,2], определяющих фазы рассеяния. Заметим, что условие /1/ означает, что во внутренней области ($r < c_\ell$) действует бесконечный отталкивательный потенциал /твердый кор/.

В работах[3] было показано, что для полного решения задачи двух частиц в модели ГУ достаточно условий /1/ и /2/ и постулирования справедливости в модели ГУ некоторых соотношений, вытекающих из уравнений Липпманна-Швингера для обычных потенциалов, и не содержащих в явном виде самих потенциалов. Однако для системы трех частиц, взаимодействие

которых описывается моделью ГУ, условие /1/ приводит к тому, что трехчастичные уравнения Фаддеева уже не имеют однозначных решений [4] и необходима их модификация с целью устранения этих неоднозначностей. Ниже будет рассмотрено уравнение Шредингера для трех тождественных частиц в модели ГУ и показано, что последовательное использование условий /1/, /2/ позволяет строгим образом свести трехчастичное уравнение Шредингера к одномерному /с одной векторной переменной/ однозначному уравнению. Метод получения этого уравнения, по сути дела, является простым обобщением метода, предложенного ранее [5] для упрощенного варианта трехчастичной задачи с учетом только s-компонент, и будет основан кроме условий /1/, /2/ на использовании некоторых следствий, вытекающих из трехчастичных уравнений Шредингера и Фаддеева с "нормальными" потенциалами, а также из двухчастичных уравнений Липпманна-Швингера [6,7]. Будет показано, что в модели ГУ однозначна лишь полная трехчастичная волновая функция, определяющая экспериментально наблюдаемые величины, а ее разбиение на фаддеевские компоненты /функции каналов/ имеет чисто формальный смысл, так как эти компоненты оказываются неоднозначными /произвольными/ во всем конфигурационном пространстве. Этот результат не согласуется с выводами работ [8,9], и будет указана причина их расхождения. Аналогично, в модели ГУ будет однозначной только полная трехчастичная T-матрица, а ее фаддеевские компоненты /каналовые t-матрицы/, как и функции каналов, будут также неоднозначными. Далее будет приведен простой метод определения явного вида неоднозначностей фаддеевских компонент, и будет показано, что в области перекрытия коров всех трех взаимодействующих частиц полная волновая функция тождественно обращается в нуль, что является следствием условия /1/, т.е. характера двухчастичных взаимодействий.

2. ОДНОМЕРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ТРЕХ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ЧАСТИЦ В МОДЕЛИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Одномерное уравнение /для функции от одной векторной переменной/, имеющее однозначное решение и определяющее

однозначным образом полную волновую функцию системы трех тождественных частиц, взаимодействие которых описывается моделью ГУ /1/, /2/, можно легко получить, если считать, что в модели ГУ, наряду с условиями /1/, /2/, справедливы, как сказано выше, некоторые следствия, вытекающие из двухчастичного уравнения Липпманна-Швингера и трехчастичных уравнений Шредингера и Фаддеева. Необходимые для дальнейшего соотношения приведены в работах [6,7], причем ссылки на формулы этих работ будут указываться далее соответственно как /I, ... /, /II, ... /.

Модель ГУ /1/, /2/, в принципе, можно рассматривать как предельный случай задачи двух частиц с некоторым потенциалом $V_\ell(r)$, действующим в области $r \le c_\ell$, который в пределе обеспечивает выполнение условий /1/, /2/. Такой подход к решению двухчастичной задачи в модели ГУ, основанный на использовании специального вида потенциала $V_\ell(r)$, был применен в работах [10]. Однако для этой задачи, как указывалось выше, было получено полное решение в работах [3,6] без введения какого-либо потенциала $V_\ell(r)$, причем в работе [6] показано, что на основе этого решения можно легко получить предельное выражение /1,44/ для $V_\ell(r) \langle r | \psi_\ell^{(2)}(Z) | k \rangle$ в случае потенциального описания модели ГУ /1/, /2/ без конкретизации вида потенциала $V_\ell(r)$. С учетом /1,44/ и /II, 42/ выражение /II, 56/ для произведения $V_\ell(r) \langle rq | \Psi_{\ell\lambda}^{(L)} | q_0 \rangle$, полученное из трехчастичного уравнения Шредингера /II, 20/ и необходимое в соответствии с /II, 17/, /II, 40/ и /II, 47/ для определения полной трехчастичной функции $\Psi | \vec{q}_0 \rangle$ /$\Psi_{\ell\lambda}^{(L)}$ - ее парциальные компоненты/, принимает вид:

$$\Lambda_\ell V_\ell(r) \langle rq | \Psi_{\ell\lambda}^{(L)} | q_0 \rangle = \Lambda_\ell \theta(c_\ell - r) \langle rq | D_{\ell\lambda}^{(L)} | q_0 \rangle +$$

$$+ \Lambda_\ell \Delta_\ell(r) b_\ell(Z_q) \langle q | R_{\ell\lambda}^{(L)} | q_0 \rangle, \qquad /3/$$

