ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р4 - 11374

К.И.Иванов, А.Т.Маринов

МЕТОД
ФАЗОВЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ОПИСАНИЯ РАССЕЯНИЯ НА НЕЛОКАЛЬНЫХ ПОТЕНЦИАЛАХ, ДОПУСКАЮЩИХ РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ В СФЕРОИДАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

1978

P4 - 11374

К.И.Иванов, А.Т.Маринов

МЕТОД ФАЗОВЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ОПИСАНИЯ РАССЕЯНИЯ НА НЕЛОКАЛЬНЫХ ПОТЕНЦИАЛАХ, ДОПУСКАЮЩИХ РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ В СФЕРОИДАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

Направлено в ТМФ

Иванов К.И., Маринов А.Т. P4 - 11374

Метод фазовых функций для описания рассеяния
на нелокальных потенциалах, допускающих разделение
переменных в сфероидальных координатах

Целью этой работы является решение задачи об определении амплитуды рассеяния на нелокальных потенциалах, допускающих разделение переменных в сфероидальных координатах. Для достижения этой цели использован метод фазовых функций, приспособленный подходящим образом к рассматриваемой проблеме. В случае, когда потенциальные функции, входящие в ядро нелокального потенциала, являются сепарабельными, задача решена в окончательном виде.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Ivanov K.I., Marinov A.T. P4 - 11374

The Variable Phase Shift Method for Scattering on
Nonlocal Potentials Allowing Separation of Variables
in Spheroidal Coordinates

The solution of the problem of the scattering amplitude on nonlocal potentials allowing separation of variables in spheroidal coordinates is discussed, with application of the variable phase shift method.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

1. Взаимодействие частицы, рассеивающейся в поле двух неподвижных силовых центров, обычно описывается потенциалом $U(r)$, который в вытянутых сфероидальных координатах ξ, η, ϕ имеет следующий вид /1-3/:

$$U(\vec{r}) = \frac{v(\xi) + s(\eta)}{f^2(\xi^2 - \eta^2)} . \qquad /1/$$

В этой формуле $v(\xi)$ и $s(\eta)$ - функции только одной переменной, соответственно ξ и η, а f - половина расстояния между фокусами сфероидальной системы координат, выбранными так, чтобы они совпадали с силовыми центрами. В нашем рассмотрении, которое относится не только к случаю кулоновского взаимодействия рассеивающейся частицы с каждым из центров, понятие силовой центр сохраняется только условно: для точки со сфероидальными координатами $\xi = 1$, $\eta = \pm 1$, где потенциал /1/, вообще говоря, имеет особенность.

Как показано в работах /4,5/, метод фазовых функций можно с успехом использовать для решения задачи рассеяния на потенциалах вида /1/. В настоящей работе рассматривается дальнейшее обобщение взаимодействия /1/, к которому также можно применить этот метод. Это обобщение приводит к нелокальному потенциалу, частным случаем которого является потенциал вида /1/. Когда нелокальный потенциал является сепарабельным, решение двухцентровой задачи сводится к решению линейной системы. Такой подход использован в /6/. В частном случае рассматриваемого нами нелокального потенциала, когда появляются сепарабельные ядра в соответствующих интегральных уравнениях, в ядре потенциала может быть бесконечно много членов. Кроме того, зависимость потенциала от угловой переменной η не связана с зависимостью от η той части потенциала, в которой участвуют произвольные функции ξ.

Чтобы определить вид рассматриваемого нами нелокального потенциала, заранее найдем собственные решения и собственные значения следующей задачи Штурма-Лиувилля:

$$\frac{d}{d\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{d\Sigma(\eta)}{d\eta}\right] + \left(A - h_0^2\eta^2 - \frac{m^2}{1-\eta^2}\right)\Sigma(\eta) =$$

$$= \int_{-1}^{+1} s(\eta,\eta')\,\Sigma(\eta')\,d\eta', \quad m = 0,1,\ldots,\ -1 \le \eta \le 1,$$

