

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



СЗУЗа
Г-202

19/III-79
P4 - 12001

926/2-79

Ф.А.Гареев, С.А.Гончаров, В.И.Кукулин ,
В.М.Краснопольский

ИССЛЕДОВАНИЕ

РЕЗОНАНСНЫХ И АНТИСВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ
НА ОСНОВЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ
ПО КОНСТАНТЕ СВЯЗИ.

Общий подход

1978

P4 - 12001

Ф.А.Гареев, С.А.Гончаров, В.И.Кукулин ,
В.М.Краснопольский

ИССЛЕДОВАНИЕ
РЕЗОНАНСНЫХ И АНТИСВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ
НА ОСНОВЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ
ПО КОНСТАНТЕ СВЯЗИ.
Общий подход

Гареев Ф.А. и др.

P4 - 12001

Исследование резонансных и антисвязанных состояний на основе аналитического продолжения по константе связи. Общий подход

Резонансные и антисвязанные состояния как вещественных, так и комплексных потенциалов конечного радиуса действия исследуются в рамках метода аналитического продолжения по константе связи при использовании техники пале-аппроксимантов второго рода. С помощью этого метода определяются комплексные собственные значения (нули функции Йоста, или полюса S -матрицы) и соответствующие волновые функции. Как сопутствующий результат, в работе получен способ определения точки ветвления и порогового значения константы связи. Иллюстративные расчеты на примере точно решаемой модели потенциала прямоугольной ямы продемонстрировали возможность использования и эффективность подхода для определения положений и волновых функций широких и далеких резонансных и антисвязанных состояний. Получены и сравниваются с точными траектории этих состояний при изменении константы связи. Результаты представлены в виде таблиц и рисунков.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Gareev F.A., et al.

P4 - 12001

Investigation of Resonance and Antibound States on the Basis of Analytical Continuation by the Coupling Constant. General Approach

Resonance and antibound states for both real and complex finite range potentials are tried by the analytical continuation method using the second sort Pade approximant in a coupling constant. The eigenvalues (zeros of the Jost function, or poles of the S -matrix) and corresponding wave functions are determined. The ways of determination of coupling constant threshold value are also worked out. The possibilities of the method are illustrated for a simple example: rectangular potential real as well complex. Poles behaviour as functions of the coupling constant obtained are compared to exact ones.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research, Dubna 1978

I. Введение

Возможность использования состояний с положительной энергией наравне со связанными состояниями в ядерной физике в течение долгого времени привлекала внимание ряда авторов (см. /1-3/ и ссылки в них). Использование их необходимо для решения по крайней мере двух проблем. Первая, в основном математическая, заключается в том, что связанные одночастичные состояния среднего поля ядер не образуют полной системы. Следовательно, при диагонализации полного гамильтониана, содержащего остаточные взаимодействия, состояния непрерывного спектра должны быть учтены, чтобы сохранить полноту базиса разложения. Примеси континуума в основных состояниях ядер в общем невелики, однако при вычислении сечений реакций они становятся очень важными /4-6/. Другая проблема состоит в том, что состояния континуума играют важную роль как конечные или промежуточные состояния во многих ядерных реакциях, таких, как (γ, p) , (p, γ) , (γ, n) и т.д. и электромагнитных переходах на состояния выше порога вылета частиц.

Вычисления с учетом континуума сложны уже в простейших модельных задачах /7/, т.к. нужно исследовать большое число каналов, даже при ограничении, что только одна частица может быть в континууме. Тот факт, что спектр состояний с положительной энергией является непрерывным и их волновые функции не являются квадратично-интегрируемыми, приводит к ряду трудностей, если мы хотим использовать эти состояния в качестве базиса в реалистических расчетах.

Достаточно последовательным методом решения всех этих вопросов является метод связанных каналов /8-10/. Здесь состояния кон-

тинуума находятся как решения системы связанных уравнений, в общем случае интегродифференциальных. Сложность решения этих уравнений ограничивает применение этого метода только легкими ядрами с остаточными силами, ответственными за связь каналов, являющимися комбинацией δ -сил.

Если использовать разложение по дискретным наборам базисных функций, последнее ограничение снимается и первое становится менее серьезным. Были предложены различные методы дискретизации /11, 12/, основанные на замене сплошного спектра на более или менее произвольные наборы дискретных энергий или на разложении функций континуума по фиксированному дискретному набору функций, скажем, по функциям гармонического осциллятора. Однако все эти методы все еще достаточно сложны для применения, часто малоэффективны, а иногда могут привести к некорректным результатам (см. /13/). Более того, вопрос о математической обоснованности этих методов остается открытым, особенно это касается сходимости разложений. Был предложен ряд способов построения дискретных наборов волновых функций, которые дают равномерную сходимость разложения при определенных условиях (базисы Айзенбуда и Вигнера /14/, Капура и Пайерлса /15/, функции Вайнберга /16, 17/ и функции Штурма-Ливилля /5, 18/). Однако эти дискретные наборы зависят от энергии, что неудобно. В описании реакций это может давать некоторые преимущества, но при решении физической задачи методом разложения по полному набору желательно, чтобы только коэффициенты разложения содержали зависимость от энергии.

Естественное обобщение решений уравнения Шредингера (УШ), соответствующих дискретным связанным состояниям для положительной (или, скорее, комплексной) энергии, введено Гамовым в описании α -распада /19/. Как и связанные состояния, состояния с комплексными собственными значениями имеют энергии, которые соответствуют полюсам S -матрицы. Представление S -матрицы с помощью ее полюсов было дано Пайерлсом /20/. Теория ядерных реакций, в которой эти полюса используются для разложения амплитуд реакции, была разработана Хамблетом и Розенфельдом /21/.

Недавно была развита техника разложения волновых функций непрерывного спектра по резонансам с использованием аналитических свойств функций Грина /22, 23/. Но в этом подходе, к сожалению, невозможно ответить на вопрос о сходимости разложения. В связи с этим важно отметить, что в изучении аналитических свойств S -матрицы /24/, функций Грина и волновых функций /7/ и их разложений по

полюсным членам решающую роль играет теорема Миттаг-Леффлера, гарантирующая равномерную по k сходимость ряда внутри произвольного замкнутого контура, не содержащего полюсов. В работе /7/ показано, что резонансные функции составляют полный набор в ограниченной области пространства $0 \leq r < R$, причем полученные ряды сходятся равномерно. Важным свойством резонансных функций является независимость полученных результатов от R при условии $R > R_0$, где R_0 - расстояние, на котором ядерные силы можно полагать равными нулю /21, 25/ (даже с включением кулоновского потенциала /7/).

Таким образом, резонансные функции образуют удобный дискретный базис /26/ в структурных расчетах и в расчетах сечений реакций. В связи с этим большую актуальность приобретает разработка методов нахождения резонансных состояний. Эффективный метод расчета резонансных состояний в двух-, а также в многочастичных системах предложен в работах /27, 28/. Указанный подход имеет ряд преимуществ по сравнению с методами, предлагавшимися до сих пор (см. ниже, а также /28/). Целью настоящей работы является дальнейшее исследование этого подхода в связи с разнообразными его применениями в теории ядерных реакций.

