

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



3/IV-78

P4 - 11186

M-473

В.С.Мележик, Л.И.Пономарев

1536 / 2-78

ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА

В μ -МЕЗОМОЛЕКУЛАХ ИЗОТОПОВ ВОДОРОДА

1978

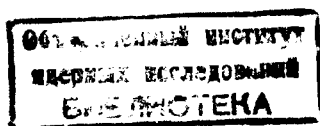
P4 - 11186

В.С.Мележик, Л.И.Пономарев

ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА

В μ -МЕЗОМОЛЕКУЛАХ ИЗОТОПОВ ВОДОРОДА

Направлено в "Physics Letters"



Мележик В.С., Пономарев Л.И.

P4 - 11186

Поляризация вакуума в μ -мезомолекулах изотопов водорода

Найдены поправки на поляризацию электрон-позитронного вакуума к уровням энергии μ -мезомолекул. Вычисленный сдвиг уровней, $\Delta E_{J_V} < 0,5$ эВ, на порядок величины меньше аналогичного сдвига в μ -мезоатомах.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Melezhhik V.S., Ponomarev L.I.

P4 - 11186

Vacuum Polarization in μ Mesic Molecules of Hydrogen Isotopes

The vacuum polarization corrections due to the electron-positron vacuum have been obtained for the energy levels of μ mesic molecules. The calculated level shift, $\Delta E_{J_V} < 0.5$ eV, is by an order of magnitude less than the analogous shift in μ mesic atoms.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

ВВЕДЕНИЕ

Для последовательного описания различных мезомолекулярных процессов ^{1/} необходимо знать уровни энергии μ -мезомолекул. При вычислении скоростей резонансного образования μ -мезомолекул $dd\mu$ и $dt\mu$ нужно знать их уровни энергии с особо высокой точностью: $\sim 0,01$ эВ, т.е. $\sim 10^{-5}$ м.а.е. ^{2/}. В связи с этим при вычислении уровней энергии μ -молекул следует учитывать многочисленные поправки: на поляризацию вакуума, релятивистские поправки, поправки на конечные размеры и поляризацию ядер, на электронное экранирование и т.д.

В μ -мезоатомах водорода поправка на поляризацию электрон-позитронного вакуума является наибольшей и составляет величину $\sim a^3 \left(\frac{m_\mu}{m_e}\right)^2 \sim 10^{-3}$ м.а.е.

~ 1 эВ ^{3,4/}. Простые оценки показывают, что остальные поправки меньше, по крайней мере, на порядок величины: лэмбовский сдвиг $\sim \frac{1}{m_\mu^2} \sim 10^{-4}$ м.а.е. $\sim 0,1$ эВ ^{5/},

тонкая структура $\sim a^2 \sim 10^{-4}$ м.а.е. $\sim 0,1$ эВ, размеры ядер $\sim \left(\frac{a_Y}{a_\mu}\right)^2 \sim 10^{-4}$ м.а.е. $\sim 0,1$ эВ ^{6/}, поляризация ядер - того же порядка и обратна по знаку ^{6,7/},

электронное экранирование $\sim \left(\frac{a_\mu}{a_e}\right)^3 \sim 10^{-6}$ м.а.е. $\sim 10^{-3}$ эВ.

В данной работе вычислены поправки на поляризацию электрон-позитронного вакуума к уровням энергии μ -мезомолекул. Этот расчет представляет также са-

мостоятельный интерес в связи с возможностью экспериментального измерения абсолютной величины поляризационного сдвига уровня в μ -молекуле^{/2/}.

1. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННОГО ВАКУУМА В МЕЗОАТОМАХ

