

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



С341a1

Г-202

26/11-79

P4 - 12002

724 / 2-79

Ф.А.Гареев, С.А.Гончаров, В.И.Кукулин,
В.М.Краснопольский

ИССЛЕДОВАНИЕ
РЕЗОНАНСНЫХ И АНТИСВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ
НА ОСНОВЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ
ПО КОНСТАНТЕ СВЯЗИ
ДЛЯ РЕАЛИСТИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ

1978

Р4 - 12002

Ф.А.Гареев, С.А.Гончаров*, В.И.Кукулин,*
В.М.Краснопольский*

ИССЛЕДОВАНИЕ
РЕЗОНАНСНЫХ И АНТИСВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ
НА ОСНОВЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ
ПО КОНСТАНТЕ СВЯЗИ
ДЛЯ РЕАЛИСТИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ

*НИИЯФ МГУ

Гареев Ф.А. и др.

P4 - 12002

Исследование резонансных и антисвязанных состояний на основе аналитического продолжения по константе связи для реалистических потенциалов

Резонансные и антисвязанные состояния как вещественных, так и комплексных потенциалов конечного радиуса действия исследуются в рамках метода аналитического продолжения по константе связи при использовании техники паде-аппроксимантов второго рода. С помощью этого метода определяются комплексные собственные значения (нули функции Иоста, или полюса S -матрицы) и соответствующие волновые функции. Как сопутствующий результат, в работе получены способы определения точки ветвления и порогового значения константы связи. Проведены расчеты ряда резонансных и антисвязанных состояний и соответствующих волновых функций в потенциале Вудса-Саксона для ядер ^{208}Pb и ^{16}O . Найден траектории этих состояний при изменении константы связи. Результаты представлены в виде таблиц и рисунков.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Gareev F.A. et al.

P4 - 12002

Investigation of Resonance and Antibound States on the Basis of Analytical Continuation by the Coupling Constant for Realistic Potentials

Resonance and antibound states for both real and complex finite range potentials are tried by the analytical continuation method using the second sort Pade approximant in a coupling constant. The eigenvalues (zeroes of the Jost function, or poles of the S -matrix) and corresponding wave functions are determined. The ways of determination of coupling constant threshold value are also worked out. The method is applied to calculate some resonance and antibound state energies and corresponding wave functions for Woods-Saxon potential for ^{208}Pb and ^{16}O nuclei. The behaviour of these state energies as function of the coupling constant is obtained.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

Введение

В предыдущей публикации^{/1/} дана общая формулировка метода определения полюсов S -матрицы на основе аналитического продолжения по константе связи (АПКС) с помощью паде-аппроксимантов (ПА) второго рода, а также показаны результаты методических расчетов в случае потенциала прямоугольной ямы, которые помогли оценить возможности метода в том виде, в котором он здесь используется. В настоящей части работы мы представляем результаты, полученные с помощью указанного метода для потенциала Вудса-Саксона. В частности, исследуются нейтронные состояния и волновые функции в ^{208}Pb и ^{16}O . Терминология остается прежней: мы называем b -состояниями связанные состояния, a -состояниями - антисвязанные (лежащие на отрицательной мнимой полуоси комплексной k -плоскости) и c -состояниями - квазидискретные, лежащие в IY квадранте комплексной k -плоскости.

Резонансные и антисвязанные состояния в потенциале Вудса-Саксона

Рассматривался обычный потенциал Вудса-Саксона со спин-орбитальным взаимодействием:

$$V_{bc} = V(r) + V_{se}(r) = -V_0 \left(1 + \exp \frac{r-R}{a}\right)^{-1} + \bar{V}_{se}(r), \quad (1)$$

$$\bar{V}_{se}(r) = -\frac{\alpha_s}{2} \frac{dV(r)}{dr} (\vec{\sigma} \cdot \vec{e}), \quad (2)$$

$$R = \varepsilon_0 \cdot A^{1/3},$$

$$2m/\hbar^2 = 0.048228 \cdot A/(A+1) \quad (\text{МэВ})^{-1} (\text{Фм})^{-2} \quad (3)$$

