СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р4 - 11175

К.И.Иванов

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПАРЦИАЛЬНЫХ АМПЛИТУД РАССЕЯНИЯ В РЕГУЛЯРНЫХ И СИНГУЛЯРНЫХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЯХ ДВУХ СИЛОВЫХ ЦЕНТРОВ

1978

P4 - 11175

К.И.Иванов

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПАРЦИАЛЬНЫХ АМПЛИТУД РАССЕЯНИЯ В РЕГУЛЯРНЫХ И СИНГУЛЯРНЫХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЯХ ДВУХ СИЛОВЫХ ЦЕНТРОВ

Иванов К.И. P4 - 11175

Об определении парциальных амплитуд рассеяния в регулярных и сингулярных потенциальных полях двух силовых центров

Обсуждается решение задачи об определении нерелятивистских характеристик процесса рассеяния в регулярных и сингулярных полях двух силовых центров, когда соответствующие потенциалы допускают разделение переменных в уравнении Шредингера в вытянутых сфероидальных координатах. Показано, что в случае рассеяния в сингулярном потенциальном поле эта задача сводится к корректно поставленной задаче Коши для одного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Обоснована возможность использования метода формальных рядов для решения задачи рассеяния.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Ivanov K.I. P4 - 11175

On the Determination of Scattering Partial Amplitudes in the Case of Regular and Singular Two-Centre Potential Fields

The problem of determination of the non-relativistic characteristics of the scattering process in the case of regular and singular two-centre fields is discussed. We suppose that the corresponding potentials allow for a separation of variables in the Schrödinger equation in spheroidal co-ordinates. It is shown that the problem reduces to a well determined Cauchy problem for one ordinary first order differential equation. The possibility of using the formal series expansion method for the solution of the scattering problem has been justified.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

I. Введение

Квантовомеханическая задача рассеяния в поле двух силовых центров рассматривается при исследовании рассеяния частиц с достаточно малой массой двухатомными молекулами /I/, диполями /2/ и другими подходящими системами двух связанных частиц. Эту задачу при некоторых условиях можно рассматривать и как шаг к решению определенных квантовомеханических трехчастичных задач. Для описания соответствующих взаимодействий используются модельные потенциалы, приводящие к разделению переменных в уравнении Шредингера в вытянутых сфероидальных координатах ξ, η и φ, которые связаны с декартовыми координатами x, y и z следующими формулами:

$$x = f\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\cos\varphi,\quad y = f\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\sin\varphi,\quad z = f\xi\eta, \tag{I.I}$$

$$\xi\in[1,\infty),\quad \eta\in[-1,1],\quad \varphi\in[0,2\pi).$$

Здесь величину $2f$ принимаем равной расстоянию между двумя центрами. Потенциалы, приводящие к разделению переменных в уравнении Шредингера, которые могут представлять физический интерес в задачах рассеяния, даются следующим общим выражением:

$$U(\vec{r}) = \frac{v(\xi)+s(\eta)}{f^2(\xi^2-\eta^2)} = U_\xi(\vec{r}) + U_\eta(\vec{r}),$$
$$U_\xi(\vec{r}) = \frac{v(\xi)}{f^2(\xi^2-\eta^2)}, \quad U_\eta(\vec{r}) = \frac{s(\eta)}{f^2(\xi^2-\eta^2)}, \qquad (2.I)$$

где v – функция, зависящая только от ξ, а s зависит только от η. Будем считать, что функция $s(\eta)$ такая, что выполняются теоремы существования и единственности решения некоторых задач Штурма-Лиувилля, с которыми встречаемся в нашей работе. Далее будем считать, что функция $v(\xi)$ непрерывна почти всюду в интервале $[1,\infty)$ и удовлетворяет условию: для каждого $\xi_1 > 1$

$$J(\xi_1) = \int_{\xi_1}^{\infty} |v(\xi)| d\xi < \infty. \qquad (R_\infty)$$

Потенциал (2.I) будем называть регулярным, если для любого числа $\xi_2 > 1$

$$J(\xi_2) = \int_1^{\xi_2} |v(\xi)| \, |\ln(\xi-1)|^2 d\xi < \infty, \qquad (R_1)$$

а если функция $v(\xi)$ не удовлетворяет условию (R_1), потенциал (2.I) будем называть сингулярным. Сингулярные потенциалы можно использовать как модельные потенциалы взаимодействия частицы с двумя сингулярными силовыми центрами, поля которых перекрываются, а также в случаях, когда уравнения квазипотенциального типа можно привести к уравнению Шредингера с эффективным сингулярным потенциалом /4,5/.