Как известно, кулоновский потенциал $V(r)$ точечного заряда искажается вследствие поляризации вакуума^{/3/}:

$$V(r) + \delta V(r) = -\frac{a}{r} + \delta V(r). \quad (1)$$

Поляризационные поправки к закону Кулона $V(r) = -a/r$ находятся в виде ряда по теории возмущений^{/3,8/}:

$$\delta V(r) = a \cdot A(r) + a^2 B(r) + \dots \quad (2)$$

Коэффициенты $A(r)$ и $B(r)$ были впервые вычислены в работах^{/9/} и^{/10/}. В дальнейшем мы будем учитывать только главный член в разложении (2), который принято называть потенциалом Юлинга^{/11/}:

$$\delta V(r) = a \cdot A(r) = -\frac{a}{r} \cdot \frac{2a}{3\pi} \int_0^\infty \frac{dx}{x^2} \sqrt{x^2 - 1} \left(1 + \frac{1}{2x^2}\right) e^{-2\gamma x r}, \quad (3)$$

$$\text{где } \gamma = \frac{m_e}{a \cdot m}, \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{m_\mu} + \frac{1}{M_a},$$

m_e - масса электрона, m_μ - масса μ -мезона, M_a - масса более тяжелого ядра в мезомолекуле. (Здесь и в дальнейшем используем систему единиц $\hbar = e = m = 1$).

Поляризационный сдвиг уровня энергии мезоатома равен:

$$\Delta E_n = \int |\Psi_n(\vec{r})|^2 \cdot \delta V(r) d\vec{r}. \quad (4)$$

где $\Psi_n(\vec{r})$ - волновая функция μ -мезоатома в состоянии n .

В табл. 1 приведены вычисленные нами поправки $\Delta E_{n\ell}$ к энергетическим уровням $1s, 2s$ и $2p$ состояний мезоатомов p_μ, d_μ и t_μ , а также разности $\Delta E_{2p} - \Delta E_{2s}$.

Таблица 1

Поправки на поляризацию вакуума к уровням энергии μ -мезоатомов

$\Delta E_{n\ell}$ (эВ)	p_μ	d_μ	t_μ
ΔE_{1s} (эВ)	-1,896*	-2,126	-2,212
ΔE_{2s} (эВ)	-0,219*	-0,245	-0,255
ΔE_{2p} (эВ)	-0,0145*	-0,0176	-0,0188
$\Delta E_{2p} - \Delta E_{2s}$ (эВ)	0,205**	0,227***	0,236

* Поправки к уровням энергии мезоатома p_μ , впервые вычисленные Галаниным и Померанчуком^{/4/}, равны соответственно: $\Delta E_{1s} = -1,8$ эВ, $\Delta E_{2s} = -0,2$ эВ, $\Delta E_{2p} = -0,014$ эВ.

** Величина, полученная в работе^{/13/}, равна 0,2049.

*** В работе^{/14/} получена величина 0,2276. Из приведенной таблицы можно найти следующие величины для p_μ -атома:

$$\frac{\Delta E_{2s} - \Delta E_{1s}}{E_2 - E_1} \cdot 10^3 = 0,894; \quad \frac{\Delta E_{2p} - \Delta E_{1s}}{E_2 - E_1} \cdot 10^3 = 0,992.$$

(Здесь: $E_2 - E_1 = \frac{3}{8} \cdot \frac{e^2}{a}$ - разность уровней энергии $n=2$ и $n=1$ мезоатома p_μ), что согласуется с расчетом Фолди и Эриксона^{/12/}, которые для приведенных величин получили значения 0,89 и 1,00 соответственно.

2. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА В μ -МЕЗОМОЛЕКУЛАХ

Смещения уровней μ -мезомолекул определяются выражением

$$\Delta E_{Jv} = \int |\Psi_{Jv}(\vec{r}, \vec{R})|^2 \cdot \delta V(\vec{r}, \vec{R}) d\vec{r} d\vec{R}. \quad (5)$$

Здесь: $\delta V(\vec{r}, \vec{R})$ - потенциал Юинга для μ -мезомолекулы, $\Psi_{Jv}(\vec{r}, \vec{R})$ - волновая функция μ -мезомолекулы во вращательном состоянии J и колебательном состоянии v , определение векторов $\vec{r}, \vec{R}, \vec{r}_a$ и \vec{r}_b показано на рис.1.

