

968/2-79

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



19/III-79

Г-376

P4 - 12064

В.П.Герлт

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ
ИНВАРИАНТНОЙ КРИВОЙ УРАВНЕНИЙ ЧУ-ЛОУ

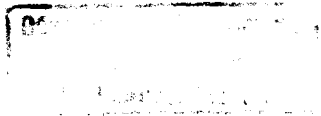
1978

Р4 - 12064

В.П.Гердт

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ
ИНВАРИАНТНОЙ КРИВОЙ УРАВНЕНИЙ ЧУ-ЛОУ**

Направлено в ЖВМ и МФ



Герлт В.П.

P4 - 12064

Аналитическое вычисление инвариантной кривой уравнений Чу-Лоу

Рассмотрена локальная структура однопараметрического семейства инвариантных кривых уравнений Чу-Лоу, представленного сходящимся степенным рядом. Коэффициенты этого ряда $\beta_i(C)$ полиномиально зависят от параметра семейства C . Переход к общему решению уравнений Чу-Лоу осуществляется путем замены параметра C на произвольную четную, вещественную мероморфную функцию $C(w)$, такую, что $C(w+1) = -C(w)$. Разработана процедура вычисления коэффициентов $\beta_i(C)$, основанная на решении нелинейного функционального уравнения, вытекающего из уравнений Чу-Лоу. Первые двенадцать коэффициентов $\beta_i(C)$ вычислены аналитически на ЭВМ с использованием программной системы SCHOONSCHIP.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Gerdt V.P.

P4 - 12064

Analytical Calculation of an Invariant Curve for Chew-Low Equation

The local structure of the one-parameter set of invariant curves for Chew-Low equations having the form of the convergent series is considered. Coefficients of this series $\beta_i(C)$ are polynomials in set parameter C . The transition to the general solution of Chew-Low equations is carried out by replacing the parameter C by arbitrary even, real, meromorphic function $C(w)$ with the property $C(w+1) = -C(w)$. The procedure for calculation of coefficients $\beta_i(C)$, which is based on the solution of nonlinear functional equation, following from Chew-Low equations, is developed. First twelve coefficients $\beta_i(C)$ are calculated analytically by computer, using algebraic system SCHOONSCHIP.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research.

Dubna 1978

I. Введение

Предложенные более двадцати лет назад^{/1/}, уравнения Чу-Лоу для p -волнового πN -рассеяния являются наиболее ярким примером статической дисперсионной модели^{/2/}. Многолетний интерес к модели Чу-Лоу обусловлен одновременным учётом в ней таких фундаментальных принципов, как аналитичность, унитарность и кроссинг-симметрия. Это привлекательное свойство модели служит, однако, источником очень серьёзных математических трудностей, главной причиной которых является нелинейный характер условия унитарности. Достаточно сказать, что лишь в последние годы удалось доказать существование и единственность физически интересных решений, а также наметить пути их построения^{/3-5/}.

Было, в частности, показано^{/4/}, что общее решение уравнений Чу-Лоу зависит от трёх произвольных функций. Наличие двух из них — хорошо известный D -и β -производ^{/3/} является прямым следствием инвариантности уравнений относительно замены $S_i(w) \rightarrow D(w)S_i(w + \beta(w))$. Зависимость же от третьей произвольной функции нетривиальна и определяется структурой коэффициентов сходящегося степенного ряда

$$y = x^2 + Cx^4 + \sum_{i=3}^{\infty} \beta_i(C)x^{2i}, \quad (I)$$

представляющего собой семейство инвариантных кривых параболического типа, впервые рассмотренное в работе^{/6/}.

К сожалению, вычисление коэффициентов $\beta_i(C)$ сопряжено с громоздкими аналитическими выкладками, объём которых быстро растёт с ростом i . Ранее предложенный метод^{/4/} требовал построения вспомо-

гательного дифференциального уравнения, интеграл которого есть ряд (I) с постоянным c .