$$|\Sigma(-1)| < \infty, \quad |\Sigma(+1)| < \infty, \qquad /2/$$

где A и h_0 - константы, а $s(\eta,\eta') = s(\eta',\eta)$ - реальная функция, определенная почти всюду в квадрате $-1 \le \eta,\eta' \le 1$. Для широкого класса функций $s(\eta,\eta')$ существуют собственные решения $\Sigma_{m\ell}(h_0;\eta)$ $(\ell = m, m+1,\ldots)$ задачи /2/. Соответствующие собственные значения $A_{m\ell}(h_0)$ нумеруем так, чтобы число $n_{m\ell} = \ell - m$ равнялось числу нулей функций $\Sigma_{m\ell}$ на интервале $(-1,1)$. Легко установить, что функции $\Sigma_{m\ell}$ ортогональны в интервале $[-1, 1]$. Если система этих функций является полной в пространстве $L_2[-1, 1]$, то нормируя их, можно утверждать, что система функций

$$Y_{m\ell}(h_0;\vec{n}) \equiv Y_{m\ell}(h_0;\eta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\phi}\,\Sigma_{|m|\ell}(h_0;\eta),$$

$$\ell = 0, 1, \ldots,\ m = 0, \pm 1, \ldots, \pm\ell, \qquad /3/$$

также является полной и ортонормированной на единичной сфере.

Мы рассматриваем нелокальный потенциал взаимодействия частицы с массой 1/2 с двумя центрами, имеющий ядро

$$V(\vec{r},\vec{r}\,') = \sum_\lambda Y_\lambda(h_0;\vec{n})Y^*_\lambda(h_0;\vec{n}\,')\frac{v_\lambda(\xi,\xi')}{f^5(\xi^2-\eta^2)(\xi'^2-\eta'^2)} + \qquad /4/$$

$$+\frac{s(\eta,\eta')\delta(\xi-\xi')\delta(\phi-\phi')}{f^5(\xi^2-\eta^2)(\xi'^2-\eta'^2)}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}, \quad \vec{n}\,' = \frac{\vec{r}\,'}{|\vec{r}\,'|},$$

где $v_\lambda(\xi,\xi')$ - произвольные функции, определенные при $\xi,\xi' \ge 1$ и удовлетворяющие некоторым общим условиям, а λ - обозначение для системы из двух индексов m, ℓ. Для такого потенциала возможно разделение переменных в уравнении Шредингера для частицы с импульсом $\vec{k}$ $(\hbar = 1)$. Если использовать разложение волновой функции частицы по функциям /3/

$$\psi^{(+)}(\vec{k},\vec{r}) = \sum_\lambda \phi^{(+)}_\lambda(\vec{k};\xi)Y_\lambda(h_0;\eta,\phi), \quad h_0 = fk, \quad k = |\vec{k}|,$$

то после разделения переменных для $\phi^{(+)}_\lambda$ получаем уравнение

$$\frac{d}{d\xi}\left[(\xi^2-1)\frac{d\phi^{(+)}_\lambda}{d\xi}\right] + \left[h_0^2\xi^2 - A_\lambda(h_0) - \frac{m^2}{\xi^2-1}\right]\phi^{(+)}_\lambda =$$

$$= \int_1^\infty v_\lambda(\xi,\xi')\phi^{(+)}_\lambda(\vec{k};\xi')d\xi', \quad A_\lambda(h_0) = A_{|m|\ell}(h_0). \qquad /5/$$

Для рассматриваемого нами нелокального потенциала возможно осуществить разложение амплитуды рассеяния по парциальным амплитудам и использовать метод фазовых функций для их определения. Этот метод предоставляет возможность найти волновые функции, удовлетворяющие уравнениям типа уравнения Шредингера с потенциалом, зависящим от энергии. Полученные результаты могут быть использованы для решения задачи рассеяния релятивистской частицы на двухцентровом потенциале с применением модифицированного приближения Зоммерфельда-Мауэ /7/.