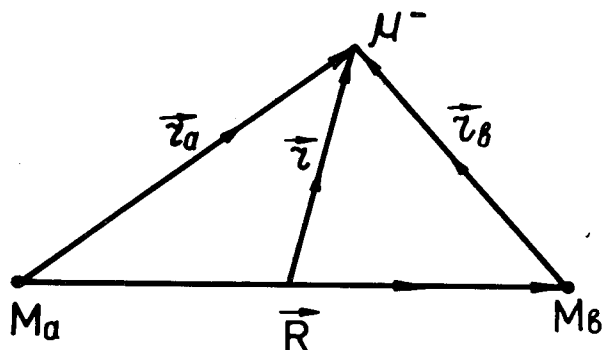


Рис.1. Система координат для μ -мезомолекулы.

Потенциал Юинга $\delta V(\vec{r}, \vec{R})$ для мезомолекулы выбран в виде суммы потенциалов, где поправки $\delta V(\vec{r}_a)$ и $\delta V(\vec{r}_b)$ обусловлены взаимодействием μ -мезона с ядрами a и b , а поправка $\delta V_{ab}(R)$ - взаимодействием ядер a и b :

$$\delta V(\vec{r}, \vec{R}) = \delta V(\vec{r}_a) + \delta V(\vec{r}_b) + \delta V_{ab}(R) = \frac{2a^2}{3\pi} \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} \sqrt{x^2 - 1} \left(1 + \frac{1}{2x^2}\right) \left(-\frac{e^{-2\gamma x r_a}}{r_a} - \frac{e^{-2\gamma x r_b}}{r_b} + \frac{e^{-2\gamma x R}}{R}\right). \quad (6)$$

Это приближение соответствует учету диаграмм, приведенных на рис.2а и 2б. Диаграммы более высокого порядка не учитывались.

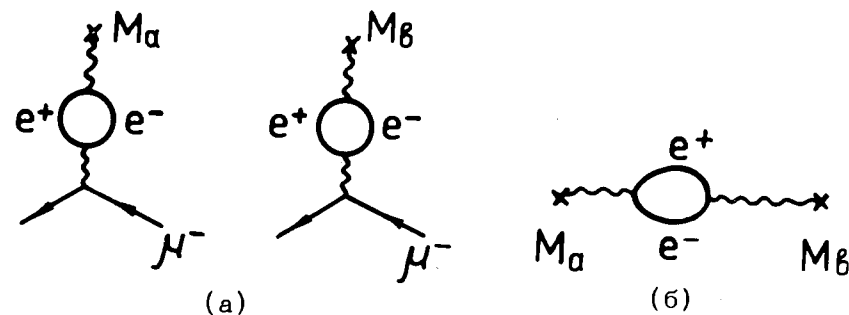


Рис.2. Фейнмановские диаграммы, соответствующие потенциалу Юинга, обусловленному взаимодействием μ -мезона с ядрами (а) и взаимодействием ядер между собой (б).

Волновые функции мезомолекулы водорода в двухуровневом приближении имеют вид:

$$\Psi_{Jv}(\vec{r}, \vec{R}) = \frac{1}{R} [\phi_g(\vec{r}; R) \chi_g^{Jv}(R) + \phi_u(\vec{r}; R) \chi_u^{Jv}(R)] \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad (7)$$

где $\phi_g(\vec{r}; R)$ и $\phi_u(\vec{r}; R)$ - четная и нечетная волновые функции основного состояния задачи двух центров^{16/}. Волновые функции $\chi_g^{Jv}(R)$ и $\chi_u^{Jv}(R)$, представляющие относительное движение ядер a и b , вычислены с относительной точностью $\sim 10^{-4}$, а вклад отброшенных членов $\sim 10^{-2/15/}$.

Выражение для сдвига уровней μ -мезомолекул, следующее из соотношений (5) и (7), можно представить в виде

$$\Delta E_{Jv} = \sum_{i,j} \int_0^\infty \chi_i^{Jv}(R) \chi_j^{Jv}(R) \cdot \delta V_{ij}(R) dR = \Delta E_{Jv}^{(\mu)} + \Delta E_{Jv}^{(Я)}, \quad (8)$$

где

$$\delta V_{ij}(\mathbf{R}) = \int \phi_i(\vec{r}; \mathbf{R}) \delta V(\vec{r}, \vec{R}) \phi_j(\vec{r}; \mathbf{R}) d\vec{r}$$

(i и j принимают значения g и u).