Фазы рассеяния для потенциала (2.I) можно определить с помощью асимптотического поведения радиальной волновой функции на бесконечности /2,3/. Во втором разделе настоящей работы, рассматривая взаимодействие как аддитивное, выражаемое потенциалом (2.I), парциальные амплитуды можно определить как пределы при $\xi \to \infty$ подходящих решений уравнений Риккати или как аналогичные пределы решений линейных однородных систем из двух обыкновенных дифференциальных уравнений, в соответствии методом фазовых функций /6,I2/. Такой подход позволяет определить ту часть амплитуды рассеяния, которая связана с расходимостью ряда полного

сечения для рассеяния "вперед". В этом разделе получены и формулы для функций Йоста, соответствующие потенциалу U_ξ. В третьем разделе показано, что для получения соответствующих решений можно использовать метод формальных рядов /7/, который дает возможность получить для них приближенные выражения с помощью аппроксимации Паде или других приближенных методов. В случае сингулярного потенциала (раздел IУ) задача об определении парциальных амплитуд сводится к нахождению подходящего решения линейной однородной системы из двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка или к решению задачи Коши для уравнения Риккати. Для ее решения можно использовать метод формальных рядов.

П. Амплитуда рассеяния в случае регулярного потенциала

Рассмотрим рассеяние бесспиновой частицы с массой I/2 и импульсом $\vec{k}$ ($\hbar=1$) в поле двух неподвижных силовых центров, считая, что взаимодействие этой частицы с центрами описывается потенциалом (2.I). Будем предполагать, что нам известны функции

$$Y_\lambda(h_0,\vec{n}) \equiv Y_{m\ell}(h_0,\vec{n}) = e^{im\varphi} \Sigma_{|m|\ell}(h_0,\eta), \qquad (I.2)$$
$$\lambda=(m,\ell),\ \ell=0,1,\ldots,\ m=0,\pm1,\ldots,\pm\ell,\ \ell-|m|=n_\eta,$$

где $h_0 = f|\vec{k}| = fk$, φ и $\theta = \arccos\eta$ – углы, определяющие единичный вектор $\vec{n} = \vec{r}/r$, $(r=|\vec{r}|)$, $\Sigma_{|m|\ell}$ – непрерывные в интервале $[-1,+1]$ собственные решения уравнения

$$\frac{d}{d\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{d\Sigma_{|m|\ell}}{d\eta}\right] + \left[A_\lambda(h_0) - h_0^2\eta^2 - s(\eta) - \frac{m^2}{1-\eta^2}\right]\Sigma_{|m|\ell} = 0, \qquad (2.2)$$

при собственных значениях $A_\lambda(h_0)$ и n_η – число нулей функций Σ_λ в интервале $[-I,+I]$. Функции (I.2) (при известных предположениях относительно функции $s(\eta)$) образуют полную и ортонормированную систему на единичной сфере /2,3/, и в некоторых случаях они выражаются с помощью сфероидальных угловых функций /3,8/. В случае рассеяния на двух неодинаковых кулоновских центрах функции (I.2) рассматриваются в /3,9,I0/.

С помощью функций (I.2), используя регулярное решение $U_\lambda(h_o,\xi)$ уравнения

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}+\left[\frac{h_o^2\xi^2-A_\lambda(h_o)}{\xi^2-1}-\frac{m^2-1}{(\xi^2-1)^2}\right]y=0, \qquad (3.2)$$

определенное условиями

$$U_\lambda(h_o,\xi)=O\left[(\xi^2-1)^{\frac{|m|+1}{2}}\right],\quad \xi\to 1$$
$$U_\lambda(h_o,\xi)\underset{h_o\xi\to\infty}{\approx}\cos\left[h_o\xi+\Delta_{|m|\ell}(h_o)\right], \qquad (4.2)$$

волновые функции $\psi_1^{(\pm)}(\vec{k},\vec{\tau})$ рассматриваемой частицы, соответствующие расходящимся и сходящимся волнам при рассеянии в поле с потенциалом $U_\eta(\vec{\tau})$, представим следующим образом:

$$\psi_1^{(\pm)}(\vec{k},\vec{\tau})=$$
$$=\pm 4\pi i\sum_\lambda \frac{U_\lambda(h_o,\xi)}{h_o\sqrt{\xi^2-1}}\nu_\lambda^{(\pm)}(h_o)\,Y_\lambda^*(h_o,\mp\vec{n}_o)\,Y_\lambda(h_o,\vec{n}), \qquad (5.2)$$
$$\nu_\lambda^{(\pm)}(h_o)=exp\left\{\pm i\,\Delta_{|m|\ell}(h_o)\right\},\quad \vec{n}_o=\vec{k}/k.$$

Здесь $\Delta_{|m|\ell}$ – фазы рассеяния в поле $U_\eta(\vec{\tau})$, которые выражаются через решения $U_\lambda(h_o,\xi)$ уравнения (3.2).

