сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

12081

P4 - 12081

В.Н.Ефимов

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ ТРЕХ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ЧАСТИЦ В МОДЕЛИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ.

VIII. Уравнения Шредингера и Фаддеева для потенциалов конечного радиуса действия

1979

P4 - 12081

В.Н.Ефимов

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ ТРЕХ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ЧАСТИЦ В МОДЕЛИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ.

VIII. Уравнения Шредингера и Фаддеева для потенциалов конечного радиуса действия

Ефимов В.Н. Р4 - 12081

Интегральное уравнение для волновой функции трех тождественных частиц в модели граничных условий. VIII. Уравнения Шредингера и Фаддеева для потенциалов конечного радиуса действия

Рассмотрено уравнение Шредингера для полной волновой функции Ψ и уравнение Фаддеева для функции канала ψ системы трех тождественных частиц, парные взаимодействия которых описываются потенциалом V с конечным радиусом действия. Из трехчастичных уравнений Шредингера и Фаддеева получены соответственно выражения для $V\Psi$ и ψ, представляющие собой формальные разбиения на "внутреннюю" и "внешнюю" части, которые описывают конфигурации, когда взаимодействуют все частицы и когда взаимодействует только одна пара частиц. Вид этих выражений таков, что они могут служить основой для получения одномерных трехчастичных уравнений в случае парных взаимодействий частиц, описываемых моделью граничных условий.

Работа выполнена в Лаборатории нейтронной физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Efimov V.N. P4 - 12081

Integral Equation for the Wave Function of Three Identical Particles in the Boundary Condition Model. VIII. The Schrödinger and Faddeev Equations for the Finite Range Potentials

The Schrödinger equation for the total wave function Ψ and Faddeev equation for the channel function ψ of three identical particles have been considered in the case of pair interactions via finite-range potentials V. The proper expressions for $V\Psi$ and ψ have been derived correspondingly from three-particle Schrödinger and Faddeev equations describing the configurations when interacted all three particles and when interacted only one pair of particles. The appropriate expressions could serve the basis for deriving the one-dimensional three-particle equations in the case of pair interactions described by the boundary condition model.

The investigation has been performed at the Laboratory of Neutron Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах /1-3/ была рассмотрена простейшая трехчастичная задача - связанное состояние трех бесспиновых тождественных частиц, парные взаимодействия которых описываются моделью граничных условий /ГУ/ с постоянной логарифмической производной и без внешнего потенциала /4,5/. Для простоты предполагалось, что взаимодействия частиц центральны и имеют место только в относительных s-состояниях и что полный угловой момент системы трех частиц $L=0$. Метод, предложенных в работах /1-3/, был обобщен в работе /6/ на случай различный частиц и произвольных парциальных компонент. В работе /7/ был предложен несколько иной подход к рассмотрению задачи трех тождественных частиц в модели ГУ с учетом высших парциальных компонент. Однако в работах /6,7/, на наш взгляд, недостаточно последовательно и полно проанализированы неоднозначности, возникающие при использовании двухчастичной модели ГУ в трехчастичных задачах, что привело к некоторым не совсем обоснованным, с нашей точки зрения, выводам.

Ниже, по аналогии с /1-3/, будет рассмотрена задача трех тождественных бозонов* с учетом высших парциальных компонент /в частности, без ограничения $L=0$/ в предположении, что каждая пара частиц взаимодействует только в конечном числе парциальных состояний с $\ell \le \ell_0$ $(\ell_0 \ne 0)$ и их

* Ограничение случаем трех тождественных бозонов делается только ради простоты /обобщение метода на систему трех различных частиц тривиально/ с учетом того, что именно этот случай важен при анализе системы трех нуклонов.

взаимодействия описываются моделью ГУ без внешнего потенциала. Выводу трехчастичных уравнений в модели ГУ будет предшествовать получение некоторых соотношений из уравнений Шредингера и Фаддеева для системы трех тождественных частиц, взаимодействия которых описываются "нормальными" потенциалами с конечным радиусом действия.

2. УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА И ФАДДЕЕВА ДЛЯ СИСТЕМЫ ТРЕХ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ЧАСТИЦ

Рассмотрим систему трех тождественных частиц с парными взаимодействиями, описываемыми потенциалом V. Будем использовать систему единиц, в которой $m = \hbar = 1$ / m - масса частицы/ и введем в системе центра масс координаты Якоби:

$$\vec{r}_\alpha = \vec{R}_\beta - \vec{R}_\gamma, \quad \vec{\rho}_\alpha = -\vec{R}_\alpha + \frac{1}{2}(\vec{R}_\beta + \vec{R}_\gamma), \qquad /1/$$

а также сопряженные им импульсы:

$$\vec{k}_\alpha = \frac{1}{2}(\vec{p}_\beta - \vec{p}_\gamma), \quad \vec{q}_\alpha = -\frac{2}{3}\vec{p}_\alpha + \frac{1}{3}(\vec{p}_\beta + \vec{p}_\gamma), \qquad /2/$$