Поскольку добавка $\delta V_{ab}(\mathbf{R})$ к потенциалу $1/R$, обусловленная взаимодействием ядер, не зависит от координат мезона \vec{r} , то в результате усреднения (8) получим:

$$\Delta E_{Jv}^{(j)} = \int_0^\infty \delta V_{ab}(\mathbf{R}) [(\chi_g^{Jv}(\mathbf{R}))^2 + (\chi_u^{Jv}(\mathbf{R}))^2] dR. \quad (9a)$$

В силу симметрии потенциала $\delta V(\vec{r}, \vec{R})$ и волновых функций $\phi_i(\vec{r}; \mathbf{R})$ при замене $\vec{r}_a \rightarrow \vec{r}_b$ справедливы равенства $\delta V_{ug}(\mathbf{R}) = \delta V_{gu}(\mathbf{R}) \equiv 0$, и вследствие этого окончательное выражение для $\Delta E_{Jv}^{(\mu)}$ принимает вид

$$\Delta E_{Jv}^{(\mu)} = \int_0^\infty \{ [\chi_g^{Jv}(\mathbf{R})]^2 \cdot \delta V_{gg}(\mathbf{R}) + [\chi_u^{Jv}(\mathbf{R})]^2 \cdot \delta V_{uu}(\mathbf{R}) \} dR. \quad (9b)$$

(Для μ -молекул с равными массами ядер ($M_a = M_b$) вклад в ΔE дает только $\delta V_{gg}(\mathbf{R})$, поскольку в этом случае $\chi_u(\mathbf{R}) \equiv 0$ /15/).

Из определения (6) следует соотношение

$$\delta V_{ii}(\mathbf{R}) = -\frac{2a^2}{3\pi} \int \frac{dx}{x^2} \sqrt{x^2 - 1} \left(1 + \frac{1}{2x^2}\right) L_{ii}(\mathbf{R}, x), \quad (10)$$

где

$$L_{ii}(\mathbf{R}, x) = \int \phi_i^2(\vec{r}, \mathbf{R}) \left(\frac{e^{-2yx r_a}}{r_a} + \frac{e^{-2yx r_b}}{r_b} \right) d\vec{r}. \quad (11)$$

В настоящее время существует несколько алгоритмов вычисления волновых функций $\phi_i(\vec{r}; \mathbf{R})$ задачи двух центров с точностью 10⁻¹¹/17-20/. В данной работе использован алгоритм /19/, в котором $\phi_i(\vec{r}; \mathbf{R})$ представляется в виде

$$\phi_i(\vec{r}; \mathbf{R}) = N_i(\mathbf{R}) X_i(\xi; \mathbf{R}) Y_i(\eta; \mathbf{R}) \frac{e^{\pm i m \Phi}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (12)$$

где $X_i(\xi; \mathbf{R})$ и $Y_i(\eta; \mathbf{R})$ - радиальные и угловые кулоновские сфероидальные функции /16/, ξ, η, Φ - сфероидальные координаты, $N_i(\mathbf{R})$ - нормировка, определяемая из условия

$$\int |\phi_i(\vec{r}; \mathbf{R})|^2 d\vec{r} = 1.$$

Для $X_i(\xi; \mathbf{R})$ и $Y_i(\eta; \mathbf{R})$ использованы следующие разложения /19/:

$$X_i(\xi; \mathbf{R}) = \left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{\sigma_i} e^{-p_i(\xi-1)} \sum_{s=0}^{\infty} g_s^{(i)} \left(\frac{\xi-1}{\xi+1}\right)^s, \quad (13)$$

$$Y_i(\eta; \mathbf{R}) = \begin{cases} e^{-p_i(1-\eta)} \sum_{s=0}^{\infty} \bar{c}_s^{(i)} (1-\eta)^s, & 0 \leq \eta \leq 1, \\ e^{-p_i(1+\eta)} \sum_{s=0}^{\infty} \bar{c}_s^{(i)} (1+\eta)^s, & -1 \leq \eta \leq 0. \end{cases}$$

Здесь

$$p_i = \frac{R}{2} \sqrt{-2E_i(\mathbf{R})}, \quad \sigma_i = \frac{a}{2p_i} - (m+1), \quad a = 2R,$$

$\bar{c}_{-1} = \bar{c}_1 = \bar{c}_{-1} = 0$, $\bar{c}_0 = \bar{c}_0 = 1$, $\bar{c}_0 = 1$ для g-состояния, $\bar{c}_0 = -1$ для u-состояния.