Если воспользоваться асимптотической формулой /2/:

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{\tau}}\underset{r\to\infty}{\approx}-\frac{2\pi i}{kr}\left\{e^{ikr}\delta(\vec{n}-\vec{n}_o)-e^{-ikr}\delta(\vec{n}+\vec{n}_o)\right\} \qquad (6.2)$$

и условием полноты функций (I.2), то получим

$$\psi_1^{(\pm)}(\vec{k},\vec{\tau})\underset{r\to\infty}{\approx}e^{i\vec{k}\cdot\vec{\tau}}\pm$$
$$\pm\frac{2\pi i}{kr}e^{\pm ikr}\left\{\delta(\vec{n}\mp\vec{n}_o)+\sum_\lambda\left[\nu_\lambda^{(\pm)}(h_o)\right]^2Y_\lambda^*(h_o;\mp\vec{n}_o)Y_\lambda(h_o,\vec{n})\right\}. \qquad (7.2)$$

Будем рассматривать взаимодействие, выражаемое потенциалом (2.I), как аддитивное /II/, и величины, относящиеся к потенциалу U_η, будем снабжать индексом I. Для T-матрицы на энергетической поверхности, соответствующей потенциалу (2.I), имеем:

$$T(\vec{k}',\vec{k})=T_1(\vec{k}',\vec{k})+\left(\psi_1^{(-)}(\vec{k}',\vec{\tau}),\,U_\xi(\vec{\tau})\,\psi^{(+)}(\vec{k},\vec{\tau})\right), \qquad (8.2)$$

где волновая функция $\psi^{(+)}$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\psi^{(+)}(\vec{k},\vec{\tau})=\psi_1^{(+)}(\vec{k},\vec{\tau})+$$
$$+\frac{1}{4\pi f^2}\int G_1^{(+)}(h_o;\vec{\tau},\vec{\tau}')\frac{v(\xi')}{\xi'^2-\eta'^2}\psi^{(+)}(\vec{k},\vec{\tau}')d^3\tau', \qquad (9.2)$$

в котором функция Грина $G_1^{(+)}(h_o;\vec{\tau},\vec{\tau}')$ выражается с помощью нерегулярного решения $W_\lambda^{(+)}(h_o,\xi)$ уравнения (3.2), определенного асимптотическим условием

$$W_\lambda^{(+)}(h_o,\xi)\underset{h_o\xi\to\infty}{\approx}exp\left\{i\left(h_o\xi+\Delta_{|m|\ell}(h_o)\right)\right\} \qquad (10.2)$$

посредством следующей формулы:

$$G_1^{(+)}(h_o;\vec{\tau},\vec{\tau}')=$$
$$=\sum_\lambda G_{1\lambda}^{(+)}(h_o;\xi,\xi')\,Y_\lambda(h_o,\vec{n})\,Y_\lambda^*(h_o,\vec{n}'),\quad \vec{n}'=\vec{\tau}'/|\vec{\tau}'|, \qquad (11.2)$$
$$G_{1\lambda}^{(+)}(h_o;\xi,\xi')=$$
$$=-\frac{4\pi i}{f^2k\sqrt{(\xi^2-1)(\xi'^2-1)}}U_\lambda(h_o,\xi_<)\,W_\lambda^{(+)}(h_o,\xi_>), \qquad (12.2)$$
$$\xi_<=min(\xi,\xi'),\quad \xi_>=max(\xi,\xi').$$

Так как величина $T_1(\vec{k}',\vec{k})$ известна, то определение полной T-матрицы приводится к определению второго члена в правой части (8.2), т.е. к определению амплитуды:

$$A_o(\vec{k}',\vec{k})=\frac{-1}{4\pi}\int\psi_1^{(-)*}(\vec{k}',\vec{\tau})\,U_\xi(\vec{\tau})\,\psi^{(+)}(\vec{k},\vec{\tau})d^3\tau. \qquad (13.2)$$

Для полной амплитуды рассеяния получаем

$$A(\vec{k}',\vec{k})=\frac{2\pi i}{k}\left\{\delta(\vec{n}-\vec{n}_o)+\sum_\lambda\left[\nu_\lambda^{(+)}(h_o)\right]^2\times\right.$$
$$\left.Y_\lambda(h_o,\vec{n})\,Y_\lambda^*(h_o,-\vec{n}_o)\right\}+A_o(\vec{k}',\vec{k}),\qquad \vec{n}=\vec{k}'/|\vec{k}'|, \qquad (14.2)$$

и в этом выражении выделена та часть амплитуды, которая расходится для рассеяния "вперед" и "назад".