где Λ_ℓ - проекционный оператор /II, 45/, $\theta(x)$ - ступенчатая функция Хевисайда /II, 57/, и согласно /I, 44/, /I, 34/, /I, 35/ и /II, 33а/

$$\Delta_\ell(r) = \frac{1}{r} [f_\ell \delta(r - c_\ell) + c_\ell \delta'(r - c_\ell)], \qquad /4/$$

$$b_\ell(Z) = [\, i c_\ell \sqrt{Z}\, D_\ell^{(1)}(c_\ell \sqrt{Z},\, f_\ell)]^{-1}, \quad b_0(-\kappa^2) = \frac{\sqrt{2\kappa}}{c_0}, \qquad /5/$$

κ^2 - энергия связи двух частиц /дейтона/,

$$\langle q \,|\, R^{(L)}_{\ell\lambda} \,|\, q_0 \rangle = \langle q \,|\, Y^{(L)}_{\ell\lambda} \,|\, q_0 \rangle + \frac{2\pi^2}{q^2}\,\delta(q-q_0)\,\delta_{\ell 0}\,\delta_{\lambda L}, \qquad /6/$$

а неизвестная одномерная функция $\langle q \,|\, Y^{(L)}_{\ell\lambda} \,|\, q_0\rangle$ определяется выражением /II, 58/.

Таким образом, решение уравнения Шредингера для трех тождественных частиц в модели ГУ сводится, согласно /3/ и /6/, к определению двумерной функции $\langle r\, q \,|\, D^{(L)}_{\ell\lambda} \,|\, q_0\rangle$ и одномерной функции $\langle q \,|\, Y^{(L)}_{\ell\lambda} \,|\, q_0\rangle$. В качестве первого уравнения для этих функций можно использовать соотношение /II, 58/ совместно с выражениями /II, 5O/ и /3/, /6/:

$$\Lambda_\ell \langle q \,|\, Y^{(L)}_{\ell\lambda} \,|\, q_0\rangle - \Lambda_\ell \sum_{\beta\neq\alpha} \sum_{\ell'\lambda'} \int d\vec{r}_\alpha\, d\vec{\rho}_\alpha\, \theta(r_\alpha - c_\ell)\, i\sqrt{Z_q} \times$$

$$\times h^{(1)}_\ell (r_\alpha \sqrt{Z_q})\, j_\lambda(q\rho_\alpha) \langle \ell\lambda LM \,|\, \hat{\vec{r}}_\alpha \hat{\vec{\rho}}_\alpha \rangle \langle \hat{\vec{r}}_\beta \hat{\vec{\rho}}_\beta \,|\, \ell'\lambda' LM\rangle \times$$

$$\times [\Lambda_{\ell'}\ \theta(c_{\ell'} - r_\beta) \langle r_\beta \rho_\beta \,|\, D^{(L)}_{\ell'\lambda'} \,|\, q_0\rangle + \frac{2}{\pi}\Lambda_{\ell'} \int_0^\infty q'^2\, dq'\, \Delta_{\ell'}(r_\beta) \times$$

$$\times b_{\ell'}(Z_{q'})\, j_{\lambda'}(q'\rho_\beta) \langle q' \,|\, Y^{(L)}_{\ell'\lambda'} \,|\, q_0\rangle] = 4\pi \Lambda_\ell \sum_{\beta\neq\alpha} \int d\vec{r}_\alpha d\vec{\rho}_\alpha\, \theta(r_\alpha - c_\ell) \times$$

$$\times\, i\sqrt{Z_q}\, h^{(1)}_\ell (r_\alpha \sqrt{Z_q})\, j_\lambda(q\rho_\alpha) \langle \ell\lambda LM \,|\, \hat{\vec{r}}_\alpha \hat{\vec{\rho}}_\alpha \rangle \langle \hat{\vec{r}}_\beta \hat{\vec{\rho}}_\beta \,|\, 0LLM\rangle \times$$

$$\times\, \Delta_0(r_\beta)\, b_0(-\kappa^2)\, j_L(q_0 \rho_\beta). \qquad /7/$$

Второе уравнение для функций $\langle r\rho \,|\, D^{(L)}_{\ell\lambda} \,|\, q_0\rangle$ и $\langle q \,|\, Y^{(L)}_{\ell\lambda} \,|\, q_0\rangle$ следует из соотношения /II, 47a/ и уравнения /II, 48/ для парциальных компонент $\langle r\, q \,|\, \Psi^{(L)}_{\ell\lambda} \,|\, q_0\rangle$ при $\ell \leq \ell_0$, которое можно записать в виде:

$$\Delta^{(L)}_{\ell\lambda}(r,\rho) = \Lambda_\ell \frac{2}{\pi}\int_0^\infty q^2\, dq [\Delta^{(\ell)}_r + Z_q] \langle r q \,|\, \Psi^{(L)}_{\ell\lambda} \,|\, q_0\rangle j_\lambda(q\rho), \qquad /8/$$

$$\Lambda^{(L)}_{\ell\lambda}(r,\rho) = \Lambda_\ell V_\ell(r) \langle r\rho \,|\, \Psi^{(L)}_{\ell\lambda} \,|\, q_0\rangle + \Lambda_\ell \frac{2}{\pi}\int_0^\infty q^2\, dq \langle rq \,|\, Q^{(L)}_{\ell\lambda} \,|\, q_0\rangle j_\lambda(q\rho). \qquad /9/$$

