ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р4 - 10493

М.Х.Ханхасаев

ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ В МЕТОДЕ ФАЗОВЫХ ФУНКЦИЙ

1977

Р4 - 10493

М.Х.Ханхасаев

ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ В МЕТОДЕ ФАЗОВЫХ ФУНКЦИЙ

Направлено в ТМФ

Ханхасаев М.Х.

P4 - 10493

Исследование уравнения для амплитуды рассеяния в методе фазовых функций

Рассматривается формулировка теории потенциального рассеяния, представляющая собой обобщение метода фазовых функций. Исследуется уравнение для амплитуды рассеяния, лежащее в основе подхода. Предлагается метод решения этого уравнения, эффективный при изучении высокоэнергетического потенциального рассеяния. В качестве примера выводится известное эйкональное представление амплитуды рассеяния.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Khankhasaev M.Kh.

P4 - 10493

Study of the Equation for the Scattering Amplitude in the Phase Function Method

As a natural generalization of the phase function method, a new approach is considered for the three dimensional potential scattering theory. The basic integral equation for the scattering amplitude is analyzed. A method for solving it in the high-energy limit is developed. As an example, the well-known eikonal approximation for the scattering amplitude is obtained.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

1. В работе [1] на основе обобщения метода фазовых функций [2,3] было получено точное нелинейное интегро-дифференциальное уравнение для так называемой функции рассеяния $f(r,\vec{k}_1,\vec{k}_2)$. Эта функция есть амплитуда упругого рассеяния частицы с начальным импульсом $\vec{k}_1$ и конечным импульсом $\vec{k}_2$ на потенциале

$$V_r(\vec{r}') = V(\vec{r}')\theta(r-r') \quad (0 \leq r < \infty), \qquad /1.1/$$

где $\theta(x)$ -известная ступенчатая функция. Искомая амплитуда рассеяния $f(\vec{k}_1,\vec{k}_2)$ для заданного потенциала $V(\vec{r}')$ есть $f(r,\vec{k}_1,\vec{k}_2)$ при $r \to \infty$. Уравнение [1] имеет вид *

$$\frac{\partial}{\partial r} f(r,\vec{k}_1,\vec{k}_2) = -\frac{r^2}{4\pi}\int d\vec{n}\, V(\vec{r}) \times$$

$$\times \{\exp(i\vec{k}_1\vec{r}) + \frac{ik}{4\pi}\int d\vec{n}_3\, f(r,\vec{k}_1,\vec{k}_3) H^{(1)}(kr,\vec{n}\vec{n}_3)\} \times \qquad /1.2/$$

$$\times\{\exp(-i\vec{k}_2\vec{r}) + \frac{ik}{4\pi}\int d\vec{n}_3\, f(r,-\vec{k}_2,\vec{k}_3) H^{(1)}(kr,\vec{n}\vec{n}_3)\}$$

с граничным условием

$$f(0,\vec{k}_1,\vec{k}_2) = 0, \qquad /1.3/$$

---

* В данной работе используется система единиц, в которой $\hbar = 2m = 1$, где m-масса частицы.

где единичные векторы $\vec{n} = \vec{r}/r$, $\vec{n}_3 = \vec{k}_3/k$, а величина $H^{(1)}$ определена следующим образом * :

$$H^{(1)}(kr,\cos\theta) = \frac{1}{kr}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\, i^{\ell}\, h_{\ell}^{(1)}(kr) P_{\ell}(\cos\theta). \qquad /1.4/$$

Функция $H^{(1)}$ является решением свободного уравнения Шредингера и имеет вид ряда, аналогичного разложению плоской волны $\exp(ikr\cos\theta)$ с заменой $j_\ell \to h_\ell^{(1)}$. В отличие от последнего, разложение для $H^{(1)}$ является формальным. Оценивая, например, ℓ-й член ряда /1.4/ в точке $\cos\theta = 1$ при $\ell \to \infty$, можно убедиться, что данный ряд расходится при любых значениях переменной kr. Об этом свидетельствует также асимптотическая формула для $H^{(1)}$ при $kr \to \infty$, полученная в /1/.

В настоящей работе значительное внимание /разделы 2 и 3/ уделено выяснению смысла функции $H^{(1)}$. Получено новое представление для $H^{(1)}(kr,\cos\theta)$, явно указывающее на обобщенный характер этой функции. Показано /раздел 4/, что уравнение /1.2/ может быть представлено в виде, не содержащем обобщенных функций. Предлагается /раздел 5/ возможный метод решения уравнения /1.2/, эффективный при исследовании высокоэнергетического потенциального рассеяния. В качестве примера выводится /раздел 6/ известное эйкональное приближение для амплитуды рассеяния /4/. В разделе 7 обсуждаются результаты настоящей статьи.