где $\vec{R}_\alpha$, $\vec{p}_\alpha$ / α =1,2,3/ - соответственно радиус-вектор и импульс частицы α, $\alpha \neq \beta \neq \gamma$, $(\alpha\beta\gamma)$ - цикл, т.е. циклическая перестановка индексов 1,2,3. Два других набора координат Якоби получаются из /1/ с помощью операторов циклических перестановок[9] $P_{\alpha\beta\gamma}$ и $P_{\alpha\gamma\beta}$:

$$\vec{r}_\beta = P_{\alpha\beta\gamma}\vec{r}_\alpha = -\frac{1}{2}\vec{r}_\alpha + \vec{\rho}_\alpha; \qquad \vec{r}_\gamma = P_{\alpha\gamma\beta}\vec{r}_\alpha = -\frac{1}{2}\vec{r}_\alpha - \vec{\rho}_\alpha; \qquad /1a/$$

$$\vec{\rho}_\beta = P_{\alpha\beta\gamma}\vec{\rho}_\alpha = -\frac{3}{4}\vec{r}_\alpha - \frac{1}{2}\vec{\rho}_\alpha; \qquad \vec{\rho}_\gamma = P_{\alpha\gamma\beta}\vec{\rho}_\alpha = \frac{3}{4}\vec{r}_\alpha - \frac{1}{2}\vec{\rho}_\alpha;$$

и аналогично для импульсов из /2/ следует:

$$\vec{k}_\beta = P_{\alpha\beta\gamma}\vec{k}_\alpha = -\frac{1}{2}\vec{k}_\alpha + \frac{3}{4}\vec{q}_\alpha; \qquad \vec{k}_\gamma = P_{\alpha\gamma\beta}\vec{k}_\alpha = -\frac{1}{2}\vec{k}_\alpha - \frac{3}{4}\vec{q}_\alpha; \qquad /2a/$$

$$\vec{q}_\beta = P_{\alpha\beta\gamma}\vec{q}_\alpha = -\vec{k}_\alpha - \frac{1}{2}\vec{q}_\alpha; \qquad \vec{q}_\gamma = P_{\alpha\gamma\beta}\vec{q}_\alpha = \vec{k}_\alpha - \frac{1}{2}\vec{q}_\alpha.$$

Соотношения /1a/ и /2a/ приводят к тому, что наряду с элементами объемов $d\vec{r}_\alpha d\vec{\rho}_\alpha$, $d\vec{k}_\alpha d\vec{q}_\alpha$ и выражением $\vec{k}_\alpha\vec{r}_\alpha + \vec{q}_\alpha\vec{\rho}_\alpha$ инвариантны /не зависят от индекса α / также шестимерный радиус R и шестимерный импульс Q:

$$R^2 = r_\alpha^2 + \frac{4}{3}\rho_\alpha^2, \qquad /3/$$

$$Q^2 = k_\alpha^2 + \frac{3}{4}q_\alpha^2. \qquad /4/$$

Для канала α / α =1,2,3/ определим базисные состояния:

$$|\alpha\vec{k}\vec{q}\rangle = |\vec{k}_\alpha\vec{q}_\alpha\rangle, \qquad |\alpha\vec{r}\vec{\rho}\rangle = |\vec{r}_\alpha\vec{\rho}_\alpha\rangle, \qquad /5/$$

$$\langle\alpha'\vec{r}\vec{\rho}|\alpha\vec{k}\vec{q}\rangle = \langle\alpha\vec{k}\vec{q}|\alpha'\vec{r}\vec{\rho}\rangle^* = \delta_{\alpha'\alpha}\, e^{i\vec{k}_\alpha\vec{r}_\alpha + i\vec{q}_\alpha\vec{\rho}_\alpha}, \qquad /6/$$

удовлетворяющие условиям ортогональности и полноты:

$$\langle\alpha'\vec{k}'\vec{q}'|\alpha\vec{k}\vec{q}\rangle = (2\pi)^6\,\delta_{\alpha'\alpha}\delta(\vec{k}'-\vec{k})\,\delta(\vec{q}'-\vec{q}), \qquad /7/$$

$$\sum_\alpha \int |\alpha\vec{k}\vec{q}\rangle \frac{d\vec{k}\,d\vec{q}}{(2\pi)^6}\langle\alpha\vec{k}\vec{q}| = \sum_\alpha \int |\vec{k}_\alpha\vec{q}_\alpha\rangle \frac{d\vec{k}_\alpha\,d\vec{q}_\alpha}{(2\pi)^6}\langle\vec{k}_\alpha\vec{q}_\alpha| = 1, \qquad /8/$$

$$\sum_\alpha \int |\alpha\vec{r}\vec{\rho}\rangle d\vec{r}\,d\vec{\rho}\langle\alpha\vec{r}\vec{\rho}| = \sum_\alpha \int |\vec{r}_\alpha\vec{\rho}_\alpha\rangle d\vec{r}_\alpha d\vec{\rho}_\alpha\langle\vec{r}_\alpha\vec{\rho}_\alpha| = 1. \qquad /9/$$