Легко показать, что в области $r \leq c_\ell^{(-)}$, $c_\ell^{(-)} = c_\ell - \epsilon$, $\epsilon \to 0$ имеет место равенство

$$\theta(c_\ell^{(-)} - r)\, \Delta^{(L)}_{\ell\lambda}(r,\rho) = 0. \qquad /1O/$$

Действительно, из выражений /1, 34/ и /1,33/ с учетом вида /II, 49/ оператора $\Lambda^{(\ell)}_r$ следует:

$$\Lambda_\ell [\Lambda^{(\ell)}_r + Z] \langle r \,|\, \psi^{(2)}_\ell(Z) \,|\, k\rangle = -\Lambda_\ell\, \theta(r - c_\ell)(k^2 - Z)\, j_\ell(kr) +$$

$$+ \Lambda_\ell \frac{1}{r} [\, f_\ell\, \delta(r - c_\ell) + c_\ell \delta'(r - c_\ell)\,] \langle c_\ell \,|\, \psi^{(2)}_\ell(Z) \,|\, k\rangle. \qquad /11/$$

При подстановке в /8/ соотношения /II, 47a/ и использовании выражений /II, 42a/, /11/, /II, 47/ и /3/ легко получить результат /1O/, который совместно с /9/, /6/ и /II, 5O/ приводит к следующему уравнению:

$$\Lambda_\ell\, \theta(c_\ell - r_\alpha) \langle r_\alpha \rho_\alpha \,|\, D^{(L)}_{\ell\lambda} \,|\, q_0\rangle +$$

$$+ \Lambda_\ell\, \theta(c_\ell - r_\alpha) \sum_{\beta\neq\alpha} \sum_{\ell'\lambda'} \int d\Omega_{\vec{r}_\alpha}\, d\Omega_{\vec{\rho}_\alpha} \langle \ell\lambda LM \,|\, \hat{\vec{r}}_\alpha \hat{\vec{\rho}}_\alpha \rangle \langle \hat{\vec{r}}_\beta \hat{\vec{\rho}}_\beta \,|\, \ell'\lambda' LM\rangle \times$$

$$\times \Lambda_{\ell'}\, \theta(c_{\ell'} - r_\beta) \langle r_\beta \rho_\beta \,|\, D^{(L)}_{\ell'\lambda'} \,|\, q_0\rangle =$$

$$= -\Lambda_\ell\, \theta(c_\ell - r_\alpha) \sum_{\beta\neq\alpha} \sum_{\ell'\lambda'} \int d\Omega_{\vec{r}_\alpha}\, d\Omega_{\vec{\rho}_\alpha} \langle \ell\lambda LM \,|\, \hat{\vec{r}}_\alpha \hat{\vec{\rho}}_\alpha \rangle \langle \hat{\vec{r}}_\beta \hat{\vec{\rho}}_\beta \,|\, \ell'\lambda' LM\rangle \times$$

$$\times \Lambda_{\ell'} \langle r_\beta \rho_\beta \,|\, \Phi^{(L)}_{\ell'\lambda'} \,|\, q_0\rangle, \qquad /12/$$

где

$$\langle r\rho \,|\, \Phi^{(L)}_{\ell\lambda} \,|\, q_0\rangle = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty q^2\, dq\, \Delta_\ell(r)\, b_\ell(Z_q) \langle q \,|\, R^{(L)}_{\ell\lambda} \,|\, q_0\rangle j_\lambda(q\rho). \qquad /13/$$

В уравнениях /12/ интегрирование проводится только по углам, поэтому будет сохраняться величина шестимерного вектора

R^{*} /II, 3/, и в /12/ удобно ввести переменные ϕ и ϕ' согласно следующим соотношениям:

$$r_\alpha = R\sin\phi, \qquad r_\beta = R\sin\phi',$$

$$\rho_\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} R\cos\phi, \quad \rho_\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} R\cos\phi',$$

$$R^2 = r_\alpha^2 + \frac{4}{3}\rho_\alpha^2 = r_\beta^2 + \frac{4}{3}\rho_\beta^2. \qquad /14/$$

После интегрирования по углам Эйлера, определяющим ориентацию треугольника $(\vec{r}_\beta, \vec{\rho}_\beta)$, и использования выражений /II, 1a/ и условия /II, 19/ четности по $\vec{r}$ полной волновой функции уравнения /12/ приводятся к системе одномерных уравнений следующего вида:

$$\Lambda_\ell\,\theta(c_\ell - R\sin\phi) < R\phi\,|A^{(L)}_{\ell\lambda}|\,q_0> +$$

$$+\Lambda_\ell\,\theta(c_\ell - R\sin\phi)\frac{4}{\sqrt{3}}\sum_{\ell'\lambda'}\int\limits_{|\frac{\pi}{3}-\phi|}^{\min(\frac{\pi}{3}+\phi,\,\frac{2\pi}{3}-\phi)} d\phi' <\phi\,|K^{(L)}_{\ell\lambda;\ell'\lambda'}|\,\phi'> \times$$