со следующими значениями параметров:

$$^{208}\text{Pb} : V_0 = 46.232 \text{ МэВ}, \quad \varepsilon_0 = 1.24 \text{ Фм}, \quad a^{-1} = 1.587 \text{ Фм}^{-1},$$

$$x_0 = 0.374 \text{ Фм}^2.$$

$$^{16}\text{O} : V_0 = 53.7 \text{ МэВ}, \quad \varepsilon_0 = 1.24 \text{ Фм}, \quad a^{-1} = 1.54 \text{ Фм}^{-1}, \quad x_0 = 0.216 \text{ Фм}^2.$$

I. Как отмечалось в [1], для АПКС-метода особое значение имеет достаточно точное определение порогового значения λ_0 - константы взаимодействия λ , т.е. того значения, при котором происходит слияние решений уравнения $f(k, \lambda) = 0$, где $f(k, \lambda)$ - функция Йоста. И, как было показано в [1], в случае $\ell \neq 0$ для нахождения λ_0 мы также можем использовать метод аналитического продолжения (а точнее, уже просто экстраполяции) с помощью ПА. Используя этот метод, мы и получали значения λ_0 в случае $\ell \neq 0$. В таблице I для ряда состояний с $\ell \neq 0$ в ядре ^{208}Pb показаны значения λ_0 , полученные с помощью ПА различного порядка. Как видно из таблицы, мы имеем хорошую сходимость по порядку ПА даже для небольших ℓ .

В случае $\ell = 0$ ситуация сложнее. Как известно (см., например, [2, 3]), для потенциала конечного радиуса действия при $\ell = 0$ точки ветвления уже не лежат в точке $k = 0$, а расположены на отрицательной мнимой полуоси. (Заметим, что для прямоугольной ямы они лежат в одной точке $\bar{k} = -i/R$, где R - радиус ямы).

Для нахождения $\bar{\lambda}_0$ в случае $\ell = 0$ для обрезанного потенциала Вудса-Саксона мы воспользовались следующими обстоятельствами:

1) для необрезанного потенциала Вудса-Саксона в случае $\ell = 0$ известно решение уравнения Шредингера (см., например, [4]) в аналитическом виде;

2) можно показать, что при обрезании потенциала на достаточно большом расстоянии (уже $\bar{R} \sim 2+2,5$) положение уровней α -и ε -состояний практически не изменяется (в пределах области аналитичности функций Йоста);

3) в точке слияния соответствующий корень \bar{k} уравнения $f(k, \lambda) = 0$ двухкратен, и поэтому мы имеем второе уравнение (кратности):

$$\frac{\partial f(k, \lambda)}{\partial k} \Big|_{k=\bar{k}} = 0. \quad (4)$$

Таким образом, у нас есть два уравнения для двух неизвестных \bar{k} и $\bar{\lambda}_0$.

Итак, следуя [4], можно показать, что для потенциала Вудса-Саксона полюса S -матрицы (нули функции Йоста) на отрицательной мнимой полуоси комплексной k -плоскости являются корнями уравнения

$$\frac{x}{k} - \text{tg} \Sigma(k) = 0, \quad (5)$$

$$\text{где} \quad \Sigma(k) = xR - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\text{arctg} \frac{2xa}{n} - 2 \text{arctg} \frac{xa}{n-ka} \right), \quad (6)$$

а уравнение кратности имеет вид

$$x \frac{d\Sigma(k)}{dk} + 1 = 0, \quad (7)$$

или

$$1 - kR + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{nka}{k^2 + 4x^2 a^2} + \frac{x^2 a^2 - nka}{n^2 - 2nka + x_0^2 a^2} \right\} = 0. \quad (8)$$

Здесь использовались следующие обозначения:

$$x^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (\lambda V_0 + E),$$

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E,$$

$$k = -ik \quad (k > 0),$$

$$x_0^2 = \frac{2m}{\hbar^2} \lambda V_0.$$

Заметим, что k , x и x_0 - действительные. Решая численно систему действительных уравнений (5) и (7), мы находим $\bar{\lambda}_0$ и \bar{k} для соответствующих S -состояний. Некоторые результаты для ^{208}Pb приведены в таблице 2.