2. Краткий обзор методов расчета резонансных состояний

Расчету резонансных состояний посвящено очень большое количество работ. Здесь мы обсудим лишь главные черты предложенных методов. Развитие к настоящему времени подходы можно несколько произвольно разделить на ряд групп так, что внутри каждой группы методы будут идейно связаны между собой. Кроме того, имеются гибридные подходы, объединяющие отдельные черты разных групп.

2.1. Вариационные методы. Вариационный метод применительно к расчету резонансных состояний далеко не так употребителен, как в случае дискретного спектра. Причин этого несколько. Отметим лишь основные. Прежде всего, для резонансного состояния (ввиду неэрмитового характера краевой задачи) нет принципа минимума, а есть лишь условие экстремума. Во-вторых, для резонансных состояний трудно найти вид пробной волновой функции, поскольку в граничное условие должны явно входить энергия и ширина. И, наконец, для многочастичных резонансов асимптотическое поведение волновой функции является очень сложным /29/. Тем не менее ряд методов вариационного характера уже исследован /30, 31/, хотя никаких реали-

стических результатов на основе этого подхода пока что не получено.

2.2. Методы прямого численного решения уравнения Шредингера (УШ). В этой группе работ (см., например, работы^{/32,33/}) резонансные состояния находятся при сшивании логарифмических производных функции, обращающейся в нуль при $r \rightarrow 0$ и определяемой путем численного решения УШ и асимптотики, представляющей собой при $r \rightarrow \infty$ расходящуюся сферическую волну (например, функции Уиттекера), в точке $r \sim R$ (расстояние, где ядерный потенциал обращается в нуль). При таком подходе результаты очень чувствительны к выбору (вообще говоря, произвольному) точки сшивания. Кроме того, подобный подход не позволяет рассчитывать антисвязанные состояния (т.е. состояния, соответствующие полюсам S -матрицы, лежащим на отрицательной мнимой полуоси комплексной k -плоскости), т.к. в этом случае численное решение становится неустойчивым. К этой группе можно отнести еще один подход. Если резонансы узкие, т.е. $|\operatorname{Re} k_{\ell}| \gg |\operatorname{Im} k_{\ell}|$, то с хорошей точностью выполняется $\delta_{\ell} \approx \pi/2$. Этот факт был использован для нахождения узких резонансных состояний сферически-симметричного и деформированного потенциалов^{/34/}, причем алгоритм построен как решение задачи на собственные значения с помощью непрерывного аналога метода Ньютона.

2.3. Гибридные методы. Имеются также разнообразные методы, пригодные для решения узких классов задач, использующих те или иные черты из упомянутых подходов. Многие из этих методов претендуют на расчет лишь одной величины, скажем, только ширины или только положения резонансного состояния. Среди них можно выделить метод стабилизации^{/35/} и разновидности т.в.^{*/36,37/}. Первый основан на следующем наблюдении. Если в диагонализационном расчете на полном дискретном базисе проследить за поведением собственных значений в зависимости от размерности базиса N , то можно увидеть, что ряд собственных значений на некотором интервале значений N не изменяет своего положения (т.е. эти собственные значения стабилизируются), а другие монотонно сходятся к нулю, как того требует теорема Хиллерааса-Уидгейма^{/38/}. На этой основе можно разработать критерии, позволяющие рассчитывать энергии узких резонансов и оценивать их ширины^{/35/}. Однако для широких резонансов стабилизация уже не имеет места и использование такого метода затруднено. Среди разновидностей т.в. нам хочется отметить два

*/Здесь и ниже т.в. - теория возмущений.

подхода, идейно связанных с методом, обсуждаемым в настоящей работе. В первом подходе^{/37/} развита "правильная" т.в. для слабосвязанных состояний, где обычная т.в. не применима из-за близости непрерывного спектра. В "правильной" т.в. вместо поправки к энергии состояния рассматривается поправка к положению нуля функции Йоста $f_{\ell}(k, \lambda)$ (k - волновое число, λ - константа связи). При этом для ℓ -той парциальной волны получают разложение:

$$E_{\ell} \approx k_{\ell}^2 = a_1(\lambda - \lambda_0) + a_2(\lambda - \lambda_0)^2 + \dots + a_{\ell}(\lambda - \lambda_0)^{\ell} + b_{\ell}(\lambda - \lambda_0)^{\ell + 1/2} + a_{\ell+1}(\lambda - \lambda_0)^{\ell+1} + \dots,$$

где $E(\lambda_0) = 0$, λ_0 - пороговое значение константы связи. Это разложение вплоть до ℓ -го члена совпадает с обычным разложением в т.в., а затем появляется корневая особенность, связанная с наличием континуума. Аналогичное "правильное" разложение можно получить и для волновой функции. К этому подходу тесно примыкает работа^{/39/}, в которой найден вид поправки первого порядка к энергии резонанса. Заметим, что с обсуждаемым ниже методом аналитического продолжения тесно связан также метод^{/36/}, в котором вместо расчета резонанса предлагается так усилить притягивающую часть взаимодействия, чтобы резонанс стал окологороговым связанным состоянием, а затем использовать т.в. для слабосвязанного состояния. Однако, как показали вычисления^{/36/}, уже расчет поправки 2-го порядка к ширине является очень сложным.

2.4. Метод аналитического продолжения по константе связи (АПКС). Этот метод был предложен в работах^{/27,28/}. В последующих разделах мы подробно изложим основные положения этого подхода и результаты численных расчетов. Здесь отметим только то преимущество АПКС-метода, что он позволяет рассчитывать далекие и широкие резонансные, а также антисвязанные состояния, для чего требуется только умение вычислять связанные состояния и простая процедура нахождения коэффициентов аппроксиманта.

Подход, использующий идею аналитического продолжения (но по энергии) был также развит в работе^{/40/}. Однако подобный метод (как он реализован в^{/40/}) является громоздким и обладает недостатками, присущими другим подходам (трудность расчета матричных элементов и т.д.).