2. В некоторых простых случаях собственные функции $\Sigma_{m\ell}$ выражаются через вытянутые угловые сфероидальные функции $\bar{S}_{m\ell}(h_0;\ \eta)$, определенные в /2/, а соответствующие собственные значения $A_{m\ell}$ - через собственные значения $\lambda_{m\ell}(h_0)$, соответствующие функциям $\bar{S}_{m\ell}(h_0;\eta)$. В общем случае, если $s(\eta,\eta')$ - абсолютно интегрируемая в квадрате $-1 \le \eta,\eta' \le 1$ функция, собственные значения $A_{m\ell}$ могут быть определены из уравнения:

$$\det\{[A - \lambda_{m\ell'}(h_0) - h_0^2]\delta_{\ell'\ell''} - \Gamma^m_{\ell'\ell''}(h_0)\} = 0, \ell',\ell'' = m, m+1,\ldots,$$

$$\Gamma^m_{\ell'\ell''}(h_0) = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \bar{S}_{m\ell'}(h_0;\eta)s(\eta,\eta')\bar{S}_{m\ell''}(h_0;\eta')d\eta d\eta' = \Gamma^m_{\ell''\ell'}(h_0).$$

Когда потенциальная функция $s(\eta,\eta')$ сепарабельна и имеет вид

$$s(\eta,\eta') = \sum_{k=1}^{N} \beta_k \sigma_k(\eta)\sigma_k(\eta'), \qquad /6/$$

где β_k - константы, а N - натуральное число, то собственные значения определяются из уравнения

$$\det\{\delta_{kk'} - \beta_{k'} \sum_{\ell''=m}^{\infty} \frac{F^k_{m\ell''}(h_0)F^{k'}_{m\ell''}(h_0)}{A - \lambda_{m\ell''}(h_0) - h_0^2}\} = 0,\ k,k' = 1,\ldots,N,$$

$$F^k_{m\ell}(h_0) = \int_{-1}^{+1} \sigma_k(\eta)\bar{S}_{m\ell}(h_0;\eta)d\eta.$$

Если известны собственные значения $A_{m\ell}(h_0)$, то могут быть определены коэффициенты разложений собственных функций $\Sigma_{m\ell}$ по функциям $\bar{S}_{m\ell}$.

Собственные функции Σ_λ и собственные значения A_λ можно определить и при помощи однородных интегральных уравнений Фредгольма второго рода, в ядрах которых содержатся функции, являющиеся решениями дифференциального уравнения для сфероидальных функций.

3. Взаимодействие, описываемое нелокальным потенциалом с ядром /4/, можно рассматривать как аддитивное. Ясно, что в амплитуде рассеяния будут участвовать фазы, соответствующие рассеянию только на второй части потенциала, в которую входит функция $s(\eta,\eta')$. Чтобы определить эти фазы, нужно рассмотреть радиальное сфероидальное уравнение

$$(\xi^2 - 1)\frac{d^2y}{d\xi^2} + [h_0^2\xi^2 - A_\lambda(h_0) - \frac{m^2 - 1}{\xi^2 - 1}]y = 0,\ \xi \ge 1,\ m = 0,1,\ldots \qquad /7/$$

Это уравнение имеет одно регулярное при $\xi=1$ решение $U_\lambda(h_0;\xi)$, которое определяется условиями

$$U_\lambda(h_0;\xi) = O[(\xi - 1)^{\frac{m+1}{2}}],\ \xi \to 1,$$

$$U_\lambda(h_0;\xi) \underset{\xi\to\infty}{=} \cos[h_0\xi + \Lambda_\lambda(h_0)],\ |\arg h_0| < \pi,$$

где $\Lambda_\lambda(h_0)$ -искомые фазы. Фазы Λ_λ и решение U_λ можем найти, используя разложение этого решения по функциям Бесселя /8,9/, после того как определен характеристический показатель уравнения для сфероидальных функций при известных собственных значениях A_λ. Этот показатель может быть определен методом, данным в /9,10/. Фазы Λ_λ могут быть найдены и методом фазовых функций.

Уравнение /7/ имеет два нерегулярные при $\xi = 1$ решения $W_\lambda^{(\pm)}(h_0;\xi)$, для которых имеют место асимптотические формулы

$$W_\lambda^{(\pm)}(h_0;\xi) \underset{\xi\to\infty}{\approx} \exp[\pm i(h_0\xi + \Delta_\lambda)],\ -\pi < \pm\arg h_0\xi < 2\pi.$$

Эти решения также могут быть найдены из соответствующих интегральных уравнений или путем разложения по функциям Бесселя решений первого рода уравнения для сфероидальных функций /8,9/.