Замечание. В практических расчетах ряды в (5) и (7) суммируются только до некоторого N -го члена. Чтобы увидеть, как выбор N влияет на точность, вычисления проводились для различных N и наблюдалась сходимость результата с ростом N . В частности, в таблице 2 во втором столбце показаны значения N , при которых получены соответствующие результаты.

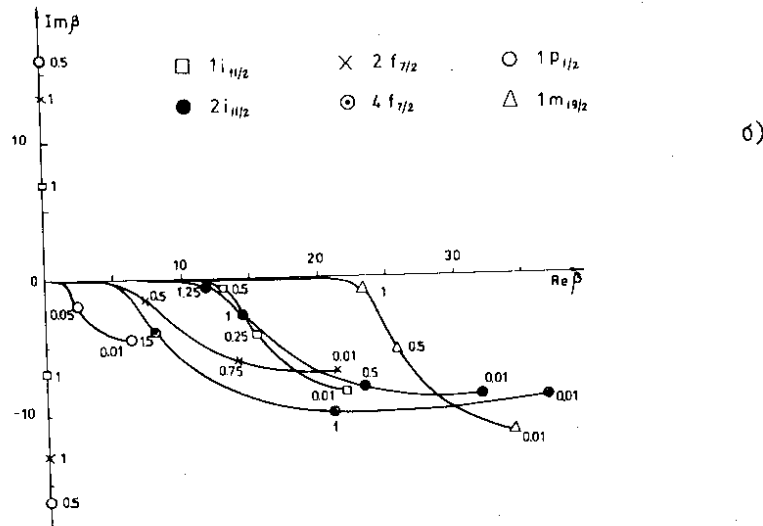
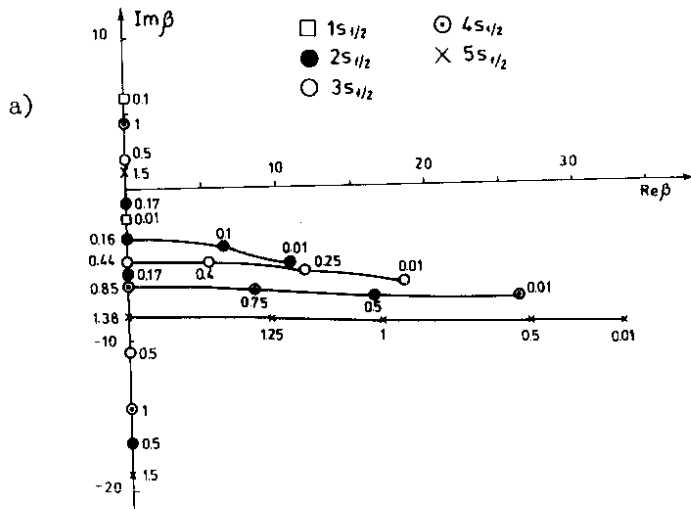


Рис. 1. Траектории некоторых нейтронных состояний ядра ^{208}Pb для действительного потенциала Вудса-Саксона (а) $\ell = 0$; б) $\ell \neq 0$, полученные с помощью ПА. Цифры указывают значения λ в соответствующих точках.

2. В $^{1/1}$ отмечалась также важность достаточно точного вычисления опорных точек, т.е. связанных состояний для данного λ . В настоящей работе для вычисления энергий и волновых функций связанных состояний в потенциале Вудса-Саксона использовался метод и программы, описанные в $^{5/ж}$. Опорные точки брались в области от -1 до -25 МэВ с шагом $\Delta\lambda = 0.05$. Выбранные параметры позволяют получать опорные точки с точностью 1%.

3. В таблице 3 показаны некоторые нейтронные α -состояния в ^{208}Pb , полученные с помощью ПА порядка $[5,5]$ и $[6,6]$. Необходимо заметить, что именно для α -состояний главным образом проявлялись упоминавшиеся в $^{1/1}$ численные неустойчивости. Так, например, для α -состояния $2s_{1/2}$ можно лишь условно говорить о сходимости по порядку ПА, поэтому соответствующее значение в таблице помечено значком \approx . В таблице 4 показаны соответствующие результаты для некоторых нейтронных s -состояний в ^{208}Pb , а также приведены значения, полученные в работе $^{6/}$ методом сшивания. В таблице 5 даны положения некоторых нейтронных α - и s -состояний и соответствующие λ в ядре ^{16}O .