В настоящей работе мы рассмотрим другой подход к вычислению коэффициентов ряда (I), основанный на решении нелинейного функционального уравнения и позволяющий применить такой мощный инструмент, как программные системы для аналитических вычислений на ЭВМ^{7/8/} и, в частности, система SCHOONSCHIP^{8/}.

2. Динамическая форма уравнений Чу-Лоу

Уравнения Чу-Лоу в их динамической форме^{3/} представляют собой систему нелинейных разностных уравнений следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} x' &= F(x, y) ; F(x, y) = \frac{x+2x^2-xy-2y^2}{1+3x+3y-2x^2-3xy-2y^2} ; \\ y' &= -F(y, x) ; x(w) = -x(-w) ; y(w) = y(-w) ; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$zz'(1-2y+x)(1-2y'-x')=1 ; z(w)=z(-w) , \quad (3)$$

где

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x(w) , y_i = y(w) , z_i = z(w) \\ x_i &= x(w+1) , y_i = y(w+1) , z_i = z(w+1) \end{aligned} \right\} \text{ причём } x(w), y(w), z(w) \text{ - мероморфные функции и} \\ x^*(w) = x(w^*) , y^*(w) = y(w^*) , z^*(w) = z(w^*) \quad (4)$$

Переменная w является функцией энергии ν рассеиваемой частицы- π -мезона (в ед. его массы)

$$w = \frac{1}{\pi} \arcsin \nu ,$$

а величины x, y, z связаны с матричными элементами статической S -матрицы для трёх каналов p -волнового πN -рассеяния соотношениями

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= z(1+4y-4x) , \\ S_2 &= z(1-2y-x) , \\ S_3 &= z(1+y+2x) . \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

В дополнение к уравнениям (2) - (4) физически интересные решения должны удовлетворять локальным условиям на матричные элементы S -матрицы^{3-4/}:

$$S_i(w) = 1 + O((w-1/2)^3) ; \quad (6.1)$$

$$\left. \begin{aligned} S_i(w) &\text{ имеют в нуле полюс первого порядка} \\ \text{Res } S_i(0) &\sim \lambda_i \text{ с } \lambda = (-4, -1, 2) ; \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

$$\lim_{|w| \rightarrow \infty} |w^{-N} S_i(w)| < \infty \quad (6.3)$$

$$|w| \rightarrow \infty \quad \text{Res} = \text{Const.}$$

Локальные условия (6) обеспечивают правильное пороговое поведение p -волн, наличие борновского полюса и возможность перехода к интегральной форме уравнений Чу-Лоу^{1/}.

Уравнения (2)-(4) автономны, т.е. не содержат переменную w в явном виде. Другая их особенность состоит в зависимости от функции z через множитель $z(w)z(w+1)$.

Отсюда следует, что замена

$$x(w) \rightarrow x(w + \beta(w)), y(w) \rightarrow y(w + \beta(w)), z(w) \rightarrow D(w)z(w + \beta(w))$$

переводит решение в решение, если функции D и β мероморфны и обладают свойствами

$$\left. \begin{aligned} D(w)D(w+1) &= 1, D(w) = D(-w), D^*(w) = D(w^*), \\ \beta(w) &= \beta(w+1), \beta(w) = -\beta(-w), \beta^*(w) = \beta(w^*). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Однако, как уже отмечалось выше, функциональный производол, допускаемый уравнениями (2)-(4), не исчерпывается функциями (7). Зависимость от третьей произвольной мероморфной функции $C(w)$, удовлетворяющей условиям^{4/}

$$C(w) = -C(w+1), C(w) = C(-w), C^*(w) = C(w^*), \quad (8)$$

требует детального количественного анализа уравнений (2), рассмотренного ниже.

3. Функциональное уравнение для инвариантной кривой

Уравнения (2)-(3), рассматриваемые как преобразование фазового пространства x, y, z

$$(x, y, z) \rightarrow (x', y', z'), \quad (9)$$

имеют шесть различных точек покоя. Самой важной из них является точка с координатами

$$x=y=0, z=1,$$

которая в силу соотношений (5) соответствует порогу изучаемой реакции ($S_i=1$). Следовательно, в эту точку обязаны входить решения, обладающие правильным пороговым поведением (6.1).