3. Исследование полюсов S' -матрицы с помощью АПКС-метода

3.1. Рассмотрим систему двух бесспиновых частиц с потенциалом взаимодействия $\lambda V(z)$ ($V(z) = 0$ при $z > R$). Запишем радиальное УШ для e -той частичной волны:

$$\left[-\frac{d^2}{dz^2} + \frac{e(e+1)}{z^2} + 2m\lambda V(z) \right] \Phi_e(k, z) = k^2 \Phi_e(k, z) \quad (3.1)$$

(в этом разделе мы используем единицы, в которых $\hbar = 1$). Регулярное в нуле решение (3.1) определяется ^{/41/} условием

$$\lim_{z \rightarrow 0} (ze+1) z^{-e-1} \varphi_e(k, z) = 1, \quad (3.2)$$

а два линейно-независимых нерегулярных решения Йоста - условием

$$\lim_{z \rightarrow \infty} e^{+ikz} f_e^{(\mp)}(k, z) = z^{\pm e}. \quad (3.3)$$

Регулярное решение представляется в виде линейной комбинации решений Йоста:

$$\varphi_e(k, z) = \frac{C}{k^{e+1}} \left\{ f_e^{(+)}(k) f_e^{(+)}(k, z) - f_e^{(-)}(k) f_e^{(-)}(k, z) \right\}, \quad (3.4)$$

где C - константа, $f_e(k)$ - функция Йоста. И, наконец, стандартным образом S' -матрица выражается через функцию Йоста:

$$S_e(k) = f_e(k) / f_e(-k). \quad (3.5)$$

Хорошо известно ^{/24, 39, 42, 43/}, что для потенциалов конечного радиуса действия функция $S_e(k)$ мероморфна во всей k -плоскости. При этом она имеет в верхней полуплоскости конечное число простых полюсов только на положительной мнимой полуоси и бесконечное число простых полюсов в нижней полуплоскости. Полюса S' -матрицы являются и нулями функции Йоста (см. (3.5)):

$$f_e(-k_n) = 0, \quad (3.6)$$

т.о., в (3.4) при $k = k_n$ выживает только один член - "расходящаяся волна":

$$\varphi_{ne}(z) \equiv \varphi_{ne}(k_n, z) = \frac{C}{k_n^{e+1}} f_e^{(+)}(k_n) f_e^{(+)}(k_n, z), \quad (3.7)$$

причем согласно (3.3)

$$\varphi_{ne}'(z) / \varphi_{ne}(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} i k_n. \quad (3.8)$$

Далее будем придерживаться следующей терминологии. Полюса S' -матрицы, лежащие на положительной мнимой полуоси и отвечающие связанным состояниям системы, будем называть β -полюсами, или β -состояниями. Полюса, лежащие на отрицательной мнимой полуоси и отвечающие так называемым антисвязанным состояниям (волновые функции этих состояний имеют экспоненциально растущую асимптотику), будем называть α -полюсами (α -состояниями). И, наконец, полюса, лежащие в 3 и 4 квадрантах, - ϵ -полюсами (ϵ -состояниями) ^{*}. Из аналитических свойств S' -матрицы также следует, что ϵ -полюса расположены парами симметрично относительно мнимой оси. Как было показано в работе ^{/44/}, для потенциалов конечного радиуса действия достаточно общего вида все полюса, расположенные на мнимой оси ($k_n = i x_n$), разбиваются на две группы:

$$a) x_1 > x_2 > \dots > x_N > \bar{x} \quad \text{и} \quad b) x_1' < x_3' < \dots < x_N' < \bar{x}, \quad (3.9)$$

причем x_N может быть как положительным, так и отрицательным и

$$-x_1 < x_2' < -x_2 < \dots < -x_{N-1} < x_N' < \bar{x}. \quad (3.10)$$

При этом, если при возрастании λ потенциал перед тем, как обратиться в нуль, положителен, то имеется еще один полюс $x_1' < -x_1$, так что общее число нулей четное. Если же потенциал в этот момент отрицателен, то x_1' отсутствует и общее число нулей нечетное. В той же работе было показано, как движутся полюса x_n и x_n' при изменении константы связи λ , а в работе ^{/45/} эта общая картина движения полюсов была подтверждена для частного случая прямоугольной ямы путем численного расчета. При уменьшении λ полюса, у которых $x_n > \bar{x}$, движутся навстречу полюсам, у которых $x_n < \bar{x}$. Они попарно сливаются в точке \bar{x} при некотором $\lambda = \bar{\lambda}_0$, а затем симметрично расходятся вправо и влево от мнимой оси. Непарный же нуль, если он есть, движется вниз по мнимой оси, оставаясь все время выше точки $\bar{k} = i \bar{x}$. Очевидно, что положение самой точки \bar{x} зависит от вида потенциала. Известно, что в случае $\ell \neq 0$ для рассматриваемого нами потенциала $\bar{x} = 0$, в случае же $\ell = 0$ положение \bar{x} , вообще говоря, зависит и от номера

* ϵ -полюсам из 4 квадранта, лежащим не очень далеко от действительной оси, обычно придается смысл квазистационарных состояний.

полуса и его определение само по себе представляет непростую задачу^{*)}. Таким образом, зная положение полуса как функции λ , т.е.

$k_{\pm}(\lambda)$, можно единым путем описать β -, a - и c -состояния. Более того, можно сформулировать следующую задачу: получить характеристики a - и c -состояний с помощью аналитического продолжения соответствующих характеристик β -состояний (расчет которых не составляет большого труда). Для решения такой задачи необходимо:

- 1) исследовать аналитические свойства функции;
- 2) найти адекватный метод аналитического продолжения;
- 3) научиться находить пороговые значения $\bar{\lambda}_0$, константы связи и точку столкновения полюсов \bar{x} .

3.2. Аналитические свойства функции $k_{\pm}(\lambda)$. Исследуем поведение $k_{\pm}(\lambda)$ вблизи точки столкновения полюсов. Согласно теореме Гельмана-Фейнмана^{/46/}

$$\frac{\partial k_{\pm}^2(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\langle \psi_{\pm e}(z, \lambda) | V(z) | \psi_{\pm e}(z, \lambda) \rangle}{\langle \psi_{\pm e}(z, \lambda) | \psi_{\pm e}(z, \lambda) \rangle}. \quad (3.11)$$

При $E < 0$ $\psi_{\pm e}(z, \lambda)$ - решение уравнения (3.1) - волновая функция e -состояния. Известно^{/43/}, что

$$\psi_{\pm e}(z, \lambda) = \begin{cases} \varphi^{(1)} = k_{\pm}^{e+1} \sum_{i=0}^{\infty} A_{\pm i}(z) k_{\pm}^{2i}, & \text{при } z \rightarrow 0, \\ \varphi^{(2)} = k_{\pm}^{e+2} \mathcal{H}_e(i k_{\pm} z), & \text{при } z \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (3.12)$$

Для финитного потенциала получаем

$$\frac{\partial k_{\pm}^2}{\partial \lambda} = \frac{\int_0^R \varphi^{(1)*}(z) V(z) \varphi^{(1)}(z) dz}{\int_0^R |\varphi^{(1)}(z)|^2 dz + \int_R^{\infty} |\varphi^{(2)}(z)|^2 dz}. \quad (3.13)$$

Подставляя (3.12) в (3.13), имеем:

а) при $e=0$

$$\frac{\partial k_{\pm}^2}{\partial \lambda} = k_{\pm} \frac{\sum_{i=0}^{\infty} a_{\pm i} k_{\pm}^{2i}}{\sum_{i=0}^{\infty} b_i k_{\pm}^i} \quad (3.14)$$

и при $k_{\pm} \rightarrow 0$ $\frac{\partial k_{\pm}^2}{\partial \lambda} \sim k_{\pm}$, т.е. $k_{\pm} \sim c(\lambda - \lambda_0)$; (3.15)

^{*)} В случае прямоугольной ямы оказывается, что $\bar{x} = -\frac{1}{R}$, где R - радиус ямы для всех номеров s -состояний, кроме непарного полуса.