$$\times\Lambda_{\ell'}\,\theta(c_{\ell'} - R\sin\phi') < R\phi'\,|A^{(L)}_{\ell'\lambda'}|\,q_0> =$$

$$= -\Lambda_\ell\,\theta(c_\ell - R\sin\phi)\,\frac{4}{\sqrt{3}}\sum_{\ell'\lambda'}\int\limits_{|\frac{\pi}{3}-\phi|}^{\min(\frac{\pi}{3}+\phi,\,\frac{2\pi}{3}-\phi)} d\phi' <\phi\,|K^{(L)}_{\ell\lambda;\ell'\lambda'}|\,\phi'>\times$$

$$\times\Lambda_{\ell'} < R\phi'\,|\phi^{(L)}_{\ell'\lambda'}|\,q_0>, \qquad /15/$$

где

$$<R\phi\,|A^{(L)}_{\ell\lambda}|\,q_0> \equiv <r\rho\,|A^{(L)}_{\ell\lambda}|\,q_0> = r\rho <r\rho\,|D^{(L)}_{\ell\lambda}|\,q_0>, \qquad /16/$$

$$<R\phi\,|\phi^{(L)}_{\ell\lambda}|\,q_0> \equiv <r\rho\,|\phi^{(L)}_{\ell\lambda}|\,q_0> = r\rho <r\rho\,|\Phi^{(L)}_{\ell\lambda}|\,q_0>, \qquad /16a/$$

а геометрический фактор имеет вид /11/

$$<\phi\,|K^{(L)}_{\ell\lambda;\ell'\lambda'}|\,\phi'> = (4\pi)^{3/2}\left[\frac{2\ell+1}{(2\lambda+1)(2\lambda'+1)}\right]^{1/2} i^{-\ell+\lambda+\ell'-\lambda'}\times$$

$$\times\sum_{\mu\mu'}(\ell L 0\mu\,|\lambda\mu)(\ell' L\mu'-\mu\mu\,|\lambda'\mu')\,Y^*_{\lambda\mu}(\theta,0)\,Y^*_{\ell'\mu'-\mu}(\theta_1,0)\,Y_{\lambda'\mu'}(\theta_2,0),$$

$$\cos\theta = (\cos 2\phi + 2\cos 2\phi')/\sqrt{3}\sin 2\phi,$$

$$\cos\theta_1 = (2\cos 2\phi + 2\cos 2\phi' - 1)/4\sin\phi\sin\phi',$$

$$\theta_2 = \theta_1 + \xi, \quad \cos\xi = (-2\cos 2\phi - \cos 2\phi')/\sqrt{3}\sin 2\phi'. \qquad /17/$$

В частности, при $L = 0$ /17/ приобретает вид:

$$<\phi\,|K^{(0)}_{\ell\lambda;\ell'\lambda'}|\,\phi'> = \delta_{\ell\lambda}\,\delta_{\ell'\lambda'}\,[(2\ell+1)(2\ell'+1)]^{1/2}\,P_\ell(\cos\theta)P_{\ell'}(\cos\xi). \qquad /18/$$

Уравнение /15/ с учетом только s-компонент ($\ell = \lambda = L = 0$) впервые было получено /12/ для случая твердого кора /в граничном условии /2/ $f_0 \to \infty$ / однофамильцем автора данной работы, причем это уравнение было решено аналитически. При учете высших парциальных компонент решение системы уравнений /15/ в аналитическом виде неизвестно, однако можно легко и достаточно эффективно найти с хорошей точностью приближенное решение /13/ с помощью рядов Фурье по переменной ϕ $(0 \le \phi \le \pi/2)$:

$$\Lambda_\ell\,\theta(c_\ell - R\sin\phi) < R\phi\,|A^{(L)}_{\ell\lambda}|\,q_0> =$$

$$= \Lambda_\ell \sin^\ell\phi\cos^\lambda\phi\sum_{n=1}^{N} <R\,|A^{(L\ell\lambda)}_n|\,q_0> \sin 2n\phi, \qquad /19/$$

причем разложение /19/ записано с учетом граничных условий при $\phi = 0$, $\phi = \pi/2$, следующих из /14/ и /16/.

В области $R > c$ $(c = \min c_\ell)$ согласно /4/, /13/ и /16a/ правые части в уравнениях /15/ отличны от нуля, и подстановка /19/ в /15/ приводит к системе линейных неоднородных уравнений, из которых однозначно определяются коэффициенты $<R\,|A^{(L\ell\lambda)}_n|\,q_0>$ разложения /19/. Так как ядра уравнений

/15/ имеют конечную фредгольмовскую норму, то таким образом в области $R > c$ можно, в принципе, построить однозначные решения уравнений /15/

$$\Lambda_\ell \theta(c_\ell - R\sin\phi) < R\phi | A^{(L)}_{\ell\lambda} | q_0 > = \Lambda_\ell \theta(c_\ell - r) r\rho < r\rho | D^{(L)}_{\ell\lambda} | q_0 >,$$