Свободная трехчастичная функция Грина $\mathcal{G}_0(Z)$ / Z - энергия/ в пространстве базисных функций /5/-/7/ будет иметь вид:

$$\langle\alpha'\vec{k}'\vec{q}'|\mathcal{G}_0(Z)|\alpha\vec{k}\vec{q}\rangle = (2\pi)^6\,\frac{\delta_{\alpha'\alpha}\delta(\vec{k}'-\vec{k})\,\delta(\vec{q}'-\vec{q})}{k^2 + \frac{3}{4}q^2 - Z} \qquad /10/$$

Аналогично в базисе /5/-/7/ определим внемассовые двухчастичные t -матрицу и волновую функцию $\psi_2(Z)$, связанные с потенциалом V_α * в канале α:

---

* Для тождественных частиц V_α не зависит от индекса α $(V_\alpha = V)$.

$$<\alpha'\vec{k}'\vec{q}'|t(Z)\,\alpha\vec{k}\vec{q}> = (2\pi)^3\delta_{\alpha'\alpha}\delta(\vec{q}'-\vec{q})<\vec{k}'|t(Z_q)|\vec{k}>, \qquad /11/$$

$$<\alpha'\vec{k}'\vec{q}'|\psi_2(Z)|\alpha\vec{k}\vec{q}> = (2\pi)^3\delta_{\alpha'\alpha}\,\delta(\vec{q}'-\vec{q})<\vec{k}'|\psi_2(Z_q)|\vec{k}>, \qquad /12/$$

где

$$Z_q = Z - \frac{3}{4}q^2, \qquad /12a/$$

$<k'|t(Z)|k>$ - парная t -матрица в двухчастичном базисе $|\vec{k}>$, $<\vec{k}'|\psi_2(Z)|\vec{k}>$ - фурье-компонента внемассовой двухчастичной функции $<\vec{r}|\psi_2(Z)|\vec{k}>$, подробно рассмотренные в работе [8]. Для $t(Z)$ и $\psi_2(Z)$, согласно /11/ и /12/, будет иметь место такое же соотношение, как и для двухчастичного базиса [10,11] /см. также формулу /9/ работы [8]/:

$$\psi_2(Z) = 1 - \mathcal{G}_0(Z)\,t(Z). \qquad /13/$$

Определим далее оператор S с нулевыми диагональными элементами:

$$<\alpha\vec{r}\vec{\rho}|S|\alpha'\vec{r}'\vec{\rho}'> = <\alpha|S|\alpha'>\delta(\vec{r}_\alpha - \vec{r}'_{\alpha'})\,\delta(\vec{\rho}_\alpha - \vec{\rho}'_{\alpha'}). \qquad /14/$$

$$<\alpha|S|\alpha'> = P_{\alpha\alpha'\alpha''}, \quad \alpha \neq \alpha' \neq \alpha'', \ (\alpha\alpha'\alpha'') - \text{цикл}. \qquad /15/$$

Из /14/ и /15/ и из свойств циклических перестановок [9] следует, что вещественный оператор S обладает свойством *

$$(1+S)^2 = 3(1+S). \qquad 16/$$

Полная волновая функция системы трех тождественных бозонов Ψ симметрична относительно перестановок любых пар частиц и следующим образом выражается через функцию канала ψ:

* Оператор S отличается только знаком от рассматриваемого в работе [6] соответствующего оператора I.

$$\Psi = (1+S)\psi, \qquad /17/$$

или, более детально, с учетом /14/, /15/:

$$<\alpha\vec{r}\rho|\Psi> = <\vec{r}_\alpha\vec{\rho}_\alpha|\Psi> = <\vec{r}_\alpha\vec{\rho}_\alpha|(1+S)|\psi> = \sum_\beta <\vec{r}_\beta\vec{\rho}_\beta|\psi>, \qquad /18/$$

причем из условия симметрии Ψ и из /1/ и /1a/ следует:

$$<\vec{r}\vec{\rho}|\Psi> = <-\vec{r}\vec{\rho}|\Psi>, \qquad <\vec{r}\vec{\rho}|\psi> = <-\vec{r}\vec{\rho}|\psi>. \qquad /19/$$

Уравнение Шредингера для полной волновой функции Ψ будет иметь вид:

$$[H_0 - Z + (1+S)V]\Psi = 0, \qquad /20/$$

где H_0 - свободный гамильтониан трех частиц в системе центра масс, связанный с функцией Грина $\mathcal{G}_0(Z)$ соотношением

$$\mathcal{G}_0(Z) = (H_0 - Z)^{-1}, \qquad /21/$$

V - оператор парного потенциала:

$$<\alpha\vec{r}\vec{\rho}|V|\alpha'\vec{r}'\vec{\rho}'> = \delta_{\alpha\alpha'}\,\delta(\vec{\rho}_\alpha - \vec{\rho}'_{\alpha'})<\vec{r}_\alpha|V|\vec{r}'_{\alpha'}>. \qquad /22/$$