Множество точек фазового пространства, инвариантное относительно преобразования (9), образует поверхность вида^{9/}

$$z = \phi(x^2, y) \quad (10)$$

Функция ϕ представляется степенным рядом

$$\phi(x^2, y) = 1 + 2x^2 + 2y^2 - 8x^2y - \frac{4}{3}y^3 + 9x^4 + 12x^2y^2 + 3y^4 + \dots,$$

сходящимся в окрестности точки $x=y=0$.

Движение по поверхности (10) задаётся уравнениями (2). Последние полностью независимы от уравнения (3) и согласно (4) при вещественном ω определяют преобразование вещественной фазовой плоскости x, y :

$$(x', y') = T(x, y). \quad (11)$$

Тщательное исследование свойств преобразования (11) показало следующее^{4,6}. Преобразование T обратимо. Более того, с чётными степенями преобразования T можно связать абелеву однопараметрическую группу непрерывных преобразований G

$$g(\alpha) \in G, \quad g(\alpha) = g^{-1}(-\alpha),$$

такую, что

$$g(2k) = T^{2k}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Здесь T^0 означает тождественное преобразование.

Кривые, инвариантные относительно преобразований группы G и, следовательно, чётных степеней преобразования (11), — инвариантные кривые — в окрестности начала координат $x=y=0$ разбиваются на два типа (Рис.1). К первому относятся кривые гиперболического типа, не проходящие через начало координат. Ко второму относятся кривые параболического типа, которые проходят через начало координат и, как мы видели, содержат информацию о физически интересных решениях. Кроме того, точка, соответствующая борновскому полюсу (6.2), после нескольких итераций по формуле (11) также попадает в параболический сектор. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением инвариантных кривых параболического типа, которые образуют однопараметрическое семейство⁴

$$y = f(x, c). \quad (12)$$

Функция f чётна по x

$$f(x, c) = f(-x, c)$$

и разлагается в ряд (1) при достаточно малых x

$$f(x, c) = \sum_{i \geq 1} \beta_i(c) x^{2i}, \quad (13)$$

где $\beta_1 = 1, \beta_2 = c$ а остальные β_i являются полиномами по c .