4. Решением уравнения Шредингера с нелокальным потенциалом с ядром /4/ является функция

$$\psi^{(+)}(\vec{k},\vec{r}) = \sum_\lambda \frac{4\pi i e^{i\Delta_\lambda}}{h_0\sqrt{\xi^2-1}}\, \psi_\lambda^{(+)}(h_0;\xi) Y_\lambda(h_0;\vec{n}) Y^*_\lambda(h_0;-\vec{n}_0),$$

$$\vec{n} = \vec{r}/|\vec{r}|,\qquad \vec{n}_0 = \vec{k}/|\vec{k}|,$$

где $\psi_\lambda^{(+)}(h_0;\xi)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\psi_\lambda^{(+)}(h_0;\xi) = U_\lambda(h_0;\xi) +$$

$$+ \frac{f}{4\pi}\int_1^\infty\int_1^\infty \mathcal{G}_{1\lambda}(h_0;\xi,\xi')v_\lambda(\xi',\xi'')\sqrt{\frac{\xi^2-1}{\xi''^2-1}}\,\psi_\lambda^{(+)}(h_0;\xi'')d\xi' d\xi'',$$

$$\mathcal{G}^{(+)}_{1\lambda}(h_0;\xi,\xi') = \frac{4\pi}{i f h_0}\,\frac{U_\lambda(h_0;\xi_<)W_\lambda^{(+)}(h_0;\xi_>)}{\sqrt{(\xi^2-1)(\xi'^2-1)}},$$

$$\xi_< = \min(\xi,\xi'),\qquad \xi_> = \max(\xi,\xi'). \qquad /8/$$

Решение интегрального уравнения /8/ имеет следующую асимптотику:

$$\psi_\lambda^{(+)}(h_0;\xi) \underset{h_0\xi\to\infty}{\approx} \tfrac{1}{2}\{e^{-i(h_0\xi+\Delta_\lambda)} + s_\lambda(h_0)e^{i(h_0\xi+\Delta_\lambda)}\},$$

где

$$s(\lambda) = 1 - \frac{2i}{h_0}\int_1^\infty\int_1^\infty \frac{U_\lambda(h_0;\xi)v_\lambda(\xi,\xi')}{\sqrt{(\xi^2-1)(\xi'^2-1)}}\,\psi_\lambda^{(+)}(h_0;\xi')d\xi d\xi' =$$

$$= 1 + 2ika_\lambda(h_0). \qquad /9/$$

Величины $a_\lambda(h_0)$, определяемые формулой /9/, являются парциальными амплитудами, с помощью которых можно выразить амплитуду рассеяния следующим образом:

$$A(\vec{k}',\vec{k}) = \frac{2\pi i}{k}\{\delta(\vec{n}-\vec{n}_0) + \sum_\lambda e^{2i\Delta_\lambda} Y_\lambda(h_0;\vec{n})Y^*(h_0;-\vec{n}_0)\} -$$

$$- 4\pi\sum_\lambda e^{2i\Delta_\lambda} a_\lambda(h_0)Y_\lambda(h_0;\vec{n})Y^*_\lambda(h_0;-\vec{n}_0),\ \vec{n} = \vec{k}'/|\vec{k}'|.$$

В соответствии с методом фазовых функций положим

$$\psi_\lambda^{(+)}(h_0;\xi) = \tfrac{1}{2}X_\lambda^{(1)}(h_0;\xi)W_\lambda^{(+)}(h_0;\xi) +$$

$$+ X_\lambda^{(2)}(h_0;\xi)U_\lambda(h_0;\xi).$$

Из /8/ для $X_\lambda^{(\alpha)}(h_0;\xi)$ $(\alpha = 1,2)$ получаем систему интегродифференциальных уравнений