б) при $e \neq 0$

$$\frac{\partial k_{\pm}^2}{\partial \lambda} = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{a}_i k_{\pm}^{2i} / \left(\sum_{j=0}^{e-1} \tilde{b}_j k_{\pm}^{2j} + \sum_{j=2e}^{\infty} c_j k_{\pm}^{2j} \right) \quad (3.16)$$

и при $k_{\pm} \rightarrow 0$ $\frac{\partial k_{\pm}^2}{\partial \lambda} \sim c_i^{\pm}$, а $k_{\pm} \sim \pm(\lambda - \lambda_0)^{1/2}$. (3.17)

Подставляя (3.17) в (3.16), находим, что вблизи точки λ_0 функция $k_{\pm}(\lambda)$ имеет вид^{*)}

$$k_{\pm}(\lambda) = k_{\pm}(x) = \sum_{i=1}^e A_i x^{2i-1} + \sum_{i=2e}^{\infty} B_i x^i, \quad (3.18)$$

где

$$x = \begin{cases} \lambda - \lambda_0 & \text{при } e=0, \\ \pm(\lambda - \lambda_0)^{1/2} & \text{при } e \neq 0. \end{cases}$$

Таким образом, при $e \neq 0$ функция $k_{\pm}(x)$ в точке λ_0 , отвечающей $k=0$, имеет корневую точку ветвления, причем ветви этой функции, т.е. $k_{\pm}(x) (x = \pm(\lambda - \lambda_0)^{1/2})$, являются аналитическими функциями в некоторой окрестности точки $x=0$. При $e=0$ в точке λ_0 , отвечающей порогу упругого рассеяния $k=0$, функция $k_{\pm}(\lambda)$ аналитична, а в точке $\lambda = \bar{\lambda}_0$ имеет корневую точку ветвления при $k(\bar{\lambda}_0) = i\bar{x}$ и мы можем записать:

$$k_{\pm}(\lambda) = k_{\pm}(\bar{x}) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \bar{x}^i, \quad (3.19)$$

где

$$\bar{x} = \pm(\lambda - \bar{\lambda}_0)^{1/2}.$$

Итак, используя свойства аналитических функций^{/47/}, можно найти значения $k_{\pm}(x)$ в интересующей нас области, зная лишь ее значение при $\lambda < \lambda_0$ ($x > 0$).

3.3. Выбор метода аналитического продолжения. На наш взгляд, очень удобным является метод паде-аппроксимантов. Паде-аппроксимантом (ПА) порядка $[N, M]$ называется дробно-рациональное выражение^{/48/}

$$f^{[N, M]}(z) = \frac{P_N(z)}{Q_M(z)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_N z^N}{\beta_0 + \beta_1 z + \dots + \beta_M z^M}. \quad (3.20)$$

($\beta_0 = 1$)

^{*)} Такое же выражение может быть получено из "правильной" т.е., записанной для нуля функции Йоста^{/37/}.

Коэффициенты a_i и b_i могут быть найдены или из $N+M+1$ коэффициента ряда Тейлора функции $f(z)$ (ПА первого рода), или из значений функции $f(z)$ в $N+M+1$ точке z (ПА второго рода)^{/48/}. При $N, M \rightarrow \infty$ последовательность ПА сходится во всей области аналитичности $f(z)$ к значениям этой функции^{/48/}. Кроме нулей, ПА имеет еще и полюса, поэтому может служить адекватным представлением и для мероморфной функции^{/48/}. Более того, ПА могут сходиться вблизи разрезов, воспроизводя сам разрез альтернированием нулей и полюсов^{/49/}. Однако наличие нулей и полюсов в ПА может приводить и к определенным трудностям. Так, в ПА (3.20) могут появляться полюса, не соответствующие полюсам исходной функции $f(z)$. Как показали расчеты^{/48, 49/}, в таких случаях обычно рядом с полюсами ПА расположен его нуль. Ясно, что влияние этого полюса на поведение ПА (3.20) в соответствующей области зависит от того, насколько близко друг к другу расположены нуль и полюс. При изменении порядка ПА дублет нуль-полюс, не соответствующий истинной сингулярности $f(z)$, перемещается в плоскости z , уходя на границу области аналитичности при $N, M \rightarrow \infty$ ^{/49/}. Появление мнимых нулей и полюсов в области аналитичности зависит также от точности вычисления исходных значений $f(z)$ или коэффициентов ряда Тейлора. Известно, что условие устойчивости аналитического продолжения предъявляет повышенные требования к точности задания начальных данных. Отсюда ясна необходимость возможно более точного решения уравнения (3.1) для β -состояний и определения значений констант λ_0 и $\bar{\lambda}_0$.

3.4. Процедура аналитического продолжения для $k_n(\lambda)$. Для построения ПА функции $k_n(\lambda)$ выберем некоторую последовательность значений константы связи $\{\lambda_i\}$, причем все $\lambda_i > \lambda_0$ ($i = 1, 2, \dots, p$). Размеры и положение области, из которой берутся значения λ_i , а также их взаимное расположение определяются практикой конкретных расчетов. Далее, решая для каждого λ_i уравнение (3.1) для связанного состояния, с помощью любого удобного метода, способного обеспечить достаточную точность, получаем второй набор опорных точек $\{k_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, p$). Найдя λ_0 ($\bar{\lambda}_0$) (см. ниже) и переходя к переменной $x = (\lambda - \lambda_0)^{1/2}$ (если $e \neq 0$) или $x = (\lambda - \bar{\lambda}_0)^{1/2}$ (если $e = 0$), строим соответствующий набор опорных точек $\{x_i\}$. С помощью двух наборов опорных точек $\{x_i\}$ и $\{k_i\}$ находим коэффициенты ПА второго рода:

$$k_n^{[N, M]}(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}, \quad N+M+1 = p. \quad (3.21)$$

Выражение (3.21) в простой аналитической форме дает траекторию полюса $k_n(\lambda)$ и определяет одновременно обе ее ветви: одну, соответствующую α -состоянию, и другую, соответствующую β -состоянию. Для получения этой второй ветви достаточно изменить на противоположный знак переменной в правой части уравнения (3.21). Пусть интересующий нас физический случай соответствует, например, $\lambda = 1$. Тогда, полагая $x = \pm(1 - \lambda_0)^{1/2}$, мы из (3.21) находим соответствующий полюс.