Исключая мало интересный для ядерной физики случай трех свободных частиц в начальном состоянии, из /17/, /20/ и /21/ будем иметь следующее выражение для функции канала ψ:

$$\psi = -\mathcal{G}_0(Z)V\Psi. \qquad /23/$$

Используя далее уравнения для двухчастичной t -матрицы [10,11] /соответственно /5/, /6/ из [8]/, из /23/ и /17/ легко получить известное уравнение Фаддеева

$$\psi = \chi - \mathcal{G}_0(Z)\,t(Z)\,S\psi \qquad /24/$$

с двухчастичной t -матрицей, определяемой выражением /11/. В /24/ для связанного состояния $\chi=0$, а для рассеяния одной частицы на связанном состоянии двух других χ будет иметь вид

$$\langle \alpha \vec{r} \vec{\rho} | \chi | \vec{q}_0 \rangle = \phi_d(\vec{r}_\alpha) e^{i\vec{q}_0 \vec{\rho}_\alpha} , \qquad /25/$$

где $\phi_d(\vec{r}_\alpha)$ - волновая функция связанного состояния частиц β и γ, $\vec{q}_0$ - импульс падающей частицы α $(\alpha \neq \beta \neq \gamma)$. Из соотношения /21/ и выражений /17/ и /23/ следует также уравнение Фаддеева [12] для функции канала ψ, содержащее в явном виде потенциал взаимодействия V:

$$(H_0 - Z + V)\psi = -VS\psi . \qquad /26/$$

Подстановка соотношения /13/ в уравнение /24/ и использование /17/ приводит к существенному для дальнейшего соотношению:

$$\Psi = \chi + \psi_2(Z) S \psi = \chi + \psi_2(Z)(\Psi - \psi) , \qquad /27/$$

которое связывает зависимость полной волновой функции Ψ от координаты $\vec{r}$ с зависимостью от $\vec{r}$ внемассовой двухчастичной волновой функции. В частности, для модели ГУ из /27/ следует, что полная функция Ψ будет удовлетворять тем же граничным условиям, что и двухчастичная функция ψ_2, причем эти граничные условия являются следствием характера двухчастичных взаимодействий. Это обстоятельство было использовано в работах [1-3] для получения одномерных трехчастичных уравнений в модели ГУ. Заметим, что соотношение /27/ является, по сути дела, уравнением для функции канала ψ, полученным в работе [13] и использованным в работе [7]. Действительно, представим двухчастичную внемассовую функцию $\psi_2(Z)|\vec{k}\rangle$ в виде

$$\psi_2(Z)|\vec{k}\rangle = \omega(Z)|\vec{k}\rangle + |\vec{k}\rangle , \qquad /28/$$

где $\omega(Z)$ будет удовлетворять уравнению, вытекающему из уравнения для $\psi_2(Z)$:

$$\omega(Z) = -\mathcal{G}_0(Z)V - \mathcal{G}_0(Z)V\omega(Z) .$$

Если по аналогии с /12/ для базиса /5/-/7/ определить

$$\langle \alpha' \vec{k}' \vec{q}' | \omega(Z) | \alpha \vec{k} \vec{q} \rangle = (2\pi)^3 \delta_{\alpha\alpha'} \delta(\vec{q}' - \vec{q}) \langle \vec{k}' | \omega(Z_q) | \vec{k} \rangle , \qquad /29/$$

то будем иметь:

$$\psi_2(Z) = \omega(Z) + 1 , \qquad /30/$$

а из /27/, /30/ и /17/ следует

$$\psi = \chi + \omega(Z) S \psi , \qquad /31/$$

что совпадает при учете /29/ с уравнением работы [13].

Для дальнейшего нам потребуются уравнения Шредингера /20/ и Фаддеева /26/ соответственно для фурье-компонент по переменной $\vec{\rho}$ функций Ψ и ψ. Эти уравнения в смешанном представлении $\vec{r}$, $\vec{q}$ будут иметь вид:

$$(\nabla^2_{\vec{r}} + Z_q)\langle \vec{r}\vec{q} | \Psi | \vec{q}_0 \rangle - \langle \vec{r}\vec{q} | V\Psi | \vec{q}_0 \rangle = \langle \vec{r}\vec{q} | SV\Psi | \vec{q}_0 \rangle , \qquad /32/$$

$$(\nabla^2_{\vec{r}} + Z_q)\langle \vec{r}\vec{q} | \psi | \vec{q}_0 \rangle - \langle \vec{r}\vec{q} | V\psi | \vec{q}_0 \rangle = \langle \vec{r}\vec{q} | VS\psi | \vec{q}_0 \rangle , \qquad /33/$$