Уравнение (9.2) удовлетворится, если

$$\psi^{(+)}(\vec{k},\vec{\tau})=\sum_{\lambda}\frac{4\pi i\,\nu_{\lambda}^{(+)}(h_0)}{h_0\sqrt{\xi^2-1}}\psi_{\lambda}^{(+)}(h_0,\xi)Y_{\lambda}(h_0,\vec{n})Y_{\lambda}^{*}(h_0,-\vec{n}_0), \tag{I5.2}$$

где функция $\psi_{\lambda}^{(+)}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\psi_\lambda}{d\xi^2}+\left[\frac{h_0^2\xi^2-A_\lambda(h_0)-v(\xi)}{\xi^2-1}-\frac{m^2-1}{(\xi^2-1)^2}\right]\psi_\lambda=0, \tag{I6.2}$$

$$\psi_{\lambda}^{(+)}(h_0,\xi)=U_\lambda(h_0,\xi)+$$
$$+\frac{f}{4\pi}\int_1^\infty\sqrt{\frac{\xi^2-1}{\xi'^2-1}}\,G_{12}^{(+)}(h_0;\xi,\xi')v(\xi')\psi_{\lambda}^{(+)}(h_0,\xi')d\xi' \tag{I7.2}$$

и краевым условиям

$$\psi_{\lambda}^{(+)}(h_0,\xi)=O\left[(\xi^2-1)^{\frac{|m|+1}{2}}\right],\ \xi\to 1, \tag{I8.2}$$

$$\psi_{\lambda}^{(+)}(h_0,\xi)\underset{h_0\xi\to\infty}{\approx}\frac{\nu_\lambda^{(-)}}{2}e^{-ih_0\xi}+\frac{\nu_\lambda^{(+)}}{2}e^{ih_0\xi}S_\lambda(h_0),$$
$$S_\lambda(h_0)=1-\frac{2i}{h_0}\int_1^\infty\frac{U_\lambda(h_0,\xi)}{\xi^2-1}v(\xi)\psi_\lambda^{(+)}(h_0,\xi)d\xi= \tag{I9.2}$$
$$=1+2ika_\lambda(h_0).$$

Величины $a_\lambda(h_0)$ в выражении (I9.2) - парциальные амплитуды, соответствующие амплитуде (I3.2), и определяются разложением:

$$A_0(\vec{k}',\vec{k})=$$
$$=-4\pi\sum_\lambda\left[\nu_\lambda^{(+)}(h_0)\right]^2a_\lambda(h_0)Y_\lambda(h_0,\vec{n})Y_\lambda^{*}(h_0,-\vec{n}_0)= \tag{20.2}$$
$$=\frac{2\pi i}{k}\sum_\lambda\left[\nu_\lambda^{(+)}(h_0)\right]^2\left[S_\lambda(h_0)-1\right]Y_\lambda(h_0,\vec{n})Y_\lambda^{*}(h_0,-\vec{n}_0).$$

Парциальные амплитуды $a_\lambda(h_0)$ можно определить с помощью функции подходящих частных интегралов следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dX_\lambda^{(\alpha)}(h_0,\xi)}{d\xi}=\sum_{\beta=1}^{2}a_{\alpha\beta,\lambda}(\xi,h_0)X_\lambda^{(\beta)}(h_0,\xi),\ \alpha=1,2, \tag{2I.2}$$

где

$$a_{11,\lambda}=-a_{22,\lambda}=\frac{-iv(\xi)}{h_0(\xi^2-1)}U_\lambda(h_0,\xi)W_\lambda^{(+)}(h_0,\xi),$$
$$a_{12,\lambda}=\frac{-2iv(\xi)}{h_0(\xi^2-1)}U_\lambda^2(h_0,\xi),\quad a_{21,\lambda}=\frac{iv(\xi)}{2h_0(\xi^2-1)}\left[W_\lambda^{(+)}(h_0,\xi)\right]^2. \tag{22.2}$$

Эту систему можно получить, если $\psi_\lambda^{(+)}$ представить в виде

$$\psi_\lambda^{(+)}(h_0,\xi)=U_\lambda(h_0,\xi)X_\lambda^{(2)}+\frac{1}{2}W_\lambda^{(+)}(h_0,\xi)X_\lambda^{(1)} \tag{23.2}$$