$$X_\lambda^{(1)\prime}(h_0;\xi) = -\frac{2i}{h_0}\frac{U_\lambda(h_0;\xi)}{\sqrt{\xi^2-1}}\int_1^\infty \frac{v_\lambda(\xi,\xi')}{\sqrt{\xi'^2-1}}\times$$

$$\times\{\tfrac{1}{2}X_\lambda^{(1)}(h_0;\xi')W_\lambda^{(+)}(h_0;\xi') + X_\lambda^{(2)}(h_0;\xi')U_\lambda(h_0;\xi')\}d\xi',$$

$$X_\lambda^{(2)\prime}(h_0;\xi) = \frac{i}{h_0}\frac{W_\lambda^{(+)}(h_0;\xi)}{\sqrt{\xi^2-1}}\int_1^\infty \frac{v_\lambda(\xi,\xi')}{\sqrt{\xi'^2-1}}\times$$

$$\times\{\tfrac{1}{2}X_\lambda^{(1)}(h_0;\xi')W_\lambda^{(+)}(h_0;\xi') + X_\lambda^{(2)}(h_0;\xi')U_\lambda(h_0;\xi')\}d\xi',$$

$$X_\lambda^{(1)}(h_0;1) = 0,\quad X_\lambda^{(2)}(h_0;\infty) = 1. \qquad /10/$$

Легко видеть, что

$$X_\lambda^{(1)}(h_0;\infty) = 2ika_\lambda(h_0).$$

Решение системы /10/ можно найти, определяя функцию $F_\lambda(h_0;\xi)$ из интегрального уравнения:

$$F_\lambda(h_0;\xi) = \int_1^\infty \frac{v_\lambda(\xi,\xi')}{\sqrt{\xi'^2-1}}U_\lambda(h_0;\xi')d\xi' -$$

$$-\frac{i}{h_0}\int_1^\infty\{\frac{U_\lambda(h_0;\xi')}{\sqrt{\xi'^2-1}}\int_{\xi'}^\infty \frac{v_\lambda(\xi,\xi'')}{\sqrt{\xi''^2-1}}W_\lambda^{(+)}(h_0;\xi'')d\xi'' +$$

$$+\frac{W_\lambda^{(+)}(h_0;\xi')}{\sqrt{\xi'^2-1}}\int_1^{\xi'}\frac{v_\lambda(\xi,\xi'')}{\sqrt{\xi''^2-1}}U_\lambda(h_0;\xi'')d\xi''\}F_\lambda(h_0;\xi')d\xi'. \qquad /11/$$

Уравнение /11/ удобно решать методами теории возмущений.

Для амплитудной функции

$$a_\lambda(h_0;\xi) = \frac{1}{2ik}\frac{X_\lambda^{(1)}(h_0;\xi)}{X_\lambda^{(2)}(h_0;\xi)},\quad a_\lambda(h_0;\infty) = a_\lambda(h_0)$$

получаем интегродифференциальное уравнение

$$\frac{da_\lambda(h_0;\xi)}{d\xi} =$$

$$= -\frac{U_\lambda(h_0;\xi) + ika_\lambda(h_0;\xi)W_\lambda^{(+)}(h_0;\xi)}{kh_0\sqrt{\xi^2-1}}\int_1^\infty \frac{v_\lambda(\xi,\xi')}{\sqrt{\xi'^2-1}}\{U_\lambda(h_0;\xi')+$$

$$+ ika_\lambda(h_0;\xi')W_\lambda^{(+)}(h_0;\xi')\}\times$$

$$\times\exp\{ik\int_{\xi'}^{\xi}\frac{a'_\lambda(h_0;\xi'')W_\lambda^{(+)}(h_0;\xi'')d\xi''}{ika_\lambda(h_0;\xi'')W_\lambda^{(+)}(h_0;\xi'') + U_\lambda(h_0;\xi'')}\}d\xi', \qquad /12/$$

$$a_\lambda(h_0;1) = 0.$$

При определенных общих условиях для потенциальных функций v_λ это уравнение можно решать итерационными методами.