Мы использовали также возможность ПА давать в простом аналитическом виде траекторию состояния с изменением λ . Траектории ряда нейтронных состояний в ^{208}Pb показаны на рисунке 1 (а) — для s -состояний, б) — для состояний с $\ell \neq 0$). Конечно, как уже отмечалось в $^{1/1}$, наши траектории для малых λ могут и не точно соответствовать действительным траекториям, поскольку в $(3.21)^{1/1}$ не учтена особенность в точке $\lambda = 0$.

4. Для вычисления волновых функций мы можем, используя полученные с помощью ПА значения k_{ne} , прямо интегрировать уравнение Шредингера с соответствующими граничными условиями. Однако прямое численное интегрирование (особенно при больших ширинах) может оказываться численно неустойчивым. Как показано в $^{1/1}$, мы можем опять использовать аналитическое продолжение (но уже по k) с помощью ПА в каждой точке z . Хотя, как показали исследования, такой метод плохо работает в асимптотической области, мы можем его применять для получения волновых функций во внутренней области (до $z \sim 1.5R$), "сшивая" затем эти функции с правильной асимпто-

* Точность этого метода $\sim h^2$, где h — шаг конечноразностной сетки. Мы использовали $h = 0.04$ фм для ^{208}Pb и 0.05 фм для ^{16}O . Потенциал обрезался на расстоянии $R = 2.5R$ и $3R$ соответственно.