Энергию связи трех частиц принято отсчитывать от энергии E_a изолированного атома μM_a ($M_a \geq M_b$). Поскольку справедливы равенства $\Delta E_a = \delta V_{gg}(\infty) = \delta V_{uu}(\infty)$, где ΔE_a - поляризационный сдвиг основного состояния атома μM_a , то поляризационный сдвиг уровня μ -мезомолекулы равен:

$$\Delta E_{Jv}^{(\mu)} = \int_0^\infty \{ [\chi_g^{Jv}(\mathbf{R})]^2 [\delta V_{gg}(\mathbf{R}) - \delta V_{gg}(\infty)] + [\chi_u^{Jv}(\mathbf{R})]^2 [\delta V_{uu}(\mathbf{R}) - \delta V_{uu}(\infty)] \} dR. \quad (14)$$

Результаты расчетов приведены в табл.2. На рис.3 изображены функции $\delta V_{gg}(\mathbf{R})$ для $dd\mu$ и $dt\mu$

Таблица 2

Поправки на поляризацию вакуума к уровням энергии μ -мезомолекул изотопов водорода*

	y = 0		y = 1		y = 2	y = 3
	v = 0	v = 1	v = 0	v = 1	v = 0	v = 0
pp μ	-0,338		-0,080			
	0,053		0,016			
pd μ	-0,285		-0,064			
	-0,369		-0,125			
pt μ	0,079		0,029			
	-0,290		-0,096			
pt μ	-0,383		-0,149			
	0,058		0,025			
dd μ	-0,325		-0,124			
	-0,466	-0,062	-0,262	0,002	-0,027	
dd μ	0,069	0,032	0,035	0,006	0,011	
	-0,397	-0,030	-0,227	0,008	-0,016	
dt μ	-0,490	-0,086	-0,304	-0,010	-0,073	
	0,062	0,030	0,037	0,007	0,015	
dt μ	-0,428	-0,056	-0,267	-0,003	-0,058	
	-0,533	-0,135	-0,370	-0,056	-0,150	0,037
tt μ	0,054	0,038	0,041	0,022	0,020	0,007
	-0,479	-0,097	-0,329	-0,034	-0,130	0,044

* Для каждого уровня μ -мезомолекулы приведены три значения поляризационного сдвига в эВ: в первой строке - сдвиг $\Delta E_{Jv}^{(\mu)}$, обусловленный взаимодействием μ -мезона с ядрами (диаграммы 2а), во второй - сдвиг $\Delta E_{Jv}^{(Я)}$, обусловленный взаимодействием ядер (диаграмма 2б), и в третьей - суммарный сдвиг уровня $\Delta E_{Jv}^{(\mu)} = \Delta E_{Jv}^{(\mu)} + \Delta E_{Jv}^{(Я)}$.

При вычислении использованы следующие значения масс частиц: $m_\mu = 206,769$; $M_p = 1836,152$; $M_d = 3670,481$; $M_t = 5496,918$ и значение $Ry = 13,60535$ эВ.