3.5. Определение точки ветвления. Как упоминалось выше, при $\lambda = \lambda_0$ ($\lambda = \bar{\lambda}_0$) происходит слияние двух полюсов S -матрицы (двух нулей функции Йоста $f(k, \lambda)$) и мы имеем полюс (нуль) второго порядка. Условие кратности может быть использовано для нахождения λ_0 ($\bar{\lambda}_0$) и \bar{x} путем решения системы уравнений:

$$\begin{cases} f(k, \lambda) = 0, \\ \frac{\partial f(k, \lambda)}{\partial k} = 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial f(k, \lambda)}{\partial k} = 0. \quad (3.23)$$

Однако этот способ наиболее удобен, когда функцию Йоста можно найти в аналитическом виде. В общем случае при $e \neq 0$ для определения λ_0 эффективно может быть использовано условие $E(\lambda_0) = 0$ ^{/27/}. Перепишем (3.18) для $E(\lambda)$:

$$E(\lambda) = a_1(\lambda - \lambda_0) + a_2(\lambda - \lambda_0)^2 + \dots + a_p(\lambda - \lambda_0)^{e+1} + \dots \quad (3.24)$$

Видно, что при больших e и при λ , близких к λ_0 , можно пренебречь точкой ветвления, считать $E(\lambda)$ аналитической функцией λ и аппроксимировать ее ПА второго рода, построенным по тем же опорным точкам $\{\lambda_i\}$ и $\{k_i\}$, что и (3.21):

$$E^{[N, M]}(\lambda) = \frac{\tilde{P}_e(\lambda)}{\tilde{Q}_e(\lambda)}. \quad (3.25)$$

Тогда λ_0 находится из условия $E^{[N, M]}(\lambda) = 0$. Как показали расчеты (см. ниже, а также^{/27, 28/}), такой метод позволяет найти λ_0 с хорошей точностью даже для $e = 1$.

3.6. Метод аналитического продолжения для волновых функций

Как отмечалось выше, выражение (3.21) определяет траектории двух полюсов S -матрицы (будем обозначать их \mathcal{K}). Пусть функция $\varphi_{ne}(z)$ при $\lambda < \lambda_0$ является решением (3.1) при отрицательных энергиях. Рассмотрим теперь поведение $\varphi_{ne}(z) \equiv \varphi_n(k_n, z)$ как функции k_n при $k_n \rightarrow 0$ ($\lambda \rightarrow \lambda_0$). Анализ выражения для волновой функции^{/50/} и использование свойств функции и решения Йоста^{/42, 43/} позволяют установить, что вблизи порога справедливо следующее представление^{/28/}:

$$\varphi_{ne}(z) = \begin{cases} \sqrt{k_n} \phi_1(k_n, z) & \text{при } e = 0, \\ \phi_2(k_n, z) & \text{при } e \neq 0, \end{cases} \quad (3.26)$$

где $\phi_1(k_n, z)$ и $\phi_2(k_n, z)$ — аналитические функции k в области аналитичности функции Йоста. Пусть при $\lambda = 1$ мы имеем, например, e -состояние. Его волновая функция является решением уравнения (3.1) и имеет асимптотику

$$\varphi_{ne}(z) \underset{z \rightarrow R}{\approx} N h_e^{(+)}(ik_n, z), \quad (3.27)$$

где $h_e^{(+)}(x)$ — функция Риккати-Ханкеля. После того, как мы с помощью (3.21) нашли положение полюса k_n , асимптотическая часть $\varphi_{ne}(z)$ становится известной с точностью до нормировочной постоянной N . Внутреннюю часть функции $\varphi_{ne}(z)$ также весьма удобно находить с помощью аналитического продолжения, но уже не по λ , а по k . Решая уравнение (3.1) при отрицательных энергиях для различных $\lambda_i > \lambda_0$, находим k_i и $\phi_i(z)$, где

$$\phi_i(z) = \begin{cases} \phi_1(k_i, z) & , e = 0, \\ \phi_2(k_i, z) & , e = 1, \end{cases} \quad (3.28)$$

является аналитической функцией k . Далее, имея два опорных набора $\{k_i\}$ и $\{\phi_i(z)\}$ ($i=1, 2, \dots, p$), мы можем в любой внутренней точке z построить ПА второго рода:

$$\phi^{[N, M]}(k, z) = \frac{P_N(k, z)}{Q_M(k, z)}, \quad N+M+1=p, \quad (3.29)$$

где P_N и Q_M — полиномы по k степени N и M соответственно, с коэффициентами, зависящими от z . Эти коэффициенты однозначно определяются наборами $\{\phi_i(z)\}$ и $\{k_i\}$ в каждой точке z . Выражение (3.29) дает возможность получить внутреннюю часть волновых

функций a -и c -состояний продолжением по k вдоль траектории \mathcal{K} волновой функции e -состояния.

$$\varphi_{ne}(z) \approx \begin{cases} \sqrt{k_n} \phi^{[N, M]}(k_n, z), & e = 0, k_n \in \mathcal{K}; \\ \phi^{[N, M]}(k_n, z), & e \neq 0, k_n \in \mathcal{K}. \end{cases} \quad (3.30)$$

Нормировочную постоянную N находим из (3.30):

$$N = \frac{\varphi_{ne}(\tilde{R})}{h_e^{(+)}(ik_n \tilde{R})}. \quad (3.31)$$

Заметим, что положение \tilde{R} определяется для каждого конкретного случая отдельно, исходя из скорости сходимости ПА (3.29) в асимптотической области и требований необходимой точности.

В работе^{/28/} показано, что матричные элементы, содержащие резонансные функции, могут быть получены без расчета самих этих функций путем аналитического продолжения непосредственно матричных элементов. При этом отпадает необходимость в процедуре регуляризации^{/51/}.

3.7. Собственные состояния комплексных гамильтонианов. Метод аналитического продолжения позволяет рассчитать положение и эволюцию полюсов S -матрицы, а также соответствующие волновые функции и матричные элементы не только для вещественного, но и для комплексного гамильтониана^{/28/}. Рассмотрим уравнение (3.1) и предположим, что λ может принимать комплексные значения. Положение полюса S -матрицы $k_n(\lambda)$ для комплексного потенциала $\lambda V(z)$ определим, как аналитическое продолжение по λ с положительной вещественной оси λ . Для этого используем ПА (3.21) (коэффициенты ПА уже найдены при вещественных $\lambda > \lambda_0$). Таким образом, (3.21) дает траекторию полюса S -матрицы и для комплексных λ . Волновые функции состояний комплексного гамильтониана можно получать, используя ПА (3.29) и рассчитанные положения этих состояний, исходя из функций связанных состояний вещественного гамильтониана.

Для комплексного гамильтониана S -матрица обладает следующими свойствами^{/52/}:

$$S_e^*(k) S_e(k) = 1,$$

$$S_e^*(k, \lambda) S_e(k^*, \lambda^*) = 1,$$

откуда

$$S_e^{1*}(-k^*, \lambda^*) = S_e(k, \lambda), \quad (3.32)$$

т.е. если k_n - полюс $S_e(k, \lambda)$, то $-k_n^*$ - полюс $S_e(k, \lambda^*)$. Таким образом, относительно мнимой оси k симметричными будут нули и полюса $S_e(k, \lambda)$ и $S_e(k, \lambda^*)$. Следовательно, достаточно рассмотреть только поглощающий потенциал.