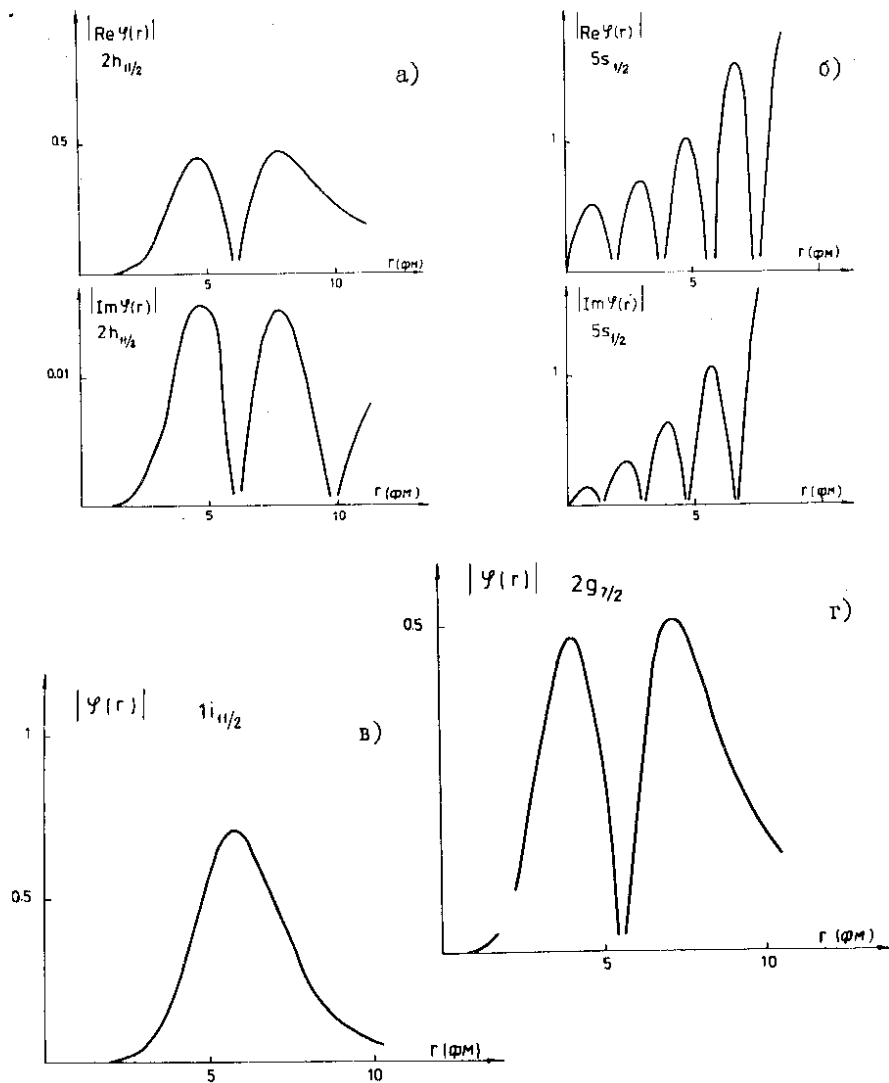


Рис. 2. Волновые функции некоторых нейтронных состояний ядра ^{208}Pb для действительного потенциала Вудса-Саксона, полученные с помощью ПА. (с-состояния: а) $2h_{1/2}$ и б) $5s_{1/2}$; а-состояния: в) $1i_{1/2}$ и г) $2g_{7/2}$).

тикой. Некоторые из полученных с помощью ПА волновых функций во внутренней области для ядра ^{208}Pb показаны на рисунках 2. Заметим, что в некоторых точках ζ продолжение иногда оказывалось неустойчивым. Таким образом, в этих случаях мы не могли получить значения волновой функции. Если такие точки редки, то значения волновой функции в них удобно получать, используя простую интерполяцию по ζ .

Заключение

Результаты исследований и расчетов, проведенных в [1] и данной части настоящей работы, показали, что метод аналитического продолжения с помощью ПА второго рода является в целом эффективным инструментом для определения положения и волновых функций резонансных и антисвязанных состояний как действительных, так и комплексных потенциалов. На наш взгляд, этот метод обладает рядом преимуществ. Во-первых, при таком подходе необходим расчет лишь связанных состояний, а для этого имеется много хороших методов и программ для ЭВМ. Во-вторых, этот метод позволяет с неплохой точностью определять далекие и широкие резонансные, а также антисвязанные состояния. Авторам неизвестно других методов, позволяющих решать эти задачи. Кроме того, ПА дает простое аналитическое выражение для траектории полюса. Как показано в работах [8], матричные элементы, включающие резонансные состояния, также можно найти с помощью аналитического продолжения соответствующих матричных элементов, включающих лишь связанные состояния. И наконец, использование ПА второго рода позволяет решить задачу определения точки ветвления для $\ell \neq 0$ с достаточно хорошей точностью.

Как отмечалось выше, рассматриваемый метод в том виде, как он здесь используется, в отдельных случаях приводит к численно неустойчивому результату, причины появления которого в принципе ясны, и мы не будем здесь углубляться в детали (см. следующие публикации). Проведенное исследование показывает, что имеется еще много резервов для дальнейшего его совершенствования: повышение точности вычисления опорных точек и порогового значения константы взаимодействия (точки ветвления), более полный и строгий учет аналитических свойств продолжаемых функций и т.д.

В заключение авторы выражают признательность Е. Бангу, В. Г. Неудачину, С. П. Ивановой и Г. Казаче за полезные обсуждения.

Таблица 1. Сходимость по порядку ПА для λ_0 в потенциале Вудса-Саксона для нейтронных состояний ($l \neq 0$) в ^{208}Pb

nl_j	[3,3]	[4,4]	[5,5]	[6,6]
1p _{1/2}	0.08861	0.08867	0.08856	0.08849
2d _{5/2}	0.47892	0.47890	0.47876	0.47855
2f _{7/2}	0.66331	0.66331	0.66325	0.66325
1i _{11/2}	0.91202	0.91203	0.91203	0.91203
2g _{7/2}	0.98373	0.98373	0.98373	0.98373
2h _{11/2}	1.09440	1.09440	1.09437	1.09438
1j _{15/2}	1.18338	1.18338	1.18338	1.18338
4d _{3/2}	1.57638	1.57709	1.57702	1.57695
2i _{13/2}	1.60692	1.60692	1.60692	1.60692
4f _{7/2}	1.80150	1.80152	1.80152	1.80152
1m _{13/2}	2.22830	2.22830	2.22830	2.22830