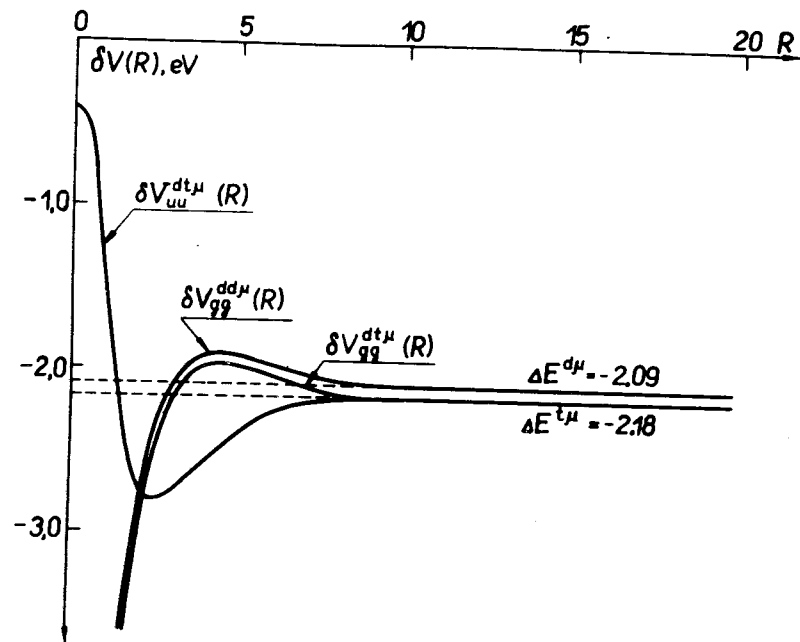


Рис. 3. Потенциалы $\delta V_{gg}(R)$ и $\delta V_{uu}(R)$ для молекулы dt_μ и $\delta V_{gg}(R)$ для молекулы dd_μ . При $R \rightarrow 0$ значения $\delta V_{uu}^{dt_\mu}(0) = -17,002$, $\delta V_{gg}^{dd_\mu}(0) = -16,419$, $\delta V_{uu}^{dt_\mu}(0) = -0,402$ с точностью $\sim \frac{\mu}{2M_a}$ равны поляризационным сдвигам атома с зарядом $Z=2$ и массой $M=M_a+M_b$ в состояниях $1s$ и $2p$ соответственно. Указанная погрешность незначительна, поскольку при $R \rightarrow 0$ $\chi_i^{Jv}(R) \sim R^{J+1}$.

и функции $\delta V_{uu}(R)$ для dt_μ . Видно, что потенциалы $\delta V_{gg}(R)$ для dd_μ и dt_μ аналогичны и имеют правильную асимптотику при $R \rightarrow \infty$. Детали вычислений потенциалов $\delta V_{ii}(R)$ приведены в Приложении.

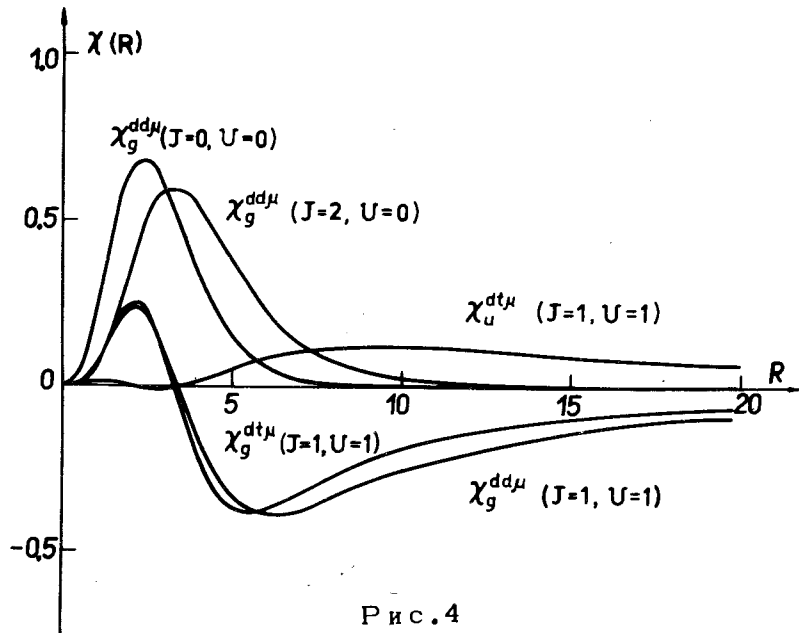


Рис. 4

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе вычислены поправки на поляризацию электрон-позитронного вакуума к уровням энергии μ -мезомолекулы изотопов водорода. Поляризационные сдвиги уровней, $\Delta E_{jv} < 0,5$ эВ, оказались на порядок величины меньше аналогичных сдвигов уровней μ -мезоатомов. Точность вычислений ($\sim 0,01$ эВ) в принципе может быть повышена, но требует существенного увеличения счетного времени на ЭВМ.

