ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р4 - 11135

В.К.Игнатович

РАССЕЯНИЕ НЕЙТРОНОВ НА НЕСИММЕТРИЧНОМ ОДНОМЕРНОМ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ПОТЕНЦИАЛЕ

1978

P4 - 11135

В.К.Игнатович

РАССЕЯНИЕ НЕЙТРОНОВ НА НЕСИММЕТРИЧНОМ ОДНОМЕРНОМ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ПОТЕНЦИАЛЕ

Направлено в Journal of Physics A.

Игнатович В.К.

Р4 - 11135

Рассеяние нейтронов на несимметричном одномерном периодическом потенциале

Получены выражения для амплитуды прохождения и отражения нейтрона на периодической цепочке из n потенциалов в случае, когда отдельный потенциал несимметричен.

Работа выполнена в Лаборатории нейтронной физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Ignatovich V.K.

P4 - 11135

Neutron Scattering on Unsymmetric One-Dimensional Periodic Potential

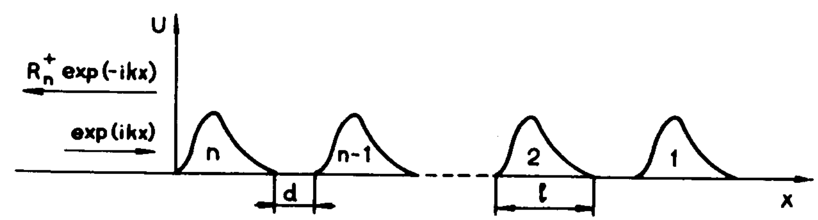
Expressions are obtained for transmission and reflection amplitudes of a neutron on the periodic chain of potentials in the case when an individual potential is unsymmetric.

The investigation has been performed at the Neutron Physics Laboratory, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

В работе /1/ были получены замкнутые выражения для амплитуд рассеяния на одномерных периодических потенциалах с конечным и бесконечным числом периодов, причем конкретности ради рассуждения проводились на примере нейтронов, а одиночные потенциалы, составляющие периодическую цепочку, полагались для простоты симметричными. Цель настоящего сообщения состоит в том, чтобы показать, как изменятся результирующие выражения работы /1/ в случае несимметричных потенциалов.

Пусть периодический потенциал имеет вид, представленный на *рисунке*. Обозначим $r^{\pm}$ и $t^{\pm}$ амплитуды



отражения и пропускания одиночного потенциала слева и справа соответственно. Ниже будет показано, что $t^{+} = t^{-}$, и если обозначить $t^{\pm} = i\,t\exp(-i\eta)$, то $r^{\pm}$ можно представить в виде

$$r^{\pm} = r\exp[-i(\eta \pm \eta_1)], \qquad /1/$$

где t и r действительны при действительном потенциале.

Опуская выкладки, которые тождественны приведенным в работе /1/ , рассмотрим только окончательные результаты. Амплитуда отражения от бесконечного полупространства слева и справа соответственно равна:

$$R^{\pm}_{\infty} = \exp[-i(\phi \pm \eta_1)]\, \frac{\sqrt{\cos(\phi-\eta)+|\bar{r}|} - \sqrt{\cos(\phi-\eta)-|\bar{r}|}}{\sqrt{\cos(\phi-\eta)+|\bar{r}|} + \sqrt{\cos(\phi-\eta)-|\bar{r}|}}, \qquad /2/$$

где $\phi = kd$, d - расстояние между одиночными потенциалами */рисунок/*, k - волновой вектор в промежуточной области, фазы η и η_1 определены в соотношении /1/, $|\bar{r}|$ равен модулю парциальной амплитуды в случае действительных потенциалов u, а в случае комплексных потенциалов:

$$|\bar{r}| = \sqrt{r(u)\cdot r^*(u^*)}\,. \qquad /3/$$

Если представить $R^{\pm}_{\infty}$ в виде

$$R^{\pm}_{\infty} = R\cdot\exp[-i(\phi \pm \eta_1)], \qquad /4/$$

то амплитуда отражения от потенциала с n периодами слева и справа соответственно представится следующим образом:

$$R^{\pm}_{n} = R^{\pm}_{\infty}\cdot \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda^n\cdot R^2}. \qquad /5/$$