и принять во внимание (I6.2). Будем искать решения этой системы, удовлетворяющие условиям:

$$X_\lambda^{(1)}(h_0,\xi)=O\left[(\xi-1)^m\int_1^\xi v(\xi')d\xi'\right],\ X_\lambda^{(2)}(h_0,\xi)=O(1),\ \xi\to 1. \tag{24.2}$$

Можно доказать, что любое решение (2I.2), удовлетворяющее условиям (24.2), пропорционально решению $\tilde{X}_\lambda^{(\alpha)}(h_0,\xi)$, для которого

$$\tilde{X}_\lambda^{(\alpha)}(h_0,1)=\delta_{\alpha 2},\quad(\alpha=1,2). \tag{25.2}$$

С помощью этого решения парциальные амплитуды $a_\lambda(h_0)$ можно выразить следующим образом:

$$2ika_\lambda(h_0)=S_\lambda(h_0)-1=\lim_{\xi\to\infty}\frac{\tilde{X}_\lambda^{(1)}(h_0,\xi)}{\tilde{X}_\lambda^{(2)}(h_0,\xi)}. \tag{26.2}$$

Посредством функции $\tilde{X}_\lambda^{(\alpha)}$ можно определить и функции Йоста $f_\lambda^{(\pm)}(h_0)$, отношение которых равно S_λ^{-1} и которые определяются формулой

$$f_\lambda^{(\pm)}(h_0)=\mp\frac{i}{h_0}e^{\pm i\Delta_{|m|\ell}}W(\varphi_\lambda,f_\lambda^{(\pm)})\lim_{\xi\to 1}\frac{U_\lambda(h_0,\xi)}{(\xi-1)^{\frac{|m|+1}{2}}}. \tag{27.2}$$

В (27,2) $W(f,g)$ - определитель Вронского функций f и g, а φ_λ и $f_\lambda^{(\pm)}$- соответственно регулярное и нерегулярное решения уравнения (I6.2), определяющиеся условиями:

$$\lim_{\xi\to 1}(\xi-1)^{-\frac{|m|+1}{2}}\varphi_\lambda(h_o,\xi)=1,\quad \lim_{\xi\to\infty} f_\lambda^{(\pm)}(h_o,\xi)e^{\mp i h_o \xi}=1. \tag{28.2}$$

Для функций Йоста получаем формулы

$$f_\lambda^{(+)}(h_o)=\tilde{X}_\lambda^{(2)}(h_o,\infty),\quad f_\lambda^{(-)}(h_o)=\tilde{X}_\lambda^{(1)}(h_o,\infty)+\tilde{X}_\lambda^{(2)}(h_o,\infty). \tag{29.2}$$

Парциальные амплитуды можно найти согласно (26.2) и с помощью амплитудной функции

$$a_\lambda(h_o,\xi)=\frac{1}{2ik}\tilde{X}_\lambda^{(1)}(h_o,\xi)/\tilde{X}_\lambda^{(2)}(h_o,\xi), \tag{30.2}$$

удовлетворяющей следующему уравнению Риккати:

$$\frac{da_\lambda(h_o,\xi)}{d\xi}=\frac{-v(\xi)}{kh_o(\xi^2-1)}\left\{U_\lambda(h_o,\xi)+ikW_\lambda^{(+)}(h_o,\xi)a_\lambda(h_o,\xi)\right\}^2, \tag{31.2}$$

$$a_\lambda(h_o,1)=0, \tag{32.2}$$

процедура решения которого обсуждается в III разделе.

III. Решения системы (21.2) и уравнения (31.2)

Решения $X_\lambda^{(\alpha)}(h_o,\xi)$ системы (21.2) можно получить несколькими способами. В большинстве случаев успешно можно использовать итерационные разложения функций этого решения, которые сходятся равномерно в любом конечном подинтервале интервала $[1,\infty)$:

$$\tilde{X}_\lambda^{(\alpha)}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi_{\alpha,\lambda}^{(\nu)}(h_o,\xi),\quad (\alpha=1,2), \tag{1.3}$$

где

$$\varphi_{\alpha,\lambda}^{(0)}=\delta_{\alpha 2},$$

$$\varphi_{\alpha,\lambda}^{(\nu)}(h_o,\xi)=\int_1^\infty\sum_{\beta=1}^{2}a_{\alpha\beta,\lambda}(h_o,t)\varphi_{\beta,\lambda}^{(\nu-1)}(h_o,t)dt,\quad \nu=1,2,\ldots \tag{2.3}$$