Отметим также, что экспериментальная техника, использованная для измерения температурной зависимости скорости резонансного образования μ -молекул^[21], позволяет найти абсолютную величину поляризационного сдвига уровня ($J=1, v=1$) молекулы $dd\mu$ с точностью $\sim 10^{-3}$ эВ. Чтобы извлечь из этих измерений величину сдвига, необходимо вычислить энергию соответствующего уровня $dd\mu$ -молекулы с точностью $\sim 10^{-3}$ эВ

(в настоящее время точность вычислений $\sim 0,1$ эВ)^[2].

В заключение мы выражаем благодарность С.И.Виницкому, И.В.Пузынину, Т.П.Пузынной и Л.Н.Сомову за постоянную помощь в работе, а также И.В.Комарову и Р.Н.Фаустову за обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Подставляя (12) в (10)-(11) и учитывая симметрию $Y_i(\eta; R)$ при замене $\eta \rightarrow -\eta$, получим:

$$\delta V_{ii}(R) = -\frac{2a^2}{3\pi} \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} \sqrt{x^2 - 1} \left(1 + \frac{1}{2x^2}\right) L_{ii}(R, x), \quad (\text{П.1})$$

$$L_{ii}(R, x) = \frac{1}{2} R^2 N_i^2(R) \left\{ \int_1^\infty X_i^2(\xi; R) e^{-\frac{\beta R}{2}\xi} d\xi \int_0^1 Y_i^2(\eta; R) \times \right. \\ \times \left(e^{-\frac{\beta R}{2}\eta} + e^{\frac{\beta R}{2}\eta} \right) d\eta + \int_1^\infty X_i^2(\xi; R) e^{-\frac{\beta R}{2}\xi} d\xi \int_0^1 Y_i^2(\eta; R) \times \\ \times \left(e^{\frac{\beta R}{2}\eta} - e^{-\frac{\beta R}{2}\eta} \right) \eta d\eta \left. \right\}, \quad (\text{П.2})$$

где $\beta = 2\gamma x$.

Используя разложения (13), интегралы (П) можно представить в виде

$$L_{ii}(R, x) = R^2 N_i^2(R) \left\{ \sum_{\nu=0}^r A_\nu \left[-S_\nu^{(0)} \left(p + \frac{\beta R}{2} \right) + 2S_\nu^{(1)} \left(p + \frac{\beta R}{2} \right) \right] \times \right. \\ \times \left[a_\nu T_\nu \left(p + \frac{\beta R}{2} \right) + a_\nu e^{-\beta R} T_\nu \left(p - \frac{\beta R}{2} \right) \right] + \sum_{\nu=0}^r A_\nu S_\nu^{(0)} \left(p + \frac{\beta R}{2} \right) \times \\ \times \left[a_\nu \left(T_\nu \left(p + \frac{\beta R}{2} \right) - T_{\nu+1} \left(p + \frac{\beta R}{2} \right) \right) - e^{-\beta R} a_\nu \left(T_\nu \left(p - \frac{\beta R}{2} \right) - \right. \\ \left. - T_{\nu+1} \left(p - \frac{\beta R}{2} \right) \right) \right] \left. \right\}. \quad (\text{П.3})$$

Здесь

$$A_{\nu} = \sum_{s=0}^r g_{\nu-s}^{(i)} g_s^{(i)}, \quad S_{\nu}^{(y)}(p) = \int_1^{\infty} e^{-p(x-1)\sigma-\nu y} (x-1)^{\nu} dx,$$

$$x = \frac{\xi+1}{2}, \quad \sigma = 2\sigma_i, \quad p_i = 2p_i, \quad (\text{П.4})$$

$$a_{\nu} = \sum_{s=0}^r \tilde{c}_{\nu-s}^{(i)} \tilde{c}_s^{(i)}, \quad T_{\nu}(p) = \int_0^1 e^{-p(1-\eta)} (1-\eta)^{\nu} d\eta,$$

где r определяется заданной точностью вычислений.

Величины $S_{\nu}^{(y)}(p)$ и $T_{\nu}(p)$ вычислялись по рекуррентным соотношениям, приведенным в работе^{/19/}, что дает большую точность вычислений при относительно малой затрате счетного времени. Интеграл (П.1) по x вычислялся по формуле Симпсона шагом $h_x = 0,1$ от 1 до $x_{\max} = 20$.