где согласно /12а/

$$Z_q = Z - \frac{3}{4}q^2 = -\kappa^2 + \frac{3}{4}q_0^2 - \frac{3}{4}q^2 + i0 , \qquad /33а/$$

κ^2 - энергия связи двух частиц. Запишем также явным образом в смешанном представлении $\vec{r}$, $\vec{q}$ с учетом /12/ условие /27/:

$$\langle \vec{r}\vec{q} | \Psi | \vec{q}_0 \rangle = \langle \vec{r}\vec{q} | \chi | \vec{q}_0 \rangle + \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \langle \vec{r} | \psi_2(Z_q) \vec{k} \rangle [\langle \vec{k}\vec{q} | \Psi | \vec{q}_0 \rangle - \langle \vec{k}\vec{q} | \psi | \vec{q}_0 \rangle] , \qquad /34/$$

где функция канала $\langle \vec{k}\vec{q} | \psi | \vec{q}_0 \rangle$ в соответствии с /10/, /22/ и /23/ имеет вид:

$$\langle \vec{k}\vec{q} | \psi | \vec{q}_0 \rangle = -\frac{1}{k^2 - Z_q} \int d\vec{r}\, d\vec{\rho}\, d\vec{r}' e^{-i\vec{k}\vec{r} - i\vec{q}\vec{\rho}} \times \langle \vec{r} | V | \vec{r}' \rangle \langle \vec{r}' \vec{\rho} | \Psi | \vec{q}_0 \rangle . \qquad /34а/$$

3. УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА И ФАДДЕЕВА ДЛЯ ПАРЦИАЛЬНЫХ КОМПОНЕНТ В СЛУЧАЕ ПОТЕНЦИАЛА КОНЕЧНОГО РАДИУСА

Разложим функции Ψ и ψ по парциальным компонентам. Для этого введем в $\vec{r}$- и $\vec{p}$ -представлениях угловые функции с моментом ℓ и его проекцией m:

$$<\hat{\vec{r}}\,|\,\ell m> \;=\; i^{\ell}\,Y_{\ell_m}(\hat{\vec{r}})\,, \qquad <\hat{\vec{p}}\,|\,\ell m> \;=\; Y_{\ell_m}(\hat{\vec{p}})\,, \qquad /35/$$

где $\hat{\vec{r}}, \hat{\vec{p}}$ - соответственно единичные векторы в направлениях $\vec{r}$ и $\vec{p}$ и определим состояние с полным моментом L и соответствующей проекцией M:

$$|\,\ell\lambda LM> \;=\; \sum_{m\mu} (\ell\lambda m\mu\,|\,LM)\,|\,\ell m>|\,\lambda\mu>. \qquad /36/$$

Предположим далее, что имеется только одно связанное состояние двух частиц с угловым моментом, равным нулю. Тогда из /25/ следует

$$<\vec{r}\vec{\rho}\,|\chi|\,\vec{q}_0> \;=\; \sum_{LM\ell\lambda} <\hat{\vec{r}}\hat{\vec{\rho}}\,|\,\ell\lambda LM><r\rho\,|\,\chi^{(L)}_{\ell\lambda}\,|\,q_0><LM\,|\,\hat{\vec{q}}_0>, \qquad /37/$$

где
$$<r\rho\,|\,\chi^{(L)}_{\ell\lambda}\,|\,q_0> \;=\; 4\pi\delta_{\ell 0}\,\delta_{\lambda L}\,\phi_d(r)\,j_\lambda(q_0\rho)\,. \qquad /38/$$

В соответствии с /37/ для Ψ и ψ будем иметь разложения по парциальным компонентам:

$$<\vec{r}\vec{\rho}\,|\,\Psi\,|\,\vec{q}_0> \;=\; \sum_{LM\ell\lambda} <\hat{\vec{r}}\hat{\vec{\rho}}\,|\,\ell\lambda LM><r\rho\,|\,\Psi^{(L)}_{\ell\lambda}\,|\,q_0><LM\,|\,\hat{\vec{q}}_0>, \qquad /39/$$

$$<\vec{r}\vec{\rho}\,|\,\psi\,|\,\vec{q}_0> \;=\; \sum_{LM\ell\lambda} <\hat{\vec{r}}\hat{\vec{\rho}}\,|\,\ell\lambda LM><r\rho\,|\,\psi^{(L)}_{\ell\lambda}\,|\,q_0><LM\,|\,\hat{\vec{q}}_0>, \qquad /40/$$