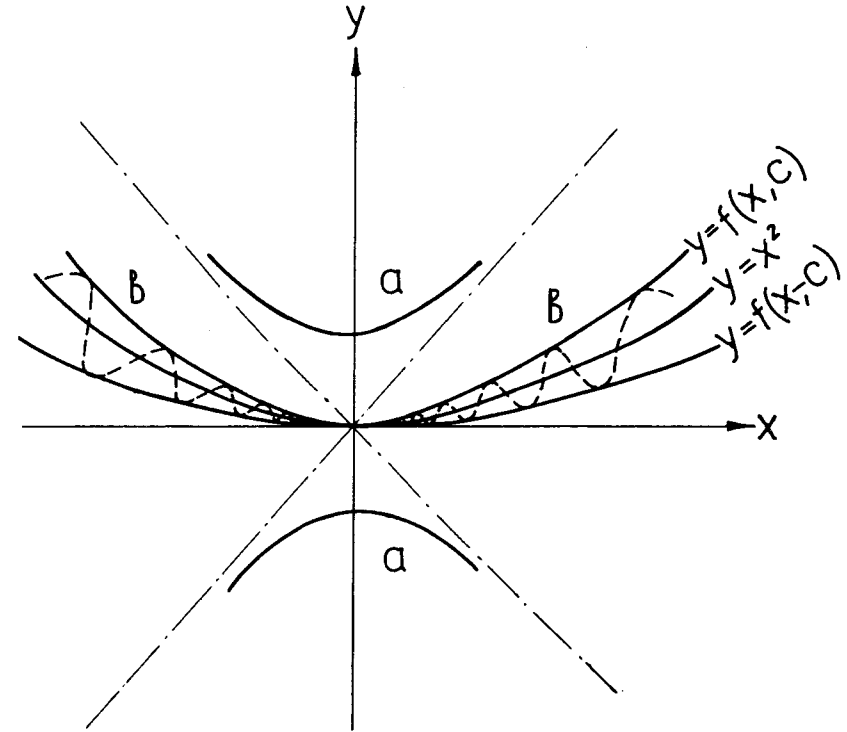


Рис.1. Окрестность точки покоя $x=y=0$;
 а — инвариантные кривые гиперболического
 и б — параболического типа.

Будучи инвариантной под действием чётных степеней преобразования (II), заданная кривая $f(x, c)$ из семейства (I2) при нечётных степенях преобразования (II) переходит в другую кривую $f(x, c')$ того же семейства, причём

$$c' = -c.$$

Такое свойство преобразования (II) позволяет утверждать^{/4/}, что кривая (I2) является решением разностных уравнений (2)-(4), если под c понимать функцию переменной w , удовлетворяющую условиям (8).

Следовательно, подставляя (I2) в (II), найдём

$$(x', f(x', -c)) = T(x, f(x, c)),$$

откуда с учётом структуры (2) преобразования T получим интересное нас функциональное уравнение для инвариантной кривой (I2):

$$-F(f(x, c), c) = f(F(x, f(x, c)), -c). \quad (I4)$$

4. Решение функционального уравнения

Обозначим через $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ соответственно числитель и знаменатель преобразования (2), т.е.

$$\begin{aligned} P(x, y) &= x + 2x^2 - xy - 2y^2, \\ Q(x, y) &= 1 + 3x + 3y - 2x^2 - 3xy - 2y^2. \end{aligned} \quad (I5)$$

Тогда функциональное уравнение (I4) принимает вид

$$\frac{-P(f(x, c), x)}{Q(f(x, c), x)} = \sum_{i=1}^N \beta_i(-c) \left[\frac{P(x, f(x, c))}{Q(x, f(x, c))} \right]^{2i}. \quad (I6)$$

Покажем, что уравнение (I6) позволяет для $N > 2$ выразить $\beta_N(c)$ через $\beta_i(c)$ с $i=1, 2, \dots, N-1$. Для этого, учитывая, что из соотношений (I5) следует

$$\begin{aligned} P^{2i}(x, f(x, c)) &= x^{2i} + o(x^{2i+1}), \\ Q(x, f(x, c)) &= Q(f(x, c), x), \end{aligned}$$

приведём уравнение (I6) к равенству

$$\begin{aligned} P(f(x, c, N), x) Q^{2N-1}(x, f(x, c, N)) + \\ + \sum_{i=1}^N \beta_i(-c) P^{2i}(x, f(x, c, N)) Q^{2N-2i}(x, f(x, c, N)) + o(x^{2N+2}) = 0, \end{aligned} \quad (I7)$$

где

$$f(x, c, N) = \sum_{i=1}^N \beta_i(c) x^{2i}.$$

Левая часть равенства (I7) представляет собой полином по переменной x , коэффициенты которого линейно зависят от $\beta_1(-c)$ и полиномиально от $\beta_i(c)$. Приравнявая в (I7) коэффициенты при x^{2N} и x^{2N+1} к нулю и используя выражения (I5), для функций p и q получим соотношения вида

$$\begin{aligned} \beta_N(c) + \beta_N(-c) &= \varphi_N(c), \\ (6N-4)\beta_N(c) + 4N\beta_N(-c) &= \psi_N(c), \end{aligned} \quad (I8)$$

в которых

$$\begin{aligned} \varphi_N(c) &= \varphi_{N,0} + \sum_{i=1}^{N-1} \beta_i(-c) \varphi_{N,i}, \\ \psi_N(c) &= \psi_{N,0} + \sum_{i=1}^{N-1} \beta_i(-c) \psi_{N,i}, \end{aligned}$$

а величины $\varphi_{N,i}$ и $\psi_{N,i}$ ($i=0, 1, \dots, N-1$) являются полиномами по $\beta_j(c)$ ($j=1, 2, \dots, N-1$). Следовательно, функции $\varphi_N(c)$ и $\psi_N(c)$ есть полиномы по переменной c .