Точность вычислений $\Delta E_{J\nu}$ выше чем 10^{-2} эВ, поскольку отброшенный член

$$\int_{x_{\max}}^{\infty} [L_{ii}(R,x) - L_{ii}(\infty,x)] \frac{1}{x^2} \sqrt{x^2-1} \left(1 + \frac{1}{2x^2}\right) dx \sim \frac{1}{(\nu x)^2} \sim 10^{-9}.$$

При малых $\tilde{p} = |p - \frac{\beta R}{2}|$ алгоритм, изложенный в^{/19/}, неустойчив, поэтому в случае $\tilde{p} < 1$ для вычисления T_{ν} использовалось разложение

$$T_{\nu}(p) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!(1+\nu+k)!} p^k. \quad (\text{П.6})$$

Вычислительные неустойчивости возникают также при больших отрицательных $\tilde{p} = p - \frac{\beta R}{2}$. Для их устранения

в выражении (П.3) при $R \geq 6$ пренебрегаем членами, пропорциональными $e^{-\beta R}$. Действительно, при $R \geq 6$:

$$e^{-\beta R} \int_0^1 e^{-(p - \frac{\beta R}{2})(1-\eta)} (1-\eta)^{\nu} d\eta = e^{-\left(p + \frac{\beta R}{r}\right) \times} \times \int_0^1 e^{-\left(p + \frac{\beta R}{2}\right)\eta} (1-\eta)^{\nu} d\eta \leq e^{-\left(p + \frac{\beta R}{2}\right)} = 10^{-5}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Gerstein S.S., Ponomarev L.I. Mesomolecular Processes Induced by μ^- and π^- Mesons. In: Muon Physics. Eds. V. Hughes and C.S. Wu, v. III, 141, Academic Press, New York, 1975.
2. Виницкий С.И. и др. Препринт ОИЯИ Р4-10929, Дубна, 1977.
3. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Релятивистская квантовая теория, ч. II, Наука, М., 1971; Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика, Наука, М., 1969.
4. Галанин А.Д., Померанчук И.Я. ДАН СССР, 1952, 86, 251.
5. Иваненко Д.Д., Пустовалов Г.Е. УФН, 1957, 61, 27.
6. Ким Е.Н. Мезонные атомы и ядерная структура. Атомиздат, М., 1975.
7. Старцев С.А., Петрунькин В.А., Хомкин А.Л., ЯФ, 1976, 23, 1233.
8. Zavattini E. Scool "Ettore Majorana", Erice, 24-30, April, 1977.
9. Uehling E.A. Phys. Rev., 1935, 48, 55.
10. Kallen G, Sabry A. K. Danske Vidensk. Selsk. Mat.-Fys. Medd., 1955, 29, p.17.
11. Klarsfeld S. Phys. Lett., 1977, 66B, p.1, 86.
12. Foldy L., Eriksen E., 1954, 95, p.1048.
13. De Giacomo A. Nucl. Phys., 1969, 11B, p.411.

14. Carboni G. Lett. Nuovo Cim., 1973, 7, p.160.
15. Виноцкий С.И., Пономарев Л.И. ЖЭТФ, 1977, 72, 1670.
16. Комаров И.В., Пономарев Л.И., Славянов С.Ю. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции, Наука, М., 1976.
17. Madsen M.M., Peek J.M. Atomic Data, 1971, 2, p.171.
18. Power J. Phil. Trans. Roy. Soc. (London), 1973, 274, p.663.
19. Пономарев Л.И., Пузынина Т.П. Препринт ОИЯИ Р4-5040, Дубна, 1970.
20. Трускова Н.Ф. ОИЯИ, Р11-10207, Дубна, 1976.
21. Быстрицкий В.М. и др. Мезоны в веществе. В кн.: Труды Международного симпозиума по проблемам мезонной химии и мезомолекулярных процессов в веществе, Дубна, 7-10 июня 1977 г., ОИЯИ, Д1,2,14-10908, Дубна 1977, см. также доклад на Международной конференции по физике высоких энергий, Цюрих, 1977.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 декабря 1977 года.