полагая в /19/ $N \to \infty$*, которые будут выражаться в соответствии с /6/ через неизвестные одномерные функции $< q | Y^{(L)}_{\ell\lambda} | q_0 >$. Подстановка этих решений в уравнения /7/, в интегральных членах которых существенна именно область $R > c$, позволяет привести уравнения /7/ к системе одномерных интегральных уравнений для функций $< q | Y^{(L)}_{\ell\lambda} | q_0 >$ /для связанного состояния трех частиц система соответственно будет однородной/:

$$\Lambda_\ell < q | Y^{(L)}_{\ell\lambda} | q_0 > - \frac{2}{\pi} \Lambda_\ell \sum_{\ell'\lambda'} \int_0^\infty q'^2 dq' < q | V^{(L)}_{\ell\lambda;\ell'\lambda'}(Z) | q' > \times$$

$$\times \Lambda_{\ell'} < q' | Y^{(L)}_{\ell'\lambda'} | q_0 > = \Lambda_\ell < q | H^{(L)}_{\ell\lambda} | q_0 >, \qquad /20/$$

где $< q | H^{(L)}_{\ell\lambda} | q_0 >$ - известная функция, связанная с /II, 42/. В случае учета только s-компонент ($\ell = \lambda = L = 0$) система уравнений /15/ сводится к одному уравнению, аналитическое решение которого было получено в работе[5]. Аналогично вместо системы /20/ будет иметь место одно уравнение для функции $< q | Y^{(0)}_{00} | q_0 >$. Явный вид ядра этого уравнения приведен в работе[14], в которой рассмотрено связанное состояние трех тождественных бозонов при условии $\ell = \lambda = L = 0$.

3. *ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ СИСТЕМЫ ТРЕХ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ЧАСТИЦ В МОДЕЛИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ*

В области $R < c$** согласно /4/ и /13/ правые части уравнений /12/, из которых следует система уравнений /15/,

* Решения системы уравнений /15/ при $R < c$ будут рассмотрены в следующем разделе.

** Напомним, что $c = \min c_\ell$.

равны нулю, однако в этом случае система однородных уравнений /12/ будет иметь нетривиальные решения, содержащие произвольные функции, что является характерной чертой применения модели ГУ для двух частиц в трехчастичных уравнениях. Установим существование и вид таких решений. Согласно /3/ и /4/ в области $R < c$ имеем:

$$\Lambda_\ell V_\ell(r) < r\rho | \Psi^{(L)}_{\ell\lambda} | q_0 > = \Lambda_\ell \theta(c - R) < r\rho | D^{(L)}_{\ell\lambda} | q_0 >. \qquad /21/$$

Введем далее функцию $< \vec{r}\vec{\rho} | D | \vec{q}_0 >$:

$$< \vec{r}\vec{\rho} | D | \vec{q}_0 > = \sum_{LM\ell\lambda} < \hat{\vec{r}}\hat{\vec{\rho}} | \ell\lambda LM > \Lambda_\ell < r\rho | D^{(L)}_{\ell\lambda} | q_0 > < LM | \hat{\vec{q}}_0 >. \qquad /22/$$

Из уравнений /12/ при $R < c$ и из /22/, а также из вида /II, 14/, /II, 15/ оператора S следует:

$$< \Theta_R D,\ (1+S)\Theta_R D > = 0, \qquad /23/$$

где Θ_R - диагональный оператор проектирования в подпространство $R < c$:

$$\Theta_R = \theta(c - R). \qquad /24/$$

Соотношение /23/ является следствием просто того факта, что согласно /22/ и /II, 45/ функция D содержит только парциальные компоненты с $\ell \le \ell_0$, а из /12/ следует, что при $R < c$ $(1+S)D$ ортогонально ко всем таким компонентам.

В соответствии со свойствами оператора S /II, 16/ и оператора Θ_R /24/ из /23/ вытекает

$$< (1+S)\Theta_R D,\ (1+S)\Theta_R D > = 0, \qquad /25/$$

что возможно только при условии

$$(1+S)\Theta_R D = 0. \qquad /26/$$

Последнее равенство означает, что в области $R < c$ D является произвольной функцией смешанной симметрии, принадлежащей к двумерному представлению группы перестановок

$S_3^{\cdot}$ [15] и симметричной, согласно /II, 19/, относительно $\vec{r}$. Симметризация такой функции по набору α, β, γ -координат Якоби /II, 1/, /II, 1a/ /действие оператором $1+S$ / всегда дает нуль, т.е. автоматически приводит к выполнению условия /26/. Следовательно, $\Theta_R D$ можно разложить по гиперсферическим функциям соответствующей симметрии[13], в качестве которых для произвольных L могут быть взяты функции с индексом Ямаучи $m2$, рассмотренные в работе[16]:

$$\Phi^{m2}_{KLM}(\Omega) = \sum_{\ell\lambda} C^{m2}_{KL}(\ell\lambda)\Phi_k^{\ell\lambda LM}(\Omega), \qquad /27/$$