Равенства (I8) можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений на $\beta_N(c)$ и $\beta_N(-c)$, определитель которой

$$\Delta = 4 - 2N$$

отличен от нуля при $N \neq 2$. Функции φ_N и ψ_N для $N=1, 2$, которые легко вычисляются вручную, не зависят от c и равны

$$\begin{aligned} \varphi_1(c) &= -2, \quad \psi_1(c) = -6, \\ \varphi_2(c) &= \psi_2(c) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что $\beta_1(c)=1, \beta_2(c)$ является, по-существу, произвольной нечётной функцией, которую в разложении (I), пользуясь возможностью переопределения c

$$c \rightarrow \tilde{c} = \beta_2(c)$$

мы с самого начала взяли равной $\beta_2(c)=c$, а остальные функции $\beta_i(c)$ однозначно выражаются через $\beta_j(c)$ ($j < i$) и являются полиномами по c .

Этот вывод полностью согласуется с результатами исследования в другом подходе^{/4/} и позволяет применить соотношения (I7)-(I8) для последовательного вычисления полиномов $\beta_i(c)$.

Однако, как уже отмечалось во введении, объём аналитических выкладок, необходимых для вычисления $\beta_i(c)$, быстро возрастает с ростом i . С другой стороны, для извлечения функций $\varphi_N(c)$ и $\psi_N(c)$ из выражения (I7) и последующего решения уравнений (I8) требуются лишь полиномиальные операции. Поэтому все необходимые выкладки могут быть выполнены на ЭВМ с помощью программных систем для

аналитических вычислений^{/7/}. В каждую такую систему встроены целый ряд математических операций и, в частности, полиномиальная алгебра.

В настоящей работе использована система SCHOONSCHIP^{/8/}, реализованная в ОИИИ на ЭВМ СДС-6500 и являющаяся одной из самых быстродействующих систем для аналитических вычислений. Написанная на языке SCHOONSCHIP программа, в соответствии со сказанным выше, позволяет вычислять $\beta_i(c)$, начиная с $i=3$ по заданным $\beta_1(c), \dots, \beta_{i-1}(c)$.

Результаты вычисления полиномов $\beta_i(c)$ вплоть до $i=12$ содержатся в табл. I. Тот факт, что в выбранном нами случае ($\beta_2(c)=c$) коэффициенты полиномов $\beta_i(c)$ являются рациональными числами, вытекает из соотношений (I5), (I7)-(I8) и легко доказывается по индукции. С целью дать представление об объёме выкладок заметим, что вычисление $\beta_{12}(c)$ требует 55 минут счётного времени на СДС-6500, в то время как промежуточные выражения содержат до 52 000 слагаемых.

5. Заключительные замечания.

Итак, в результате построения функционального уравнения (I4) и последующего его решения с помощью системы SCHOONSCHIP получена детальная информация (табл. I) о структуре инвариантной кривой (I2)-(I3) уравнений Чу-Лоу в окрестности точки $x=y=0$. Тем самым найден локальный вид "первого интеграла" разностных уравнений (2), который получается заменой в выражениях (I2)-(I3) постоянной c на произвольную функцию $c(w)$ со свойствами (8).

К сожалению, из локальных требований (6) не удаётся извлечь каких-либо дополнительных ограничений на функцию $c(w)$. В самом деле, условие (6.I) фиксирует поведение $s_i(w)$ при подходе к упорному порогу ($s_i=1$), т.е. в пределе $x \rightarrow 0$. Но в этом пределе лидирующий член разложения (I) не зависит от функции $c(w)$. Аналогичная ситуация имеет место^{/4/} и в пределе $w \rightarrow \infty$, для которого сформулировано асимптотическое требование (6.3).