причем, согласно /19/ и /35/-/36/, в разложениях /39/ и /40/ ℓ принимает только четные значения /ℓ =0,2,4, . . ./. В смешанном представлении $\vec{r}, \vec{q}$ разложение χ /25/ будет иметь вид:

$$<\vec{r}\vec{q}\,|\,\chi\,|\,\vec{q}_0> \;=\; 4\pi \sum_{LM\ell\lambda} <\hat{\vec{r}}\hat{\vec{q}}\,|\,\ell\lambda LM><rq\,|\,\chi^{(L)}_{\ell\lambda}\,|\,q_0><LM\,|\,\hat{\vec{q}}_0>, \qquad /41/$$

где

$$<rq\,|\,\chi^{(L)}_{\ell\lambda}\,|\,q_0> = \int_0^\infty \rho^2 d\rho <r\rho\,|\,\chi^{(L)}_{\ell\lambda}\,|\,q_0> j_\lambda(q\rho) = \delta_{\ell 0}\,\delta_{\lambda L}\,\phi_d(r)\,\frac{2\pi^2}{q^2}\,\delta(q-q_0)\,. \qquad /42/$$

Разложения для $<\vec{r}\vec{q}\,|\,\Psi\,|\,\vec{q}_0>$ и $<\vec{r}\vec{q}\,|\,\psi\,|\,\vec{q}_0>$ следуют из /39/ и /40/ и будут иметь вид, аналогичный /41/, соответственно с парциальными компонентами $<rq\,|\,\Psi^{(L)}_{\ell\lambda}\,|\,q_0>$ и $<rq\,|\,\psi^{(L)}_{\ell\lambda}\,|\,q_0>$, определяемыми согласно /42/.

Будем считать далее, что парный потенциал V в /22/ локальный и действует только в двухчастичных состояниях с орбитальными моментами $\ell \le \ell_0$:

$$<\vec{r}\,|\,V\,|\,\vec{r}\,'> \;=\; \sum_{\ell m} <\hat{\vec{r}}\,|\,\ell m><r\,|\,V_\ell\,|\,r'><\ell m\,|\,\hat{\vec{r}}\,'>, \qquad /43/$$

$$<r\,|\,V_\ell\,|\,r'> \;=\; \Lambda_\ell V_\ell(r)\frac{1}{r'^2}\,\delta(r-r')\,, \qquad /44/$$

$$\Lambda_\ell = 1, \quad \ell \le \ell_0\,; \quad \Lambda_\ell = 0, \quad \ell > \ell_0\,. \qquad /45/$$

Функция канала в импульсном представлении будет иметь следующее разложение по состояниям /36/:

$$<\vec{k}\vec{q}\,|\,\psi\,|\,\vec{q}_0> \;=\; (4\pi)^2 \sum_{LM\ell\lambda} <\hat{\vec{k}}\hat{\vec{q}}\,|\,\ell\lambda LM><kq\,|\,\psi^{(L)}_{\ell\lambda}\,|\,q\,><LM\,|\,\hat{\vec{q}}_0>, \qquad /46/$$

причем парциальные компоненты $<kq\,|\,\psi^{(L)}_{\ell\lambda}\,|\,q_0>$ согласно /34а/, /39/, /43/ и /44/ связаны с компонентами полной функции следующим образом:

$$<kq\,|\,\psi^{(L)}_{\ell\lambda}\,|\,q\,> = -\frac{\Lambda_\ell}{k^2 - Z_q}\int_0^\infty r^2\,dr\,j_\ell(kr)\,V_\ell(r)<rq\,|\,\Psi^{(L)}_{\ell\lambda}\,|\,q_0>, \qquad /47/$$

где Λ_ℓ - проекционный оператор /45/.

Соотношение между компонентами $\Psi^{(L)}_{\ell\lambda}$ полной трехчастичной волновой функции и компонентами внемассовой двухчастичной волновой функции следует из /34/ и из разложения

/41/ для χ и аналогичного разложения для Ψ, с использованием разложений вида /46/ для полной функции и функции канала и разложения для двухчастичной внемассовой волновой функции $\langle \vec{r}|\psi_2(Z)|\vec{k}\rangle$ /выражение /15/ из работы[8] /:

$$\langle rq|\Psi^{(L)}_{\ell\lambda}|q_0\rangle = \langle rq|\chi^{(L)}_{\ell\lambda}|q_0\rangle + \qquad /47а/$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty k^2\,dk\,\langle r|\psi^{(2)}_\ell(Z_q)|k\rangle[\langle kq|\Psi^{(L)}_{\ell\lambda}|q_0\rangle - \langle kq|\psi^{(L)}_{\ell\lambda}|q_0\rangle].$$

Уравнение для парциальных компонент $\langle rq|\Psi^{(L)}_{\ell\lambda}|q_0\rangle$ полной волновой функции следует из уравнения Шредингера /32/ с учетом /14/ и /43/-/45/:

$$[\Delta^{(\ell)}_r + Z_q - \Lambda_\ell V_\ell(r)]\langle rq|\Psi^{(L)}_{\ell\lambda}|q_0\rangle = \langle rq|Q^{(L)}_{\ell\lambda}|q_0\rangle, \qquad /48/$$