где $\Omega = (\phi, \hat{\vec{r}}, \hat{\vec{\rho}})$ - телесный угол в шестимерном пространстве $(\vec{r}, \vec{\rho})$, угол ϕ определен соотношениями /14/, $\Phi_K^{\ell\lambda LM}(\Omega)$ - гиперсферические гармоники, определенные в работе[17]. В частности, при $L = M = 0$ вместо /27/ можно использовать функции $v_K^{\nu}(\phi, \theta)$ $(\cos\theta = \hat{\vec{r}}\hat{\vec{\rho}})$ из работы[18]. Окончательно решение $\Theta_R D$ однородной системы уравнений /12/ /или /15// можно представить в виде следующего разложения по функциям /27/:

$$<\vec{r}\vec{\rho}|\Theta_R D|\vec{q}_0> = \sum_{KLM}\phi_K(R)\Phi^{m2}_{KLM}(\Omega)<LM|\hat{\vec{q}}_0>, \qquad /28/$$

где $\phi_K(R)$ - произвольные функции шестимерного радиус-вектора R, отличные от нуля только при $R < c$, а суммирование по K проводится по тем значениям K, для которых возможно согласно /27/ построить функцию смешанной симматерии из гиперсферических функций $\Phi_K^{\ell\lambda LM}(\Omega)$ с $\ell \le \ell_0$. Из /22/ и /28/ следует, что при $R < c$ однородные уравнения /12/ или, соответственно, /15/ и /16/, будут иметь нетривиальные и неоднозначные /произвольные/ решения вида

$$\Lambda_\ell < r\rho|D^{(L)}_{\ell\lambda}|q_0> = \sum_K \phi_K(R)C^{m2}_{KL}(\ell\lambda)\bar{\Phi}_K^{\ell\lambda}(\phi), \qquad /29/$$

где $\bar{\Phi}_K^{\ell\lambda}(\phi)$ определяется, согласно[17], соотношением

$$\Phi_K^{\ell\lambda LM}(\Omega) = \bar{\Phi}_K^{\ell\lambda}(\phi)<\hat{\vec{r}}\hat{\vec{\rho}}|\ell\lambda LM>. \qquad /30/$$

Из вида уравнения /7/ и равенства $\theta(r-c_\ell)\theta(c-R) = 0$ следует, что неоднозначность $\Theta_R D$ /28/ не будет играть никакой роли при выводе уравнений /20/. Однако эта неоднозначность будет существенна при определении согласно /II, 23/ функции канала ψ и приведет в соответствии с /21/ и /22/ к неопределенности $\Delta\psi$:

$$\Delta\psi = -\mathcal{G}_0(Z)\Theta_R D. \qquad /31/$$

С неоднозначностью функции канала /31/ будет связана и неоднозначность $\Delta\tau$ каналовой t-матрицы τ:

$$\Delta\tau = -\mathcal{G}_0^{-1}(Z)\Delta\psi = \Theta_R D. \qquad /32/$$

Таким образом, решения однозначных уравнений /20/, полученных из трехчастичного уравнения Шредингера в модели ГУ, не определяют однозначным образом ни функцию канала ψ, ни каналовую t-матрицу τ, что не согласуется с выводами работы[8]. Последнее обстоятельство связано с тем, что в работе[8] при записи решения уравнения для D (уравнение /42/ работы[8]) в интегральной форме (выражение /48/ из [8]) опущено решение соответствующего однородного уравнения для D, т.е. решение в области $R < c$, которое, как показано выше, существует и именно оно приводит к неоднозначностям /31/ и /32/. Однако эти неоднозначности оказываются также несущественными и при построении полной волновой функции Ψ и полной трехчастичной T-матрицы. Действительно, из /II, 17/ и /26/, /31/, /32/ следует, что их неопределенности $\Delta\Psi$ и ΔT равны нулю:

$$\Delta\Psi = (1+S)\Delta\psi = -\mathcal{G}_0(Z)(1+S)\Theta_R D = 0, \qquad /33/$$

$$\Delta T = (1+S)\Delta\tau = (1+S)\Theta_R D = 0, \qquad /34/$$

причем этот результат основан лишь на соотношении /II, 47a/ и граничном условии /1/, не требует привлечения соображений о симметрии волновой функции и, следовательно, имеет место для системы трех различных частиц *.

Используя явный вид /II, 10/ функции Грина $\mathcal{G}_0(Z)$ и разложение шестимерной плоской волны по гиперсферическим гармоникам [17], а также разложение /28/ и соотношение /27/, получим, что неоднозначность функции канала /31/ можно представить в виде:

$$\langle \vec{r}\vec{\rho} \,|\, \Delta\psi \,|\, \vec{q}_0 \rangle = \sum_{KLM} \bar{\phi}_K(R)\Phi^{m\,2}_{KLM}(\Omega)\langle LM|\hat{\vec{q}}_0\rangle , \qquad /35/$$

где $\bar{\phi}_K(R)$ - произвольные функции R, следующим образом связанные с функциями $\phi_K(R)$ из /28/:

$$\bar{\phi}_K(R) = -\frac{1}{R^2}\int_0^c R'^3 dR' \langle R \,|\, \mathcal{G}_K(Z) \,|\, R'\rangle \phi_K(R') , \qquad /36/$$

$$\langle R \,|\, \mathcal{G}_K(Z) \,|\, R'\rangle = \int_0^\infty Q\, dQ \, \frac{J_{K+2}(QR) J_{K+2}(QR')}{Q^2 - Z} . \qquad /37/$$