В случае, когда потенциальные функции $v_\lambda(\xi,\xi')$ сепарабельные и имеют вид

$$v_\lambda(\xi,\xi') = \sum_{k=1}^{M} a_k^{(\lambda)} v_{1k}^{(\lambda)}(\xi)v_{2k}^{(\lambda)}(\xi'),$$

где $a_k^{(\lambda)}$ - константы, а M - натуральное число, решение системы /10/ имеет вид

$$X_\lambda^{(1)}(h_0;\xi) = -\frac{2i}{h_0}\sum_{k=1}^{M} a_k^{(\lambda)} C_k^{(\lambda)}(h_0)\, I_{k,1}^{(\lambda)}(h_0;\xi),$$

$$X_\lambda^{(2)}(h_0;\xi) = 1-\frac{i}{h_0}\sum_{k=1}^{M} a_k^{(\lambda)} C_k^{(\lambda)}(h_0) J_{k,1}^{(\lambda)}(h_0;\xi),$$

где константы $C_k^{(\lambda)}$ определяются из линейной системы

$$\sum_{k'=1}^{M} \{\delta_{kk'}+\frac{i}{h_0}\int_1^\infty [I_{k,2}^{(\lambda)\prime}(h_0;\xi)J_{k',1}^{(\lambda)}(h_0;\xi) -$$

$$- J_{k',1}^{(\lambda)}(h_0;\xi)J_{k,2}^{(\lambda)\prime}(h_0;\xi)]d\xi\}C_{k'}^{(\lambda)}(h_0) = I_{k2}^{(\lambda)}(h_0;\infty),$$

$$k = 1,\dots,M,$$

$$I_{k,1,2}^{(\lambda)}(h_0;\xi) = \int_1^\xi \frac{v_{1,2,k}^{(\lambda)}(\xi')}{\sqrt{\xi'^2-1}} U_\lambda(h_0;\xi')d\xi',$$

$$J_{k,1,2}^{(\lambda)}(h_0;\xi) = \int_\xi^\infty \frac{v_{1,2,k}^{(\lambda)}(\xi')}{\sqrt{\xi'^2-1}} W_\lambda^{(+)}(h_0;\xi')d\xi'.$$

Для парциальных амплитуд в этом случае получаем

$$a_\lambda(h_0) = -\frac{1}{kh_0}\sum_{k=1}^{M} C_k^{(\lambda)}(h_0) I_{k,1}^{(\lambda)}(h_0;\infty).$$

Можно сказать, что когда потенциальные функции $v_\lambda(\xi,\xi')$ сепарабельные, определение парциальных амплитуд сводится к решению нескольких интегралов и одной линейной системы. В общем случае амплитудную функцию

можно найти либо решая фазовое уравнение /12/, либо с помощью решения системы интегральных уравнений /10/.

В заключение авторы хотят выразить свою глубокую признательность Л.И.Пономареву, С.Ю.Славянову и И.Т.Тодорову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мотт Н., Месси Г. Теория атомных столкновений. "Мир", М., 1969.*
2. *Комаров И.В., Пономарев Л.И., Славянов С.Ю. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. "Наука", М., 1976.*
3. *Абрамов В.И., Комаров И.В. ТМФ, 1975, 22, с.253.*
4. *Гурков В.И., Яковлев Л. Известия вузов, физика, №6, 1974; Известия вузов, физика, №4, 1975.*
5. *Иванов К.И. ОИЯИ, Р4-11175, Дубна, 1977; Иванов К.И. Доклады юбилейной научной сессии ПУ им. Паисия Хилендарского. Пловдив, Болгария, 1976.*
6. *Gareev F.A., Gizzatkulov M.Ch., Revai J. JINR, E4-10412, Dubna, 1977.*
7. *Bethe H.A., Maximon L.C. Phys.Rev., 1954, 93, p.768-784; Mukherjee S., Chandel S.S. Trieste preprint IC/77/25, Trieste, 1977.*
8. *Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. "Наука", М., 1967.*
9. *Meixner J., Schäfke F.W. Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen. Berlin, Springer, 1954.*
10. *Thornton Greenland P., Greiner W. Theor. Chim. Acta (Berl.), 1976, 42, p.273-291.*

Рукопись поступила в издательский отдел 6 марта 1978 года.