где $$\Delta^{(\ell)}_r = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}, \qquad /49/$$

$$\langle r_\alpha q|Q^{(L)}_{\ell\lambda}|q_0\rangle = \sum_{\beta\neq\alpha}\sum_{\ell'\lambda'}\int d\Omega_{\vec{r}_\alpha}\,d\vec{\rho}_\alpha\, j_\lambda(q\rho_\alpha)\langle\ell\lambda LM|\hat{\vec{r}}_\alpha\hat{\vec{\rho}}_\alpha\rangle \times$$

$$\times\langle\hat{\vec{r}}_\beta\hat{\vec{\rho}}_\beta|\ell'\lambda'LM\rangle\Lambda_{\ell'}V_{\ell'}(r_\beta)\langle r_\beta\rho_\beta|\Psi^{(L)}_{\ell'\lambda'}|q_0\rangle. \qquad /50/$$

Аналогично из уравнения Фаддеева /33/ для компонент функции канала $\langle rq|\psi^{(L)}_{\ell\lambda}|q_0\rangle$ вытекает следующее уравнение:

$$[\Delta^{(\ell)}_r + Z_q - \Lambda_\ell V_\ell(r)]\langle rq|\psi^{(L)}_{\ell\lambda}|q_0\rangle = \Lambda_\ell V_\ell(r)\langle rq|U^{(L)}_{\ell\lambda}|q_0\rangle, \qquad /51/$$

где $$\langle r_\alpha q|U^{(L)}_{\ell\lambda}|q_0\rangle = \sum_{\beta\neq\alpha}\sum_{\ell'\lambda'}\int d\Omega_{\vec{r}_\alpha}\,d\vec{\rho}_\alpha\, j_\lambda(q\rho_\alpha)\times$$

$$\times\langle\ell\lambda LM|\hat{\vec{r}}_\alpha\hat{\vec{\rho}}_\alpha\rangle\langle\hat{\vec{r}}_\beta\hat{\vec{\rho}}_\beta|\ell'\lambda'LM\rangle\langle r_\beta\rho_\beta|\psi^{(L)}_{\ell'\lambda'}|q_0\rangle. \qquad /52/$$

Заметим, что за исключением тривиального случая /три свободные частицы/ из /45/ и /51/ следует тождественное обращение в нуль парциальных компонент функции канала $\langle rq|\psi^{(L)}_{\ell\lambda}|q_0\rangle$

с $\ell > \ell_0$, в полном соответствии с выражением /47/, тогда как из вида уравнения /48/, а также из /18/ вытекает, что компоненты полной волновой функции $\langle rq|\Psi^{(L)}_{\ell\lambda}|q_0\rangle$ будут отличны от нуля в общем случае для всех значений ℓ, даже при выполнении условия /45/. Это обстоятельство недостаточно четко акцентировано в работе[7], что привело в этой работе к некоторым не совсем обоснованным выводам.

Решения уравнений /48/ и /51/, отличающихся только правыми частями, формально можно записать с помощью функции Грина соответствующего однородного уравнения:

$$\langle rq|\Psi^{(L)}_{\ell\lambda}|q_0\rangle = \langle rq|\chi^{(L)}_{\ell\lambda}|q_0\rangle + \int_0^\infty r'^2 dr'\langle r|\mathcal{G}_\ell(Z_q)|r'\rangle\langle r'q|Q^{(L)}_{\ell\lambda}|q_0\rangle, \qquad /53/$$

$$\langle rq|\psi^{(L)}_{\ell\lambda}|q_0\rangle = \langle rq|\chi^{(L)}_{\ell\lambda}|q_0\rangle + \int_0^\infty r'^2 dr'\langle r|\mathcal{G}_\ell(Z_q)|r'\rangle\Lambda_\ell V_\ell(r')\langle r'q|U^{(L)}_{\ell\lambda}|q_0\rangle, \qquad /54/$$

где $\langle rq|\chi^{(L)}_{\ell\lambda}|q_0\rangle$ определяется выражением /42/ и является решением однородного уравнения /48/ или /51/, удовлетворяющим необходимым граничным условиям. Функция Грина $\mathcal{G}_\ell(Z)$ в /53/ и /54/ имеет вид

$$\langle r|\mathcal{G}_\ell(Z)|r'\rangle = -i\sqrt{Z}\langle r_<|\psi^{(2)}_\ell(Z)|\sqrt{Z}\rangle\langle r_>|\phi_\ell|\sqrt{Z}\rangle, \qquad /55/$$

где $\langle r|\psi^{(2)}_\ell(Z)|\sqrt{Z}\rangle$ - соответствующая потенциалу $V_\ell(r)$ двухчастичная внемассовая волновая функция $\langle r|\psi^{(2)}_\ell(Z)|k\rangle$ при $k=\sqrt{Z}$, регулярная при $r=0$ и при $r\to\infty$ имеющая асимптотику, определяемую выражением /30/ из работы[8], $\langle r|\phi_\ell|\sqrt{Z}\rangle$ - сингулярное при $r=0$ решение однородного уравнения с асимптотикой $\sim h^{(1)}_\ell(r\sqrt{Z})$ / $h^{(1)}_\ell(x)$ - сферическая функция Ганкеля 1-го рода/, $r_<(r_>)$ - меньшее /большее/ значение r и r'.