4. Исследование полюсов S^I -матрицы для прямоугольной ямы (иллюстрация)

Данный случай интересен в первую очередь возможностью сравнения с точными результатами (найденными из аналитического решения), что позволяет исследовать точность получаемых результатов и яснее сформулировать требования к исходным данным. Рассмотрим потенциал

$$V(z) = \begin{cases} -V_0, & z < R \\ 0, & z > R \end{cases} \quad (V_0 > 0). \quad (4.1)$$

Удобно ввести безразмерные параметры:

$$\beta = kR = (2mE/\hbar^2)^{1/2} R \quad \text{и} \quad \beta_0 = (2mV_0/\hbar^2)^{1/2} R. \quad (4.2)$$

Расчеты проведены для двух случаев:

$$\begin{aligned} \text{а) } \ell = 0, \beta_0 = 5.0, V_0 = 25 \text{ МэВ}, R = 2 \text{ фм}, \\ \text{б) } \ell = 1, \beta_0 = 3.5, V_0 = 12.25 \text{ МэВ}, R = 2 \text{ фм}, \\ 2m/\hbar^2 = 0.25 \text{ (МэВ)}^{-1} (\text{фм})^{-2}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

В таблице I (под буквой А) даны положения α - и σ -полюсов для $\ell = 0$, вычисленные с помощью диагональных ПА различного порядка от [1,1] до [7,7]. В предпоследнем столбце приведены соответствующие точные значения, а в последнем - значения λ_0 , которые были вычислены с помощью приближенных формул^{45/}. Заметим, что положения σ -полюсов практически совпадают с точными значениями, т.к. они сами являются опорными точками, либо лежат очень близко от них. В той же таблице даны положения α - и σ -полюсов для $\ell = 1$: под буквой Б - когда значения λ_0 брались точными, т.е. находились из решения точных уравнений, и под буквой В - когда λ_0 вычислялось с помощью ПА того же порядка. Соответствующие значения λ_0 приведены в таблице 2. Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы:

1. Использование ПА для определения λ_0 позволяет получить 3-4 верные значащие цифры уже для ПА порядка [7,7]. При этом наблюдается устойчивая сходимость значений λ_0 по порядку ПА.

2. АПКС-метод позволяет получать положения σ -полюсов S^I -матрицы с достаточной точностью. При этом наблюдается сходимость результатов по порядку ПА.

Точность нахождения положений α -полюсов несколько хуже, и даже имеется ряд случаев, когда аналитическое продолжение неустойчиво и однозначного результата не получается. Причем изменение параметров продолжения (взаимное расположение опорных точек, расположение области, где берутся опорные точки и т.д.) не приводит к заметному улучшению. Поэтому при определении α -полюсов существенно необходима проверка устойчивости и сходимости по порядку ПА. В некоторых случаях так и не удается получить устойчивого результата, и это означает, что данный вид аналитической аппроксимации (3.2I) не позволяет получить результат именно из-за особенностей самих ПА и необходимо использовать более подходящую форму.

Как уже отмечалось, ПА $k_n^{(N,N)}(x)$ дает в простом аналитическом виде траекторию полюса в комплексной k -плоскости при изменении константы связи λ . На рисунке I представлено сравнение траекторий, полученных с помощью ПА порядка [7,7] (сплошная линия), с точными траекториями (штриховая линия), взятыми из работ^{24, 45/}.

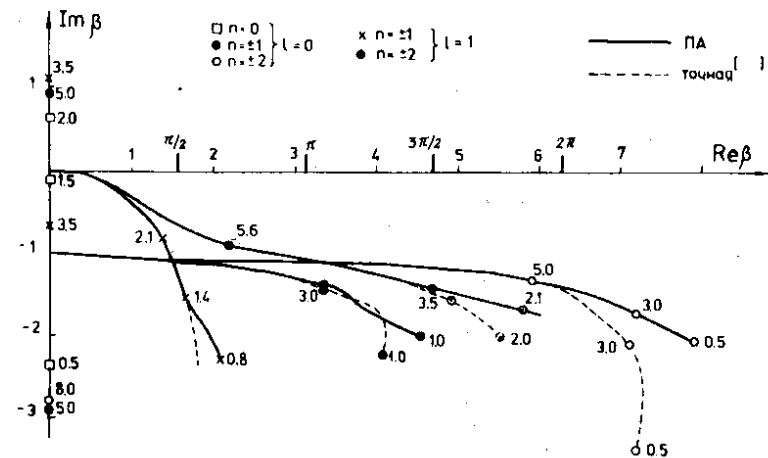


Рис. I. Траектории полюсов ($\ell = 0$ и $\ell = 1$) S^I -матрицы в комплексной k -плоскости для прямоугольной ямы.

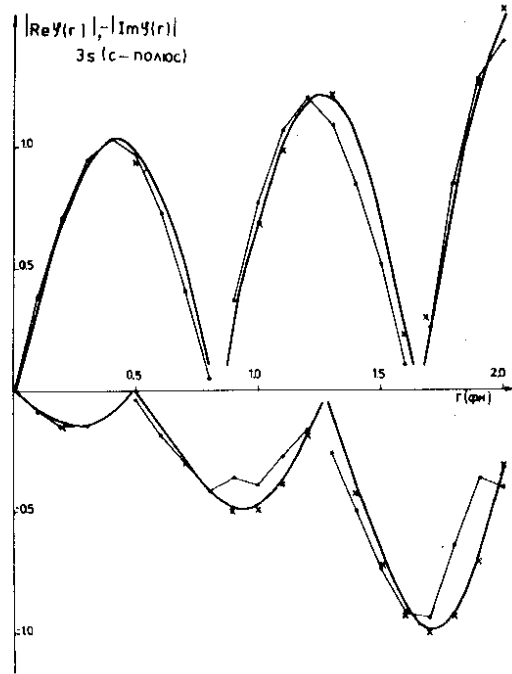


Рис. 2. Волновая функция 3s-состояния (с-полос) в прямоугольной яме с $\beta_0 = 5.0$. (Пояснения в тексте).

Обозначения кривых даны на рисунке. Цифры около кривых показывают значения величины $(\frac{2m\lambda V_0}{\hbar^2})^{1/2} R$ в соответствующей точке. Общая закономерность — точная и ПА-траектории совпадают вплоть до области, где траектория должна выходить на асимптотику при $\lambda \rightarrow 0$, причем чем выше порядок ПА, тем дальше область совпадения. Однако, чтобы воспроизвести асимптотическую часть траектории, необходимо усовершенствовать сам ПА, т.е. учесть особенность в точке $\lambda = 0$, но это уже выходит за рамки данной работы.