Таблица 2. Значения $\bar{\lambda}_0$ и $\bar{\kappa}$ в потенциале Вудса-Саксона для нейтронных s-состояний в ^{208}Pb

nl_j	N	$\bar{\lambda}_0$	$\bar{\kappa}$ (ФМ) ⁻¹
2s _{1/2}	10	0.16164	0.18190
	20	0.16135	0.18319
	30	0.16125	0.18322
3s _{1/2}	30	0.44218	0.26456
4s _{1/2}	30	0.84642	0.36068
5s _{1/2}	5	1.39747	0.42212
	10	1.38245	0.45188
	20	1.37557	0.45779

Таблица 3. Положения некоторых a-состояний в ядре ^{208}Pb , полученные с помощью ПА.

nl_j	E (МэВ)	nl_j	E (МэВ)
1p _{1/2}	-40.7	2f _{7/2}	-6.25
2s _{1/2}	≈ -40.6	4s _{1/2}	-13.1
3s _{1/2}	-28.2	1i _{11/2}	-2.94
2d _{5/2}	-17.0	2g _{7/2}	-0.453

Таблица 4. Положения некоторых c-состояний ядра ^{208}Pb ($E_{nl_j} = E_{nl_j} - i\Gamma_{nl_j}/2$)

nl_j	ПА		из работы [6]	
	E_{nl_j}	Γ_{nl_j}	E_{nl_j}	Γ_{nl_j}
2h _{11/2}	2.58	0.09	2.46	0.06
1j _{15/2}	5.82	0.05	5.66	0.017
5s _{1/2}	13.2	37.3	4.88	47.47
4d _{3/2}	11.2	40.5	13.93	39.1
2i _{13/2}	12.6	9.47	12.76	8.98
4f _{7/2}	20.9	51.3	~15.0	~43
1m _{13/2}	33.2	5.43	33.55	7.84

Таблица 5. Положения некоторых α - и s -состояний в ядре ^{16}O ,
 полученные с помощью ПА.
 ($E_{ne_j} = E_{ne_j} - i\Gamma_{ne_j} / 2$)

ne_j	τ_{un}	λ_0	E_{ne_j}	Γ_{ne_j}
$1d_{5/2}$	a	0.8322	-3.71	-
$1p_{1/2}$	a	0.4562	≈ -12.3	-
$1d_{3/2}$	c	1.0385	0.643	0.058
$1f_{7/2}$	c	1.3751	7.12	2.62
$3s_{1/2}$	c	1.3808	-11.6	85.6
$1f_{5/2}$	c	1.8879	11.1	12.1
$2p_{3/2}$	c	1.3176	≈ 0.468	≈ 6.26

Литература

1. Гареев Ф.А., Гончаров С.А., Кукулин В.И., Краснопольский В.М.
 Сообщение ОИЯИ, P4-12001, Дубна, 1978, ч.1.
2. Демков Ю.Н., Друкарев Г.Ф. ЖЭТФ, 1965, 49, 691.
3. Островский В.Н., Соловьев Е.А. ЖЭТФ, 1972, 62, 167.
4. Флюгге З. Задачи по квантовой механике.
 Перевод с нем., "Мир", М., 1974.
5. Гиззаткулов М.Х., Пузынин И.В., Ямалеев Р.М.
 Сообщение ОИЯИ, P11-10029, Дубна, 1976;
 Bang J., Gareev F.A., Puzynin I.V., Jamalejev R.M.
 Nucl.Phys., 1976, A261, 59.
6. Бунатян Г.Г. Препринт ОИЯИ, P4-11004, Дубна, 1977;
 ЯФ, 1978, 28, 360.
7. Добрынин Ю.Л., Толоконников С.В., Фаянс С.А.
 Препринт ИАЭ им. Курчатова, ИАЭ-2593, Москва, 1975.
8. Krasnopol'sky V.M. and Kukulin V.I. In: Proceed .
 VI Int. Conf. Few-Body Problem, Graz, 1978.

Рукопись поступила в издательский отдел
 1 ноября 1978 года.