Если потенциал удовлетворяет условию (R_1), то члены итерационных разложений (1.3) удовлетворяют неравенствам

$$|\varphi_{1,\lambda}^{(\nu)}(h_o,\xi)|\leq\left(\frac{\xi-1}{\xi+1}\right)^{|m|}\frac{1}{\nu!}\left[C_\lambda(h_o)P_m(\xi)\right]^\nu,$$

$$|\varphi_{2\lambda}^{(\nu)}(h_o,\xi)|\leq\frac{1}{2\nu!}\left[C_\lambda(h_o)P_m(\xi)\right]^\nu,$$

$$h_o>0,\quad \xi\geqslant 1,\quad \nu=1,2,\ldots,$$

где $C_\lambda(h_o)$ - подходящие положительные константы, а

$$P_m(\xi)=\int_1^\xi\frac{|v(t)|}{t+1}\left\{1+\delta_{mo}\ln\frac{t+1}{t-1}\right\}^2dt. \tag{3.3}$$

Если потенциал (2.1) удовлетворяет и условию (R_∞), функция (3.3) ограничена в интервале $[1,\infty)$ и тогда

$$\tilde{X}_\lambda^{(\alpha)}(h_o,\infty)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi_{\alpha,\lambda}^{(\nu)}(h_o,\infty).$$

Для решения уравнения (31.2) можно воспользоваться методом формальных рядов /7/ . Если положить

$$a_\lambda(h_o,\xi)-f_\lambda(h_o,\xi)=\frac{iU_\lambda(h_o,\xi)}{kW_\lambda^{(+)}(h_o,\xi)}\equiv-\varphi_\lambda(h_o,\xi),$$

то для f_λ получается интегральное уравнение

$$f_\lambda(h_o,\xi)+G_\lambda[f_\lambda,\xi]=\varphi_\lambda(h_o,\xi), \tag{4.3}$$

где функционал $G_\lambda[f_\lambda,\xi]$ дается формулой

$$G_\lambda[f_\lambda,\xi]=-\frac{1}{f}\int_1^\xi\frac{v(t)}{t^2-1}\left[W_\lambda^{(+)}(h_o,t)\right]^2f_\lambda^2(h_o,t)dt.$$

Решения уравнения (4.3) можно представить в виде:

$$f_\lambda(h_o,\xi)=\frac{\Gamma\exp\{-\int dy\cdot\delta G_\lambda[\varphi_\lambda,y]/\delta\varphi_\lambda(h_o,y)\}\,\varphi_\lambda(h_o,\xi)}{\Gamma\exp\{-\int dy\cdot\delta G_\lambda[\varphi_\lambda,y]/\delta\varphi_\lambda(h_o,y)\}\cdot 1}, \tag{5.3}$$

где символ Γ означает, что все функциональные производные должны стоять слева, действуя таким образом на все функционалы, написанные справа от них. С помощью (5.3) можно получить формулу:

$$a_\lambda(h_o)=\frac{\int_1^\infty\frac{v(t)}{t^2-1}U_\lambda^2(h_o,t)dt+\ldots}{-kh_o+ik\int_1^\infty\frac{v(t)}{t^2-1}U_\lambda(h_o,t)W_\lambda^{(+)}(h_o,t)dt+\ldots},$$

из которой можно получить приближенные выражения для парциальных амплитуд с помощью аппроксимации Паде других приближенных методов.

IУ. Рассеяние на сингулярных потенциалах

Можно привести много соображений в пользу того, что сингулярные потенциалы с положительной сингулярной частью имеют физический смысл /6/. Будем рассматривать сингулярные потенциалы (2.I), для которых функция $v_0(\xi) = v(\xi)(\xi^2-1)^{-1}$ удовлетворяет условиям:

I. $\lim\limits_{\xi\to 1} v_0(\xi)(\xi^2-1) = \infty$.

2. Существует такое положительное число δ, что в интервале $(1, 1+\delta]$

а) $v_0(\xi) > 0$,

б) $v_0(\xi)$–двукратно непрерывно дифференцируемая функция;

3. $v_0(\xi)(\xi^2-1)$ удовлетворяет условию (R_∞),

4. Существуют такие положительные константы ε и $X_\lambda(\varepsilon, h_0)$, что в интервале $(1, 1+\delta]$

$$|\gamma_\lambda(h_0,\xi)| \leqslant X_\lambda(\varepsilon, h_0)(\xi-1)^{\varepsilon-1},$$

где

$$\gamma_\lambda(h_0,\xi) = \frac{v_0''}{8v_0^{3/2}} - \frac{5}{32 v_0^{1/2}}\left(\frac{v_0'}{v_0}\right)^2 - \frac{h_0^2\xi^2 - A_\lambda(h_0)}{2(\xi^2-1)v_0^{1/2}} + \frac{m^2-1}{2(\xi^2-1)^2 v_0^{1/2}}.$$

Примерами потенциалов, удовлетворяющих этим условиям, являются потенциалы, для которых в некотором интервале $(1, c_0)$

$$v_0 = \frac{c}{(\xi-1)^n}, \quad v_0 = c\,exp\frac{a}{\xi-1},$$

где $n > 2$, a и c – положительные константы.