Если $R^{\pm}_{n}$ представить аналогично /4/:

$$R^{\pm}_{n} = \exp[-i(\phi \pm \eta_1)]\cdot R_n, \qquad /6/$$

то соотношение между R_n и R примет вид, аналогичный соотношению между амплитудой R_2 отражения от прямоугольного барьера и амплитудой r_o отражения от его граней:

$$R_2 = r_0\, \frac{1-\exp(2i\phi_1)}{1-r_o^2\cdot\exp(2i\phi_1)}. \qquad /7/$$

Здесь ϕ_1 - фаза, которая набегает при распространении нейтрона внутри барьера. В выражении /5/ величина λ равна

$$\lambda = \frac{\sin(\eta-\phi) - i\sqrt{\cos^2(\eta-\phi) - |\bar{r}|^2}}{\sin(\eta-\phi) + i\sqrt{\cos^2(\eta-\phi) - |\bar{r}|^2}}\,. \qquad /8/$$

Сравнение с /2/ показывает, что λ имеет вид фазового множителя $\lambda = \exp(2i\gamma)$, когда $|R|<1$. То же самое имеет место и в /7/. Принимая во внимание /5/, /6/ и /8/, получаем соотношение

$$R_n = R\, \frac{1-\exp(2in\gamma)}{1-R^2\cdot\exp(2in\gamma)}, \qquad /9/$$

полностью аналогичное /7/. Амплитуды прошедших волн $T^{\pm}_{n}$ оказываются равными друг другу, так же как и $t^{\pm}$:

$$T^{+}_{n} = T^{-}_{n} = \lambda^{n/2}\cdot\exp(-i\phi)\, \frac{1-R^2}{1-\lambda^n\cdot R^2}. \qquad /10/$$

Если обозначить $T^{\pm}_{n} = T_n\cdot\exp(-i\phi)$, то для T_n получится выражение, аналогичное амплитуде пропускания через прямоугольный барьер:

$$T_2 = \exp(i\phi_1)\, \frac{1-r_o^2}{1-r_o^2\exp(2i\phi_1)}, \qquad /11/$$

а именно

$$T_n = \exp(i\gamma n)\, \frac{1-R^2}{1-R^2\cdot\exp(2i\gamma\cdot n)}. \qquad /12/$$

Докажем теперь справедливость сделанных утверждений относительно свойств $t^{\pm}$ и $r^{\pm}$. Пусть одиночный несимметричный потенциал занимает область $x \in (0, \ell)$. Решения уравнения Шредингера внутри этой области обозначим $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Линейно независимые функции $y_{1,2}(x)$ можно выбрать так, чтобы $y_1(0)=y_1(\ell)=y_2(0)=-y_2(\ell)=1$. При этом $y_1(x)$ играет роль симметричного, а $y_2(x)$ - несимметричного решения в случае симметричного потенциала. Обозначим w вронскиан этих функций:

$$w = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x). \qquad /13/$$

Производные $y_1'(x)$ на концах интервала $x \in (0, \ell)$ обозначим

$$y_1'(0) = p,\ y_1'(\ell) = -q. \qquad /14/$$

Тогда производные $y_2'(x)$ на концах этого интервала будут согласно /13/ равны

$$y_2'(0) = w + p, \quad y_2'(\ell) = w + q. \qquad /15/$$

Обозначим волновую функцию ψ через $\psi^{\pm}(x)$ в случае, когда волна падает на потенциал слева или справа соответственно. Тогда $\psi^{+}(x)$ может быть записана в виде

$$\psi^{+}(x) = \begin{cases} \exp(ikx) + r^{+}\cdot\exp(-ikx), & x<0 \\ A^{+}\cdot y_1(x) + B^{+}\cdot y_2(x), & 0<x<\ell \\ t^{+}\cdot\exp[ik(x-\ell)], & \ell<x\ . \end{cases} \qquad /16/$$