Согласно предложенному методу аналитического продолжения по k приведены вычисления волновых функций а- и с-состояний для потенциала прямоугольной ямы (с параметрами (4.3)). В каждом случае вычислялись и сравнивались три варианта:

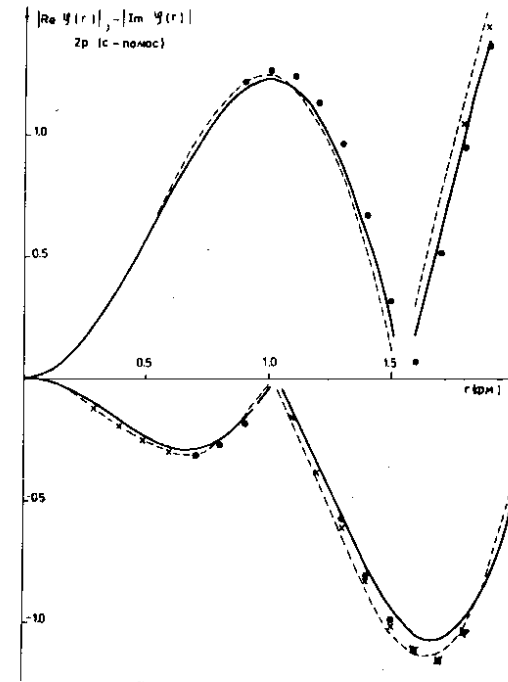


Рис. 3. Волновая функция 2p-состояния (с-полос) в прямоугольной яме с $\beta_0 = 3.5$. (Пояснения в тексте).

- (а) точные волновые функции для точных k_n , полученные из известных аналитических выражений;
- (б) точные волновые функции для k_n , полученных с помощью диагональных ПА;
- (в) волновые функции, рассчитанные с помощью аналитического продолжения через диагональные ПА, для k_n , полученных также с помощью ПА того же порядка. Некоторые результаты приведены на рисунках 2-4. В частности, на рисунке 2 показана волновая функция 3s-состояния (с-полос). Сплошная кривая — точная волновая функция (вариант (а)). В этом случае в варианте (б) все кривые, соответствующие ПА k_n порядка от [3,3] до [7,7], практически сливаются с точной кривой. В варианте (в) кривые, соответствующие

ПА порядка [6,6] и [7,7], совпадают с точной. В случае ПА порядка [5,5] точки, не совпадающие с точной кривой, показаны крестиками, а в случае ПА порядка [3,3] соединены ломаной линией. На рисунке 3 показана волновая функция 2ρ -состояния (также с α -полос). Точная волновая функция (вариант а) – сплошная кривая. Штриховая линия представляет волновую функцию в варианте (б) для ПА k_n порядка [7,7], когда использовалось точное значение λ_0 . Крестики показывают не совпадающие с точной кривой точки в варианте (в) с ПА порядка [7,7] и точными λ_0 . Соответствующие точки в варианте (в), когда λ_0 вычислялось также с помощью ПА порядка [7,7], представлены черными кружочками. Волновая функция 1ρ -состояния (α -полос) показана на рисунке 4. Здесь точная волновая функция (вариант (а)) также представлена сплошной кривой. Рассчитанные в варианте (в) с точными λ_0 волновые функции на рисунке сливаются с точной для ПА, начиная с порядка [4,4] и выше. В то же время при использовании λ_0 , вычисленного с помощью ПА, получаем менее точный результат. Так, на рисунке 4 показаны случаи [7,7] ПА (черные кружочки), [6,6] ПА (квадратики) и [3,3] ПА (крестики). Это

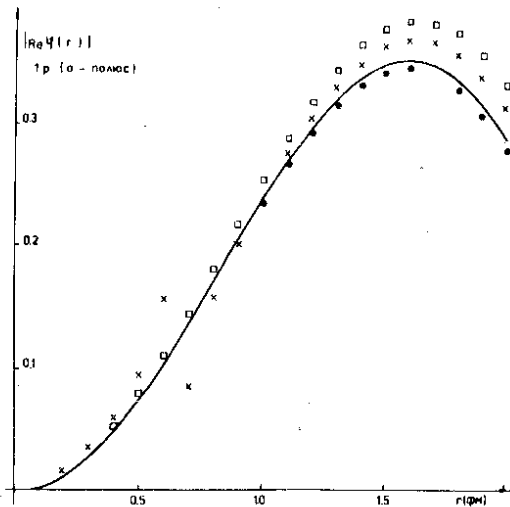


Рис. 4. Резонансная волновая функция 1ρ -состояния (α -полос) в прямоугольной яме с $\beta_0 = 3.5$. (Пояснения в тексте).

неудивительно, т.к. в этом случае сами k_n лежат дальше от точного значения (см. таблицу I). Надо отметить, что в ряде случаев (главным образом для α -полосов) в некоторых точках z наблюдаются неустойчивости (например, [7,7] ПА в точке $z = 1.7$ фм или [3,3] ПА в точках $z = 0.6$ фм и 0.7 фм на рисунке 4), которые связаны с указанными особенностями самих ПА. Кроме того, имеются случаи (например, 2ρ -состояние (α -полос)), когда ни один из порядков ПА, вплоть до [7,7], не дал результата, хотя бы отдаленно напоминающего по формуле волновую функцию.

Таким образом, для ζ -полосов в целом метод аналитического продолжения с помощью ПА позволяет получать положения полюсов и волновые функции с хорошей точностью. В то же время при нахождении α -полосов необходима осторожность и дополнительный контроль (проверка сходимости результата по порядку ПА, наблюдение за поведением нулей и полюсов ПА при изменении его порядка и т.д.). Кроме того, как видно из сравнения вариантов (а), (б) и (в), для получения

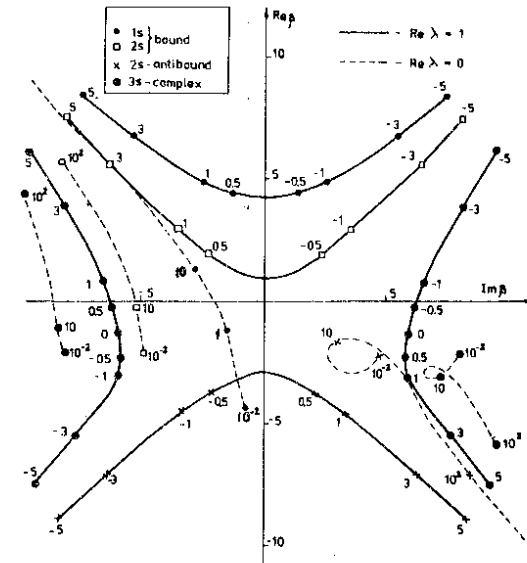


Рис. 5. Траектории полюсов S -матрицы в комплексной прямоугольной яме ($l=0$), полученные с помощью [7,7] ПА, когда $Re \lambda = 1$ (сплошная линия) и $Re \lambda = 0$ (штриховая линия).