Для потенциала $V_\ell(r)$ с конечным радиусом действия c_ℓ / $V_\ell(r)=0$ при $r>c_\ell$ / в области $r>c_\ell$ $\langle r|\phi_\ell|\sqrt{Z}\rangle = h^{(1)}_\ell(r\sqrt{Z})$ и в этом случае из явного вида /55/ функции Грина и из /53/ легко получить для произведения $\Lambda_\ell V_\ell(r)\langle rq|\Psi^{(L)}_{\ell\lambda}|q_0\rangle$, необходимого, согласно /47/ и /18/, для определения полной функции Ψ, следующее представление:

$$\Lambda_\ell V_\ell(r)\langle rq|\Psi^{(L)}_{\ell\lambda}|q_0\rangle = \Lambda_\ell V_\ell(r)\langle rq|\chi^{(L)}_{\ell\lambda}|q_0\rangle + \qquad /56/$$

$$+ \Lambda_\ell\theta(c_\ell - r)\langle rq|D^{(L)}_{\ell\lambda}|q_0\rangle - \Lambda_\ell V_\ell(r)\langle r|\psi^{(2)}_\ell(Z_q)|\sqrt{Z_q}\rangle\langle q|Y^{(L)}_{\ell\lambda}|q_0\rangle,$$

где $\theta(x)$ - ступенчатая функция Хевисайда:

$$\theta(x) = 1,\quad x > 0;\quad \theta(x) = 0,\quad x < 0, \qquad /57/$$

$$\Lambda_\ell\langle q|Y^{(L)}_{\ell\lambda}|q_0\rangle = \Lambda_\ell\int_{c_\ell}^{\infty} r^2 dr\, i\sqrt{Z_q}\, h^{(1)}_\ell(r\sqrt{Z_q})\langle rq|Q^{(L)}_{\ell\lambda}|q_0\rangle. \qquad /58/$$

Аналогично из /54/ следует:

$$\langle rq|\psi^{(L)}_{\ell\lambda}|q_0\rangle = \langle rq|\chi^{(L)}_{\ell\lambda}|q_0\rangle + \Lambda_\ell\theta(c_\ell - r)\langle rq|F^{(L)}_{\ell\lambda}|q_0\rangle -$$

$$- \Lambda_\ell\theta(r - c_\ell)\, i\sqrt{Z_q}\, h^{(1)}_\ell(r\sqrt{Z_q})\langle q|X^{(L)}_{\ell\lambda}|q_0\rangle, \qquad /59/$$

где

$$\langle q|X^{(L)}_{\ell\lambda}|q_0\rangle = \int_0^\infty r^2 dr\,\Lambda_\ell V_\ell(r)\langle r|\psi^{(2)}_\ell(Z_q)|\sqrt{Z_q}\rangle\langle rq|U^{(L)}_{\ell\lambda}|q_0\rangle. \qquad /60/$$

Выражение /59/ является известным разбиением функции канала в случае потенциала с конечным радиусом действия на "внутреннюю" и "внешнюю" части /12/. Соотношения /56/ и /59/ совместно с /47а/ могут служить основой для получения одномерных трехчастичных уравнений в модели ГУ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ефимов В.Н. ОИЯИ, Р4-8580, Дубна, 1975.*
2. *Ефимов В.Н. ОИЯИ, Р4-8707, Дубна, 1975.*
3. *Efimov V.N., Schulz H. Nucl. Phys., 1976, A261, p.328.*
4. *Feshbach H., Lomon E.L. Phys. Rev., 1956, 102, p.891.*

5. *Feshbach H., Lomon E.L. Ann.Phys. (N.-Y.), 1964, 29, p.19.*
6. *Brayshaw D.D. Phys. Rev., 1976, C13, p.1835.*
7. *Кузьмичев В.Е., Харченко В.Ф. ТМФ, 1977, 31, с. 75.*
8. *Ефимов В.Н. ОИЯИ, Р4-11770, Дубна, 1978.*
9. *Хамермеш М. Теория групп и ее применение к физическим проблемам. "Мир", М., 1966.*
10. *Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц. "Мир", М.,1969.*
11. *Ситенко А.Г. Теория рассеяния. "Вища школа", Киев, 1975.*
12. *Noyes H.P. Phys. Rev.Lett., 1969, 23, p.1201.*
13. *Kuzmichev V.E., Kharchenko V.F. Preprint ITP-75-109E, Kiev, 1975.*

Рукопись поступила в издательский отдел 14 декабря 1978 года.