Сшивая функцию и ее производные на границах, получаем

$$t^{+} = \frac{2ikw}{w(p+q) + 2pq - 2k^2 + 2ik(p+q+w)},$$

$$r^{+} = -\frac{w(p+q) + 2pq + 2k^2 + 2ik(p-q)}{w(p+q) + 2pq - 2k^2 + 2ik(p+q+w)}. \qquad /17/$$

Для функции $\psi^{-}(x)$ имеем

$$\psi^{-}(x) = \begin{cases} t^{-}\exp(-ikx), & x<0 \\ A^{-}y_1(x) + B^{-}y_2(x), & 0<x<\ell \\ \exp[-ik(x-\ell)] + r^{-}\exp[ik(x-\ell)], & \ell<x. \end{cases} \qquad /18/$$

и после соответствующей сшивки получаем

$$t^{-} = t^{+},$$

$$r^{-} = -\frac{w(p+q) + 2pq + 2k^2 - 2ik(p-q)}{w(p+q) + 2pq - 2k^2 + 2ik(p+q+w)}. \qquad /19/$$

Сравнивая /19/ и /17/, видим, что, действительно, $t^{\pm}$ можно представить в виде $i|t|\exp(-i\eta)$, а $r^{\pm}$ - в виде /1/, где

$$\eta_1 = \mathrm{arctg}\{(q-p)\cdot 2k/[w(p+q) + 2pq + 2k^2]\},$$

$$\eta = \mathrm{arctg}\{2k(q+p+w)/[w(p+q) + 2pq - 2k^2]\}. \qquad /20/$$

В случае симметричного потенциала $q=p$ и фаза η_1 обращается в нуль, при этом все формулы тривиально преобразуются к симметричному случаю. Заметим, что зонное уравнение /51/ в работе [1] оказывается таким же и в несимметричном случае. Уравнение же /54/, определяющее стационарные уровни в одномерном кристалле, в котором отражение от правой и левой границы соответственно задается амплитудами $\exp(-2i\phi_o)$ и $\exp(-2i\phi_n)$, принимает вид

$$\cos(\phi_o + \phi_n + \phi_R - \phi) = |R_n|\cos(\phi_n - \phi_o + \eta_1), \qquad /21/$$

где ϕ_R - фаза амплитуды отражения R_n.

Таким образом, мы видим, что переход к несимметричным потенциалам довольно тривиален.

Автору стало известно,что решение задачи о распространении волн в одномерном периодическом потенциале было получено Ф.Абеле /2/ в 1950 г. В этом решении амплитуды прохождения и отражения на цепочке из n потенциалов выражаются через амплитуды рассеяния на отдельном потенциале с помощью полиномов Чебышева. Метод решения этой задачи, изложенный в работе /1/, представляется более совершенным, т.к. приводит к математически более простым и физически наглядным выражениям, о чем читатель может судить сам, сравнив /9/ и /12/ с результатами Ф.Абеле, приведенными, например, в книге /3/.

В заключение автор хотел бы выразить свою благодарность за полезные обсуждения и глубокий интерес к проблеме Ю.Н.Покотиловскому, а также В.Нитцу и Э.Яроцкому.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Игнатович В.К. ОИЯИ, Р4-10778, Дубна, 1977.*
2. *Abeles F. Ann. de Physique, 1950, 5, p.596; p.706.*
3. *Борн М., Вольф Э. Основы оптики. "Наука", М., 1973.*

Рукопись поступила в издательский отдел
6 декабря 1977 года.