2. Одним из основных моментов вывода уравнения /1.2/ является выбор представления свободной функции Грина $G^{(+)}(k,\vec{r},\vec{r}\,') = (-4\pi)^{-1}\exp(ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|)/|\vec{r}-\vec{r}\,'|$. В /1/ было использовано следующее представление этой функции:

$$G^{(+)}(\vec{k},\vec{r},\vec{r}\,') = -\frac{ik}{(4\pi)^2}\{\theta(r-r')\int d\vec{n}_3 \exp(-i\vec{k}_3\vec{r}\,') \times \qquad /2.1/$$

---

*Определение функций Риккати-Бесселя $j_\ell(kr)$ и Риккати-Ганкеля $h_\ell^{(1)}(kr)$ см. в /2/.

$$\times H^{(1)}(kr,\vec{n}\vec{n}_3)+\theta(r'-r)\int d\vec{n}_3\exp(-i\vec{k}_3\vec{r})H^{(1)}(kr',\vec{n}'\vec{n}_3)\},$$

где единичный вектор $\vec{n}_3=\vec{k}_3/k$, $\theta(x)$ -ступенчатая функция, а величины $H^{(1)}$ определены в /1.4/. Выбор такого представления привел /1/ к возникновению функций $H^{(1)}$ в /1.2/.

Исследуем формулу /2.1/, полагая для определенности, что $r>r'$. Будем исходить из известного /см., например, /8.533/ в /5/ / разложения функции Грина, которое при $r>r'$ имеет вид

$$G^{(+)}(k,\vec{r},\vec{r}') = -\frac{i}{4\pi krr'}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)h_\ell^{(1)}(kr)j_\ell(kr')P_\ell(\vec{n}\vec{n}'). \qquad /2.2/$$

Используя разложение $\exp(-i\vec{k}_3\vec{r}')$ в ряд по полиномам Лежандра, нетрудно показать, что имеет место формула

$$\frac{1}{kr'}P_\ell(\vec{n}\vec{n}')\,j_\ell(kr')=\frac{i^\ell}{4\pi}\cdot\int d\vec{n}_3\exp(-i\vec{k}_3\vec{r}')P_\ell(\vec{n}\vec{n}_3),$$

подставляя которую в /2.2/, получим следующее выражение:

$$G^{(+)}(k,\vec{r},\vec{r}') = -\frac{ik}{(4\pi)^2}\frac{1}{kr}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\,i^\ell\,h_\ell^{(1)}(kr)\times \qquad /2.3/$$

$$\times\int d\vec{n}_3P_\ell(\vec{n}\vec{n}_3)\exp(-i\vec{k}_3\vec{r}').$$

Если в /2.3/ поменять порядок суммирования и интегрирования, то получим /2.1/ с $H^{(1)}$ -функцией /1.4/. Однако такая операция в классе обычных функций не корректна, поскольку возникающий ряд, вообще говоря, расходится. Поэтому соотношение /2.1/ следует считать символическим.

Выражению /2.1/ можно придать определенный смысл, привлекая элементы теории обобщенных функций [6,7]. Предположим, что $H^{(1)}(\lambda, x)(\lambda = kr, x = \vec{n}\vec{n}_3)$ в /2.1/ является обобщенной функцией относительно переменной x, зависящей от λ как от параметра, и определена в некотором классе основных функций Φ. Используя /1.4/, определим действие $H^{(1)}(\lambda,x)$ на любую функцию $\phi(x) \in \Phi$ следующим образом:

$$\int_{-1}^{1} dx H^{(1)}(\lambda, x)\phi(x) = \frac{1}{\lambda}\sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i^{\ell} h_{\ell}^{(1)}(\lambda) \times$$

$$\times \int_{-1}^{1} dx P_{\ell}(x)\phi(x). \tag{2.4}$$

Класс Φ основных функций должен быть выбран так [6,7], чтобы числовой ряд /2.4/ сходился. Более строго класс Φ будет определен ниже /раздел 3/. Здесь отметим, что $\exp(-i\vec{k}_3\vec{r}')$ в /2.1/, как фунция переменной $x = \vec{n}\vec{n}_3$, является элементом Φ, что следует из сходимости ряда /2.2/ при $r > r'$. Амплитуды $f(r, \pm\vec{k}_{1,2}, \vec{k}_3)$ в уравнении /1.2/, как функции от $x = \vec{n}\vec{n}_3$, также принадлежат Φ. В этом нетрудно убедиться, если воспользоваться известным выражением для амплитуды рассеяния