Что касается условия существования борновского полюса (6.2), то оно должно фиксировать значение функции $c(w)$ в точке $w=0$, а потому, в силу (8), и для всех целых значений переменной w . Выше уже отмечалось, что последовательными итерациями по формулам (2)

Таблица I. Коэффициенты степенного ряда (I) для инвариантной кривой уравнений Чу-Лоу.

i	$\beta_i(c)$
I	I
2	c
3	0
4	$-\frac{15}{2}c^2$
5	$-11c^2 - \frac{4}{3}c^3$
6	$-\frac{67}{4}c^2 + \frac{99}{12}c^3$
7	$-9c^2 + \frac{125}{5}c^3 + 36c^4$
8	$-\frac{277}{2}c^2 + \frac{7175}{12}c^3 - \frac{8143}{8}c^4 + 4c^5$
9	$1793c^2 + \frac{147919}{210}c^3 - \frac{20137}{4}c^4 - \frac{16460}{21}c^5$
10	$-\frac{310107}{8}c^2 + \frac{93009}{16}c^3 - \frac{1053917}{80}c^4 + \frac{3079733}{240}c^5 - \frac{572}{3}c^6$
11	$1067395c^2 - \frac{2130727}{30}c^3 - \frac{7229893}{70}c^4 +$ $+\frac{2886419}{30}c^5 + \frac{987569}{63}c^6 - \frac{416}{27}c^7$
12	$-\frac{73976939}{2}c^2 + \frac{8748641970774720}{5027007553}c^3 + \frac{1969193941565760}{745971157}c^4 +$ $+\frac{213961763}{840}c^5 - \frac{519043787}{3360}c^6 + \frac{43355}{7}c^7$

точка, соответствующая борновскому полюсу, приближается к началу координат плоскости x , вдоль одной из кривых семейства (I2)-(I3) с некоторой функцией $c(w)$. Однако, поскольку область сходимости разложения (I3) зависит от вида функции $c(w)$, не ясно, после какого количества итераций N можно использовать (I3) для нахождения $c(N) = (-1)^N c(0)$

Таким образом, из условия (6.2) можно определить $c(0)$ лишь при наличии замкнутого выражения для инвариантной кривой (I2), которое пока не найдено. Дальнейшая же информация о произвольной функции $c(w)$ требует выхода за рамки модели Чу-Лоу. Разумеется, это относится и к производу (7), хотя условие (6.1) накладывает на него определённые ограничения^{4/}.

Качественно же физически интересное решение уравнений (2), удовлетворяющее локальным требованиям (6), в окрестности точки $x=y=0$ ведёт себя подобно пунктирной кривой, изображённой на рис. 1, осциллируя, в силу (8), между двумя кривыми из однопараметрического семейства (I2).

Автор благодарен В.А.Мещерякову за интерес к работе и ряд важных замечаний, а также Б.Н.Хоромскому за полезные обсуждения.

Литература.

1. Chew G., Low F. Phys. Rev., 101, 1570, 1956.
2. Ширков Д.В., Серебряков В.В., Мещеряков В.А. Дисперсионные теории сильных взаимодействий при низких энергиях, М., Наука, 1967.
3. Журавлёв В.И., Мещеряков В.А. ЭЧАЯ, т.5, вып. I, М., Атомиздат, 1974.
4. Гердт В.П., Мещеряков В.А. ТМФ, 24, 155, 1975.
5. Лидков Е.П., Нгуен М., Недялков И.П., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, 5-II470 и 5-II471, Дубна, 1978.
6. Мещеряков В.А. ОИЯИ, P2-7047, Дубна, 1973.
7. Гердт В.П., Тарасов О.В., Ширков Д.В. ОИЯИ, P2-II547, Дубна, 1978.
8. Strubbe H. Comp. Phys. Comm., 8, 1, 1974.
9. Мещеряков В.А. ОИЯИ, P2-5907, 1971.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 декабря 1978 года.