Для волновой функции $\phi_\lambda^{(+)}(h_0,\xi)$ в случае сингулярных потенциалов имеем

$$\phi_\lambda^{(+)}(h_0,\xi)\,v_0^{1/4}(\xi)\,exp\left\{\int_\xi^{1+\xi_0} v_0^{1/2}(t)dt\right\} = O(1), \quad \xi\to 1,$$

для любого $\xi_0 > 1$. Из вышеприведенной формулы ясно, что условие (32.2) удовлетворяется для всех решений уравнения (31.2). Вот почему неудобно использовать условие (32.2) для определения парциальных амплитуд. Мы будем использовать другое уравнение в интервале $[1, 1+\delta_0]$, где δ_0 – любое положительное число, меньшее δ. Для определения амплитудной функции в интервале $[1+\delta_0, \infty)$ можно снова использовать уравнения (31.2), но уже с краевым условием в точке $\xi = 1+\delta_0$. Таким образом, амплитудную функцию можно определить с помощью решения корректной задачи Коши.

Представим в интервале $[1, 1+\delta_0]$ функцию $\phi_\lambda^{(+)}(h_0,\xi)$ в виде:

$$\phi_\lambda^{(+)}(h_0,\xi) = \varphi^{(+)}(\xi)\,x_\lambda^{(1)}(h_0,\xi) + \varphi^{(-)}(\xi)\,x_\lambda^{(2)}(h_0,\xi),$$

где $x_\lambda^{(\alpha)}(h_0,\xi)$, $(\alpha = 1, 2)$ – искомые функции, а

$$\varphi^{(\pm)}(\xi) = v_0^{-1/4} exp\left\{\pm\int_\xi^{1+\delta_0} v_0^{1/2}(t)dt\right\}.$$

Для функции $x_\lambda^{(\alpha)}$ получаем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_\lambda^{(\alpha)}}{d\xi} = \sum_{\beta=1}^{2} A_{\alpha\beta,\lambda}(h_0,\xi)\,x_\lambda^{(\beta)}, \tag{1.4}$$

где

$$A_{11,\lambda} = -A_{22,\lambda} = -\gamma_\lambda, \quad A_{12,\lambda} = -\gamma_\lambda exp\left\{-2\int_\xi^{1+\delta_0} v_0^{1/2}(t)dt\right\},$$

$$A_{21,\lambda} = \gamma_\lambda exp\left\{2\int_\xi^{1+\delta_0} v_0^{1/2}(t)dt\right\}.$$

Очевидно, что надо искать решения этой системы, для которых

$$x_\lambda^{(1)}(h_0,\xi) = o(1), \quad x_\lambda^{(2)}(h_0,\xi) = O(1), \quad \xi\to 1. \tag{2.4}$$

Любые два решения системы (I.4), удовлетворяющие условиям (2.4), – пропорциональны. Из них мы выбираем только решение $\tilde{x}^{(\alpha)}(h_0,\xi)$, $(\alpha = 1,2)$, для которого

$$\tilde{x}_{\lambda}^{(\alpha)}(h_o, 1) = \delta_{2\alpha}, \tag{3.4}$$

и с помощью функций этого решения составляем функцию

$$\alpha_\lambda(h_o, \xi) = \tilde{x}_\lambda^{(1)} / \tilde{x}_\lambda^{(2)}, \tag{4.4}$$

которая удовлетворяет уравнению Риккати

$$\frac{d\alpha_\lambda}{d\xi} = -\gamma_\lambda \left\{ exp\left[-\int_\xi^{1+\delta_o} v_o^{1/2}(t)dt\right] + \alpha_\lambda exp\left[\int_\xi^{1+\delta_o} v_o^{1/2}(t)dt\right]\right\}^2, \tag{5.4}$$

$$\alpha_\lambda(h_o, 1) = 0.$$

Для величины амплитудной функции в точке $\xi = 1+\delta_o$ получаем

$$a_\lambda(h_o, 1+\delta_o) = \tag{6.4}$$
$$= \frac{\alpha_\lambda(h_o,1+\delta_o) W_{1+\delta_o}(U_\lambda(h_o,\xi), \varphi^{(+)}(\xi)) + W_{1+\delta_o}(U_\lambda(h_o,\xi), \varphi^{(-)}(\xi))}{-ik\{\alpha_\lambda(h_o,1+\delta_o) W_{1+\delta_o}(W_\lambda^{(+)}(h_o,\xi), \varphi^{(+)}(\xi)) + W_{1+\delta_o}(W_\lambda^{(+)}(h_o,\xi), \varphi^{(-)}(\xi))\}},$$