$$f(r, \pm\vec{k}_{1,2}, \vec{k}_3) = -\frac{1}{4\pi}\int d\vec{r}' \exp(-i\vec{k}_3\vec{r}') \times$$

$$\times V_r(\vec{r}')\psi(r, \vec{r}', \pm\vec{k}_{1,2}), \tag{2.5}$$

где $\psi(r, \vec{r}', \pm\vec{k}_{1,2})$ -волновые функции, описывающие рассеяние частицы на обрезанном потенциале /1.1/.

Такое понимание /2.4/ величины $H^{(1)}$ /1.4/ позволяет доопределить представление /2.1/ для функции Грина и, следовательно, уравнение /1.2/ для амплитуды рассеяния. Например, из /2.1/, используя /1.4/ и /2.4/, получим /2.3/. Отметим, однако, что представление обобщенной функции $H^{(1)}$ в виде /1.4/ не приводит к существенному преимуществу /1.2/ по сравнению с уравнениями для парциальных амплитуд рассеяния [2,3]. Используя /1.4/ и /2.4/, мы получим в правой части уравнения /1.2/ некоторые суммы парциальных амплитуд $f_\ell(r)$, что приводит к естественному методу решения /1.2/ путем парциального разложения амплитуды $f(r, \vec{k}_1, \vec{k}_2)$. Такой метод не эффективен при изучении высокоэнергетического рассеяния, когда число парциальных волн, которые нужно учитывать, велико. Поэтому интересно получить выражение для оператора $H^{(1)}$, не связанного с парциальным разложением этой величины.

3. Покажем, что обобщенная функция $H^{(1)}(\lambda, x)$ $(\lambda = kr,\ x = \vec{n}\vec{n}_3)$ в уравнениях /1.2/ и /2.1/ может быть представлена в виде ряда

$$H^{(1)}(\lambda, x) = 2\frac{e^{i\lambda}}{i\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}(i/\lambda)^n(-1)^n\delta^{(n)}(x-1), \qquad /3.1/$$

где $\delta^{(n)}(x) = \partial^n\delta(x)/\partial x^n$ – производные от δ-функции. Действие операторов $\delta^{(n)}(x - x_0)$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ на бесконечно дифференцируемую функцию определено в [6,7]. Отметим, что первый член ряда /3.1/ совпадает с асимптотическим представлением $H^{(1)}$, полученным в [1].

Смысл рядов, содержащих производные от δ-функции, обсуждался в [6]. Действие $H^{(1)}$ на бесконечно дифференцируемую в точке $x = 1$ функцию $\phi(x)$ можно определить [6] следующим образом:

$$\int_{-1}^{1+\epsilon} dx H^{(1)}(\lambda, x)\phi(x) = 2\frac{e^{i\lambda}}{i\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-1)^n \times$$
$$\times \int_{-1}^{1+\epsilon} dx\delta^{(n)}(x-1)\phi(x) = 2\frac{e^{i\lambda}}{i\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} a_n\phi^{(n)}(1), \qquad /3.2/$$

где вещественная $\epsilon > 0$, $a_n = (i/\lambda)^n$, $\phi^{(n)}(1) = \frac{\partial^n\phi(x)}{\partial x^n}\Big|_{x=1}$.

Класс Ф основных функций $\phi(x)$, на котором определен оператор /3.1/, должен быть выбран так, чтобы числовой ряд /3.2/ сходился. Такой класс, как легко видеть из /3.2/, образует бесконечно дифференцируемые функции $\phi(x)$ $(-\infty < x < \infty)$, удовлетворяющие неравенствам

$$|x^m \phi^{(n)}(x)| \le a^n c_m \ (n, m = 0,1,2, \dots), \qquad /3.3/$$

где a, c_m - ограниченные константы, причем $a < \lambda$. Таким образом, определенный класс Ф есть /7/ пространство типа S°. Нетрудно убедиться, что $\exp(-i\vec{k}_3\vec{r}')$ в /2.1/ при $r > r'$ и амплитуды $f(r, \pm\vec{k}_{1,2}, \vec{k}_3)$ /2.5/ в /1.2/, как функции переменной $x = \vec{n}\vec{n}_3$, принадлежат Ф/3.3/. Для дальнейшего /раздел 4/ отметим, что каждая функция $\phi(x)$, удовлетворяющая неравенствам /3.3/, может быть /7/ аналитически продолжена в плоскость $z = x + iy$ как целая функция порядка роста 1.