$J_\nu(x)$ - функция Бесселя, Q - величина /II, 4/ шестимерного вектора $(\vec{k}, \vec{q})$. Из /36/ и /37/ следует, что $\bar{\phi}_K(R)$, а следовательно, и неоднозначности функции канала $\Delta\psi$ /35/ будут отличны от нуля при всех значениях R, а не только при $R < c$, как $\Theta_R D$ /28/. Этот результат не согласуется с выводами работ [9,14], в которых рассматривалось уравнение Фаддеева для функций канала ψ и было установлено, что ψ неоднозначно только в области $R < c$. Такое расхождение можно объяснить тем, что исходные уравнения работ [9,14] /уравнения /26/, /27/ в [9] и /4.12/, /4.13/ в [14] / наряду с решениями ψ имеют также решения $\psi + \Delta\psi$ с произвольным слагаемым вида /31/, /35/, наличие которых следует из уравнения Шредингера. Более детально уравнения Фаддеева в модели ГУ будут рассмотрены в следующей работе.

---

* В этом случае необходимо только определить надлежащим образом координаты Якоби /II, 1/, приписать индекс канала α функции канала ψ_α, потенциалу V_α и т.д. и переопределить проекционный оператор Λ /II, 45/: $\Lambda^{(\alpha)}_\ell = 1,\ \ell \le \ell_0^{(\alpha)};\ \Lambda^{(\alpha)}_\ell = 0,\ \ell > \ell_0^{(\alpha)}$, а под c понимать $\min c^{(\alpha)}_\ell$.

В частном случае $L = M = 0$, используя в /27/ значения C^{m2}_{K0} из работы [16] и явные выражения для $\Phi^{\ell\lambda 00}_K(\Omega)$ из [17] /или, соответственно, выражения для v^ν_K для соответствующих ν из работы [17] /, легко получить угловую зависимость в /35/ для неоднозначности функции канала. Действительно, для двухчастичных взаимодействий в парциальных состояниях только с $\ell = 0,2$ K в /35/ принимает значения K =2,4,6 и соответствующие функции $\Phi^{m\,2}_{K00}(\Omega)$ будут иметь вид:

$$\pi^{3/2}\Phi^{m\,2}_{200}(\Omega) = -2(1 - 2r^2/R^2) ,$$

$$\pi^{3/2}\Phi^{m\,2}_{400}(\Omega) = -\sqrt{6}\left[1 - \frac{16}{3}\,\frac{r^2\rho^2 + (\vec{r}\vec{\rho})^2}{R^4}\right] ,$$

$$\pi^{3/2}\Phi^{m\,2}_{600}(\Omega) = -\sqrt{8}\,(1 - 2r^2/R^2)\left[1 - 16\,\frac{r^2\rho^2 - (\vec{r}\vec{\rho})^2}{R^4}\right] \qquad /38/$$

и разложение /35/ совместно с /38/ с точностью до произвольных коэффициентов $\bar{\phi}_K(R)$ определяет неоднозначность функции канала $\Delta\psi$ в простейшем случае ($L = M = 0$, $\ell = 0, 2$) во всем шестимерном конфигурационном пространстве $(\vec{r}, \vec{\rho})$.

Определим теперь полную волновую функцию $\vec{\Psi}$ в области $R < c$, что может быть сделано точно так же, как было доказано соотношение /26/. Действительно, из выражения /II, 47a/ и граничного условия /1/ следует

$$\Lambda_\ell\, \theta(c_\ell - r) \langle r\rho \,|\, \Psi^{(L)}_{\ell\lambda} \,|\, q_0\rangle = 0 . \qquad /39/$$

Однако это условие нельзя использовать по аналогии с /23/ и /25/ для определения Ψ, так как $\theta(c_\ell - r)$ не коммутирует с оператором S /II, 14-15/. С этим оператором коммутирует Θ_R /24/, поэтому необходимо рассматривать $\Theta_R\Psi$. Ввиду того, что $\Theta_R\,\theta(c_\ell - r) = \Theta_R$, из /39/ следует:

$$\Lambda_\ell\, \Theta_R \langle r\rho \,|\, \Psi^{(L)}_{\ell\lambda} \,|\, q_0\rangle = 0,$$

т.е. в соответствии с /II, 39/ и /II, 45/ $\Theta_R\Psi$ содержит парциальные компоненты с $\ell > \ell_0$, тогда как из /II, 40/ и /II, 47/ следует, что ψ включает только компоненты с $\ell \le \ell_0$. Поэтому, согласно /II, 17/,

$$\langle \psi, \Theta_R \Psi \rangle = \langle \Theta_R \psi, \Theta_R (1+S)\psi \rangle = 0,$$