где $W_{1+\delta_o}(f, g)$ – значение определителя Вронского функций f и g в точке $\xi = 1+\delta_o$. Если положим

$$A_\lambda(h_o, \xi) = a_\lambda(h_o, \xi) - a_\lambda(h_o, 1+\delta_o), \quad x = \xi - \delta_o, \tag{7.4}$$

для A_λ получаем уравнение Риккати

$$\frac{dA_\lambda}{dx} = -\frac{v_o(x+\delta_o)}{kh_o}\{f_\lambda(h_o,x) + g_\lambda(h_o,x)A_\lambda\}^2, \quad x \geqslant 1, \tag{8.4}$$

$$A_\lambda(h_o, 1) = 0, \tag{9.4}$$

$$f_\lambda(h_o,x) = U_\lambda(h_o, x+\delta_o) + ik a_\lambda(h_o, 1+\delta_o) W_\lambda^{(+)}(h_o, x+\delta_o), \tag{10.4}$$

$$g_\lambda(h_o,x) = ik W_\lambda^{(+)}(h_o, x+\delta_o).$$

Следовательно, задача об определении амплитудной функции в случае сингулярного потенциала сводится к решению уравнения Риккати (8.4) с конечными коэффициентами при $x = 1$. Решение задачи Коши (8.4)-(9.4) требует предварительного интегрирования системы (I.4) при условиях (3.4), которое можно осуществить с помощью равномерно сходящихся в интервале $[1, 1+\delta_o]$ итерационных разложений. Ясно, что можно выбрать δ_o достаточно малым, так что первые несколько членов итерационных рядов будут давать любую требуемую точность при определении α_λ. Для определения A_λ, а потом, согласно (7.4), и для определения парциальных амплитуд, можно использовать метод формальных рядов. С помощью этого метода для амплитудной функции получаем следующее выражение

$$a_\lambda(h_o,\xi) = a_\lambda(h_o, 1+\delta_o) - \varkappa_\lambda(h_o, \xi-\delta_o) +$$
$$+ \frac{\Gamma exp\{-\int dy \cdot \delta g_\lambda[\varkappa_\lambda, y]/\delta\varkappa_\lambda(h_o,y)\}\varkappa_\lambda(h_o,\xi-\delta_o)}{\Gamma exp\{-\int dy \cdot \delta g_\lambda[\varkappa_\lambda, y]/\delta\varkappa_\lambda(h_o,y)\}\cdot 1}, \tag{12.4}$$
$$\xi \geqslant 1+\delta_o,$$

$$\varkappa_\lambda = f_\lambda(h_o, \xi-\delta_o)/g_\lambda(h_o, \xi-\delta_o),$$

$$g_\lambda[\varkappa_\lambda, y] = \int_1^y \frac{v_o(t+\delta_o)}{h_o k} g_\lambda^2(h_o,t)\varkappa_\lambda^2(h_o,t)dt.$$

Из этой формулы можно получить приближенные выражения, с помощью которых можно проводить конкретные вычисления.

В заключение автор выражает глубокую признательность Л.И.Пономареву, И.В.Комарову, А.А.Атанасову и Г.А.Крыстеву за многие полезные обсуждения проблем, рассматриваемых в данной работе.

Литература:

I. Н.Мотт, Г.Месси. Теория атомных столкновений, "Мир", М.,1969.
2. Д.И.Абрамов, И.В.Комаров. ТМФ 22, 1975.
3. И.В.Комаров, Л.И.Пономарев, С.Ю.Славянов. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции, "Наука", Москва, 1976.
4. A.T.Filippov. Phys.Lett., 8, 78, 1964.
5. А.А.Атанасов. МТФ, 24, 400, 1975.
6. Ф.Калоджеро. Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния, "Мир", 1972.
7. M.Dubois Violette. J.Math.Phys., 11, 2359, 1970.
8. С.П.Ерашевская и др. Таблицы сфероидальных волновых функций и их первых производных. "Наука и техника",1973.
9. Л.И.Пономарев, Л.Н.Сомов. Препринт ОИЯИ, Р4-8742, Дубна,1975 .
IO.Д.И.Абрамов, И.В.Комаров, ТМФ, 29, 235, 1976.
II.Р.Ньютон, Теория рассеяния волн и частиц, "Мир", Москва,1969.
I2.В.И.Гурков, Л.Яковлев. Известия вузов, вып.4, 1975.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 декабря 1977 года.