Для получения /3.1/ будем исходить из /2.3/. Представим функции $h_\ell^{(1)}(kr)$ в /2.3/ следующим /см. /8.466/ в /5// образом:

$$h_\ell^{(1)}(kr) = e^{ikr} (-i)^{\ell+1} \sum_{m=0}^{\ell} \frac{(\ell+m)!}{2^m m!(\ell-m)!} (i/kr)^m .$$

Тогда простой перегруппировкой слагаемых в /2.3/ для функции Грина получим выражение в виде

$$G^{(+)}(k, \vec{r}, \vec{r}') = -\frac{ik}{(4\pi)^2} 2 \frac{e^{ikr}}{ikr} \sum_{n=0}^{\infty} (i/kr)^n a_n(k, r', \vec{n}\vec{n}'), \qquad /3.4/$$

$$a_n(k, r', \vec{n}\vec{n}') = \sum_{\ell=n}^{\infty} \frac{(2\ell+1)(\ell+n)!}{2^{n+1} n!(\ell-n)!} \int_{-1}^{1} dx P_\ell(x) \times \qquad /3.5/$$

$$\times \phi(k, r', \vec{n}\vec{n}', x),$$

$$\phi(k, r', \vec{n}\vec{n}', x) = \int_0^{2\pi} d\phi \{\exp[-ikr'(x\cdot\nu + \sqrt{1-\nu^2}\sqrt{1-x^2}\cos\phi)]\}_{\nu=\vec{n}\vec{n}'} . \qquad /3.6/$$

Для получения /3.5/ и /3.6/ при интегрировании по $d\vec{n}_3$ в /2.3/ была введена сферическая система координат с осью $z \| \vec{n} (x = \vec{n}\vec{n}'_3)$.

Если теперь учесть, что интегралы в /3.5/ есть коэффициенты в разложении /3.6/ по полиномам Лежандра и что

$$d^n P_\ell(x)/dx^n |_{x=1} = (\ell+n)!/2^n n!(\ell-n)! \quad (\ell = n, n+1, n+2, \ldots),$$

то функции /3.5/ можно выразить через /3.6/ следующим образом:

$$a_n(k, r', \vec{n}\vec{n}') = \partial^n \phi(k, r', \vec{n}\vec{n}', x)/\partial x^n |_{x=1} =$$

$$= \phi^{(n)}(k, r', \vec{n}\vec{n}', 1).$$

Подставив это выражение в /3.4/, получим важное для нас соотношение

$$G^{(+)}(k, \vec{r}, \vec{r}') = -\frac{ik}{(4\pi)^2} 2 \frac{e^{ikr}}{ikr} \sum_{n=0}^{\infty} (i/kr)^n \times \qquad /3.7/$$

$$\times \phi^{(n)}(k, r', \vec{n}'\vec{n}, 1).$$

Введем в рассмотрение δ-функцию и ее производные в соответствии с /6/. Тогда /3.7/ можно записать в виде

$$G^{(+)}(k, \vec{r}, \vec{r}') = -\frac{ik}{(4\pi)^2} 2 \frac{e^{ikr}}{ikr} \sum_{n=0}^{\infty} (i/kr)^n \times \qquad /3.8/$$

$$\times (-1)^n \int_{-1}^{1+\epsilon} dx \delta^{(n)}(x-1) \phi^{(n)}(k, r', \vec{n}\vec{n}', x), \quad \epsilon > 0,$$

где функция ϕ определена в /3.6/. Подставив /3.6/ в /3.8/ и поменяв формально порядок суммирования и интегрирования, получим /2.1/ при $r > r'$, где $H^{(1)}$ - обобщенная функция /3.1/. Рассмотрение случая $r' > r$ проводится аналогично.

Таким образом показано, что в уравнениях /1.2/ и /2.1/ обобщенная функция $H^{(1)}$ может быть представлена в виде /3.1/, отличном от парциального разложения этого оператора /1.4/. Такое выражение для $H^{(1)}$ представляется более эффективным [8] при исследовании высокоэнергетического потенциального рассеяния на основе уравнения /1.2/.