Таблица 1. Положения полюсов, вычисленные с помощью ПА различного порядка

тип			[1,1]	[2,2]	[3,3]	[4,4]	[5,5]	[6,6]	[7,7]	точное	λ_0	
A	2s	a	Im β	-2.953	-2.744	-2.847	-2.873	-2.633	-2.907	-2.903	-2.855	0.8477
	3s	c	Re β	5.943	5.963	5.913	5.911	5.910	5.903	5.901	5.894	2.4272
			Im β	-1.156	-1.241	-1.276	-1.328	-1.331	-1.333	-1.331	-1.321	
	4s	c	Re β	9.708	9.735	9.615	9.722	9.715	9.698	9.725	9.653	4.7960
			Im β	-1.229	-1.312	1.383	-1.550	-1.547	-1.618	-1.555	-1.597	
B	1p	a	Im β	-0.332	-0.702	-0.605	-0.653	-0.652	-0.645	-0.640	-0.644	
	2p	c	Re β	4.764	5.138	5.127	4.958	4.955	4.895	4.907	4.791	
			Im β	-1.503	-1.280	-1.282	-1.526	-1.544	-1.482	-1.481	-1.399	
	3p	c	Re β	8.870	8.832	8.798	8.814	8.806	8.802	8.789	8.452	
			Im β	-1.749	-1.195	-1.252	-1.432	-1.427	-1.424	-1.421	-1.769	
B	1p	a	Im β	-1.048	-1.934	-0.788	-2.289	-0.652	-0.575	-0.658		
	2p	c	Re β	3.545	4.950	5.171	5.054	5.018	4.966	4.865		
			Im β	-0.159	-1.278	-1.372	-1.351	-1.499	-1.599	-1.649	см. Б	
	3p	c	Re β	5.881	8.792	8.810	8.810	8.946	8.820	8.835		
		Im β	-0.211	-1.338	-1.243	-1.243	-1.522	-1.431	-1.477			

24

Таблица 2. Значения пороговой постоянной λ_0 , вычисленные с помощью ПА различного порядка

тип		[1,1]	[2,2]	[3,3]	[4,4]	[5,5]	[6,6]	[7,7]	точное
1p	в-а	0.8228	0.8095	0.8073	0.8066	0.8063	0.8064	0.8059	0.8057
2p	с	3.2372	3.2264	3.2244	3.2237	3.2233	3.2233	3.2232	3.2227
3p	с	7.2671	7.2551	7.2530	7.2522	7.2518	7.2515	7.2513	7.2511

25

Литература.

1. Fano U. Phys.Rev., 1961, 124, 1866.
2. Bloch C. Many-body description of nuclear structure and reactions. Academic Press. N.Y., 1966.
3. Mahaux C. and Weidenmüller H.A. Shell-model approach to nuclear reactions. North-Holland, Amsterdam, 1969.
4. Bang J. e.a. Nucl.Phys., 1976, 264, 157.
5. Банг Е., Гареев Ф.А., Иванова С.П., ЭЧАЯ, 1978, т.9, в.2, 286.
6. Гареев Ф.А. и др. ЯФ, 1976, 24, 938.
7. Bang J., Gareev F.A., Gizzatkulov M.H., Goncharov S.A., Preprint JINR, E4-11377, Dubna, 1978; Preprint JINR, E4-11378, Dubna, 1978.
8. Buck B., Hill A.D. Nucl.Phys., 1967, A95, 271.
9. Marangoni M., Saruis A.M. Nucl.Phys., 1969, A132, 649.
10. Barz H.W. e.a. Nucl.Phys., 1977, A275, 111.
11. Raynal J. e.a. Nucl.Phys., 1967, A101, 369.
12. Birkholz J. e.a. Nucl.Phys., 1972, A189, 385.
13. Bolsterli e.a. Phys.Rev., 1972, C5, 1050.
14. Eisenbud L., Wigner E.P., Phys.Rev., 1947, 72, 29.
15. Kapur P.L., Peierls R.E., Proc.Roy.Soc., 1938, A166, 277.
16. Meetz K., Journ. Math.Phys., 1962, 3, 690.
17. Sasakawa T., Nucl.Phys., 1971, A160, 321.
18. Bang J., Gareev F.A. Preprint JINR, E2-10624, Dubna, 1977; Preprint JINR, E2-10625, Dubna, 1977.
19. Gamow G., Z. Phys., 1928, 51, 204.
20. Peierls R.E., Proc.Roy.Soc., 1959, A253, 16.
21. Humblet J., Rosenfeld L., Nucl.Phys., 1961, A26, 329.
22. Berggren T., Nucl.Phys., 1968, A109, 265.
23. Garcia-Calderon G., Nucl.Phys., 1976, A261, 130.
Garcia-Calderon G., Peierls R.E., Nucl.Phys., 1976, A265, 443.
24. Нуссенцвейг Х.М. Причинность и дисперсионные соотношения. Перевод с англ., "Мир", М., 1976.
25. Humblet J. Nucl.Phys., 1964, A50, 1.
26. Bang J., Gareev F.A., Preprint JINR, E4-11902, Dubna, 1978.
27. Kukulín V.I., Krasnopol'sky V.M., J. Phys.A:Math.Gen.1977,10,233.
28. Krasnopol'sky V.M. and Kukulín V.I. In: Proceed. VI Int.Conf., Few-Body Problem, Graz, 1978.

29. Багдалиян А.М., Симонов Ю.А. ЯФ, 1965, 17, 44Г.
30. Gardy B.C., Phys.Lett., 1977, 64A, 193.
31. Bransed B.H., Phys.Lett., 1977, 61A, 145.
32. Бунатян Г.Г. Препринт ОИЯИ, P4-11004, Дубна, 1977; ЯФ, 1978, 28, 360.
33. Добрынин Ю.Л., С.В.Толоконников, Фаянс С.А. Препринт ИАЭ-2593, Москва, 1975.
34. Bang J., Gareev F.A., Puzynin I.V., Jamalejev R.M. Nucl.Phys., 1976, A261, 59.
35. Nazi A.U., Taylor H.S., Phys.Rev., 1970, A1, 1109.
36. Garside L., K.McDonald. Phys.Rev., 1968.
37. Островский В.Н., Соловьев В.А. ЖЭТФ, 1972, 62, 167.
38. Мотт Н., Месси Г. Теория атомных столкновений. Перевод с англ. Изд-во иностр. лит., М., 1951.
39. Базь А.И., Зельдович Я.Б., Переломов А.М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. "Наука", М., 1971.
40. Milary e.a., Lett.Nuov.Cim., 1977, 19, 509.
41. В. де Альфаро, Редже Т. Потенциальное рассеяние. Перевод с англ., "Мир", М., 1966.
42. Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц. Перевод с англ., "Мир", М., 1969.
43. Тейлор Д. Теория рассеяния. Перевод с англ., "Мир", М., 1975.
44. Демков Ю.Н., Друкарев Г.Ф. ЖЭТФ, 1965, 49, 691.
45. Nussenzweig H.M., Nucl.Phys., 1959, 11, 499.
46. Feynman R.P., Phys.Rev., 1939, 56, 340 ; Hellmann H. Einführung in die Quantenchemie (Leipzig and Vienna: Denticke), 1937.
47. Светников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной, М., 1967.
48. Baker G.A. Advances in Theoretical Physics, ed. K.A.Bruckner. Academic-Press., N.Y.-London, 1965, v.1.
49. Yndurain F.J. Ann.Phys., 1973, 75, 171.
50. Romo W.J. Nucl.Phys., 1968, A116, 618.
51. Зельдович Я.Б. ЖЭТФ, 1960, 39, 776.
52. Joffily S. Nucl.Phys., 1973, A215, 301.

Рукопись поступила в издательский отдел
1 ноября 1976 года.