откуда с учетом /II, 16/ вытекает

$$\langle \Theta_R \Psi, \Theta_R \Psi \rangle = 0,$$

что приводит к условию

$$\Theta_R \Psi = 0, \qquad /40/$$

т.е. к тому, что полная волновая функция $\langle \vec{r}\,\vec{\rho} \,|\, \Psi \,|\, \vec{q}_0 \rangle = 0$ в области $R < c$. Соотношение /40/ получено на основе тех же предположений, что и соотношение /33/, и с учетом замечания на стр. 14 применимо и для волновой функции системы трех различных частиц. Результат /40/ противоречит результату работы [9], согласно которому $\langle \vec{r}\,\vec{\rho} \,|\, \Psi \,|\, \vec{q}_0 \rangle = 0$ в более широкой области $r < c$ /формула /50/ работы [9] /. Это связано с тем, что в [9] не был принят во внимание тот факт, что при учете парных взаимодействий в конечном числе парциальных состояний с $\ell \le \ell_0$ функция канала ψ не содержит парциальных компонент с $\ell > \ell_0$. Это существенно и при доказательстве (раздел 5 работы [9])однозначности полной волновой функции системы трех частиц в модели ГУ.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше было показано, что трехчастичное уравнение Шредингера в модели ГУ точным образом сводится к одномерному /в векторном смысле/ уравнению /20/, имеющему однозначное решение. Это решение, согласно /33/ и /34/, однозначно определяет полную волновую функцию Ψ и полную трехчастичную t-матрицу T, непосредственно определяющие все наблюдаемые трехчастичные величины. Однако фаддеевские компоненты ψ /функция канала/ и τ /каналовая t-матрица/ оказываются неоднозначными с точностью до произвольных слагаемых $\Delta\psi$ /31/ и $\Delta\tau$ /32/. Таким образом, разбиение Ψ и T на фаддеевские компоненты имеет в некотором смысле

чисто формальный характер. В этом случае имеется определенное соответствие с градиентной инвариантностью уравнений Максвелла, согласно которой физически наблюдаемым напряженностям поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ соответствует четырехмерный потенциал $(\vec{A}, i\phi)$, к которому может быть прибавлен четырехмерный градиент произвольной скалярной функции, и для ее фиксирования необходимо наложить одно дополнительное условие. Аналогичным образом можно поступить и в случае применения двухчастичной модели ГУ к трехчастичному уравнению Шредингера: потребовать,чтобы решение /28/однородного уравнения/12/ $\Theta_R D = 0$, что приведет,согласно /31/ и /32/, к однозначному определению фаддеевских компонент ψ и τ во всем их конфигурационном пространстве. Заметим, что условие $\Theta_R D = 0$ для трех тождественных частиц согласуется с соображениями, использованными в работах [12,14] и основанными на симметрии полной волновой функции. Ясно, что для различных частиц такие соображения неприменимы, и условие $\Theta_R D = 0$ является в полном смысле дополнительным условием, устраняющим не имеющие физического смысла неоднозначности $\Delta\psi$ /31/ и $\Delta\tau$ /32/.

В заключение автор выражает глубокую благодарность В.Ефимову /ЛИЯФ им. Б.П.Константинова, Гатчина/ за весьма ценные обсуждения ряда вопросов, касающихся раздела 3, способствовавших написанию этого раздела.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Feshbach H., Lomon E.L. Phys. Rev., 1956, 102, p.891.*
2. *Feshbach H., Lomon E.L. Ann.Phys., (N.-Y.), 1964, 29, p.19.*
3. *Ефимов В.Н. ОИЯИ, Р4-6708, Дубна, 1972.*
   Efimov V.N., Schulz H. Nucl.Phys., 1974, A235, p.436.
4. *Brayshaw D.D. Phys. Rev.Lett., 1971, 26, p.659.*
5. *Ефимов В.Н. ОИЯИ, Р4-8707, Дубна, 1975.*
6. *Ефимов В.Н. ОИЯИ, Р4-11770, Дубна, 1978.*
7. *Ефимов В.Н. ОИЯИ, Р4-12081, Дубна, 1978.*
8. *Brayshaw D.D. Phys. Rev., 1976, C13, p.1835.*
9. *Кузьмичев В.Е., Харченко В.Ф. ТМФ, 1977, 31, с. 75.*

10. *Kim Y.E., Tubis A. Phys. Rev., 1970, C1, p.414.*
Brayshaw D.D. Phys. Rev., 1971, C3, p.35.
11. *Noyes H.P. Phys. Rev.Lett., 1969, 23, p.1201.*
12. *Ефимов В. ЯФ, 1969, 10, с. 107.*
13. *Ефимов В.Н. ОИЯИ, Р4-10189, Дубна, 1976.*
14. *Efimov V.N., Schulz H. Nucl.Phys., 1976, A261, p.328.*
15. *Бор О., Моттельсон Б. Структура атомного ядра, т. 1, "Мир", М., 1971.*
16. *Джибути Р.И., Крупенникова Н.Б., Томчинский В.Ю. ЯФ, 1976, 23, с. 539.*
17. *Raynal J., Revai J. Nuovo Cim., 1970, A68, p.612.*
18. *Симонов Ю.А. ЯФ, 1966, 3, с. 630.*

Рукопись поступила в издательский отдел
15 декабря 1978 года.