4. В [6] приводится также отличная от /3.2/ интерпретация ряда вида /3.1/ с помощью так называемой теории моментов. Предположим, что $g_0(z)$ есть функция комплексной переменной z, интегрируемая вдоль некоторой конечной или бесконечной траектории Γ в z-плоскости с моментами

$$\mu_n = a_n \cdot n! = \int_\Gamma dz \cdot z^n \cdot g_0(z) \qquad (n = 0,1,2,\dots), \qquad /4.1/$$

где $a_n = (i/\lambda)^n$ - коэффициенты при производных от δ-функции в /3.1/. Тогда действие оператора $H^{(1)}$ на любую функцию $\phi(x) \in \Phi$ /3.3/ можно [6] представить в виде

$$\int_{-1}^{1+\epsilon} dx\, H^{(1)}(\lambda, x)\phi(x) = \int_\Gamma dz\, g(\lambda, z)\phi(z+1), \qquad /4.2/$$

где $g(\lambda, z) = 2\dfrac{e^{i\lambda}}{i\lambda} g_0(z)$.

Нетрудно убедиться, что для ряда /3.1/ решение уравнений /4.1/ есть

$$\mu_n = (i/\lambda)^n\, n! = -i\lambda \int_{i0}^{i\infty} dz \cdot z^n e^{i\lambda z} \qquad (n = 0,1,2,\dots),$$

и обобщенная функция $H^{(1)}$ /3.1/ эквивалентна функции

$$g(\lambda, z) = -2\exp[i\lambda(z+1)] \qquad /4.3/$$

с контуром $\Gamma(i0, i\infty)$ в z-плоскости.

Такая интерпретация ряда /3.1/ позволяет получить представление функции Грина в интегральной форме. Пусть, например, $r > r'$. Исходя из /2.1/ и используя /3.2/, /4.2/ и /4.3/, получим следующее выражение*:

$$G^{(+)}(k,r,r') = \frac{ik}{8\pi^2}\int\limits_{i0}^{i\infty} dz \int\limits_{0}^{2\pi} d\phi \{\exp[ikr(z+1) - \qquad /4.4/$$

$$- ikr'((z+1)\nu + \sqrt{1-(z+1)^2}\sqrt{1-\nu^2}\cos\phi)]\}_{\nu=\vec{n}\vec{n}'} .$$

Произведем в интеграле /4.4/ замену $z = iy$, введем сферическую систему координат с осью $z \| \vec{n} = \vec{r}/r$ и единичный комплексный вектор $\vec{n}_0 = (1, \mu, \phi)$, где ϕ-азимутальный угол, а проекция $\vec{n}_0$ на вектор $\vec{n}(\mu = \vec{n}\vec{n}_0)$ определена следующим образом:

$$\mu = 1 + iy \qquad (0 \le y < \infty) . \qquad /4.5/$$

Тогда /4.4/ можно записать в компактной символической форме

$$G^{(+)}(k,\vec{r},\vec{r}') = \frac{ik}{8\pi^2}\int d\vec{n}_0 \exp[ik\vec{n}_0(\vec{r}-\vec{r}')] . \qquad /4.6/$$

Выражение для функции Грина при $r' > r$ получается из /4.6/ взаимной заменой векторов $\vec{r}$ и $\vec{r}'$ и выбором при интегрировании по $d\vec{n}_0$ сферической системы координат с осью $z \| \vec{n}'$ т.е. в /4.5/ величина $\mu = \vec{n}_0\vec{n}'$.

---

*В справедливости /4.4/ можно убедиться также другим способом, воспользовавшись формулой /18/ в гл4.15 в /9/.

Проводя в уравнении /1.2/ процедуру, аналогичную приведению выражения /2.1/ к форме /4.6/, получим, что это уравнение можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial r} f(r, \vec{k}_1, \vec{k}_2) = -\frac{r^2}{4\pi} \int d\vec{n}\, V(\vec{r}) \cdot \times$$

$$\times \{\exp(i\vec{k}_1\vec{r}) + \frac{ik}{2\pi} \int d\vec{n}_0 \exp(i\vec{k}_0\vec{r}) f(r, \vec{k}_1, \vec{k}_0)\} \times \qquad /4.7/$$

$$\times \{\exp(-i\vec{k}_2\vec{r}) + \frac{ik}{2\pi} \int d\vec{n}_0 \exp(i\vec{k}_0\vec{r}) f(r, -\vec{k}_2, \vec{k}_0)\},$$

где комплексный единичный вектор $\vec{n}_0 = \vec{k}_0/k$ определен в /4.5/.

В правую часть /4.7/ входят зависящие от комплексного вектора $\vec{k}_0$ величины $f(r, \pm\vec{k}_{1,2}, \vec{k}_0)$, представляющие собой аналитическое продолжение физических амплитуд рассеяния /2.5/ по переменной $\mu = \vec{m}\vec{m}_3$ в соответствии с /4.5/. Такое аналитическое продолжение возможно в силу того, что величины /2.5/, как функции этой переменной, принадлежат классу Ф/3.3/ /см. замечание к /3.3//. Важное отличие уравнения /4.7/ от /1.2/ состоит в отсутствии в нем обобщенных функций $H^{(1)}$. Представленное в такой форме уравнение /1.2/ становится доступным для конкретных численных расчетов.

5. Уравнение для амплитуды упругого рассеяния типа /1.2/ не является единственным. В /10, 11/, например, был развит вариант теории высокоэнергетического рассеяния на основе уравнения для амплитуды рассеяния $f(\xi, \vec{k}_1, \vec{k}_2)$, соответствующей обрезанному потенциалу $V_\xi(\vec{r}) = V(r)\theta(\xi - |z|)$, где $\vec{r} = (\vec{b}, z)$, а параметр ξ изменяется в пределах $[0, \infty)$. Искомая амплитуда рассеяния $f(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = f(\infty, \vec{k}_1, \vec{k}_2)$.

Применим для решения уравнения /1.2/ схему, рассмотренную в /10,11/. Ограничимся сферически-симметричными потенциалами $V(r)$. Амплитуду $f(r, \vec{k}_1, \vec{k}_2)$ будем искать в виде

$$f(r,\vec{k}_1,\vec{k}_2) = (-4\pi)^{-1} \int d\vec{r}' \exp(i\vec{q}\vec{r}') \times$$
$$\times V_r(r')\exp[i\chi_k(r,\vec{r}',\vec{q})], \qquad /5.1/$$

где $\vec{q}=\vec{k}_1-\vec{k}_2$ -переданный импульс, а χ_k -новая неизвестная функция, определенная лишь в области действия потенциала $V_r(r')$ /1.1/. Ось z в интеграле /5.1/ направим по единичному вектору $\hat{\vec{k}}=(\vec{k}_1+\vec{k}_2)/|\vec{k}_1+\vec{k}_2|$, т.е. вектор $\vec{r}'=\vec{b}'+\hat{\vec{k}}z'$. Зависимость функции χ_k лишь от передачи $\vec{q}$ есть следствие выбора такой системы координат. Обобщение представления /5.1/ на промежуточные импульсы $\vec{k}_3$ в /1.2/ проводится по аналогии с /2.5/.

Для однозначного определения функции $\chi_k(r,\vec{r}',\vec{q})$ наложим следующее граничное условие:

$$\chi_k(r,\vec{r}',\vec{q})\,|_{r'=r} = 0. \qquad /5.2/$$

Как и в /10/, выбор такого граничного условия позволяет исключить в данной схеме из рассмотрения известное борновское приближение.

Подставляя /5.1/ в уравнение /1.2/ и используя /2.1/, в полной аналогии с /10/, для функции $\chi_k(r,\vec{r}',\vec{q})$ с граничным условием /5.2/ получим в области $|\vec{r}'|\le r$ следующее точное нелинейное интегральное уравнение:

$$\chi_k(r,\vec{r}',\vec{q}) = \Phi_k(r,\vec{r}',\vec{q}) - i\int_{r'}^{r} d\rho \int d\vec{r}''V_\rho(r'') \times$$
$$\times w(k,\rho,\vec{r}',\vec{r}'',\vec{q})\exp[i\chi_k(\rho,\vec{r}'',\vec{q})]. \qquad /5.3/$$

Здесь функция w имеет вид

$$w(k,\rho,\vec{r}',\vec{r}'',\vec{q}) = \rho^2 V(\rho)\int d\vec{n}\,\{\exp[i\vec{s}(\vec{r}'-\vec{r}'')^{(-)}] \times$$
$$\times G^{(+)}(k,\rho\vec{n},\vec{r}')G^{(+)}(k,\rho\vec{n},\vec{r}'')^{(-)}\}_{\vec{s}=-\vec{q}/2+\hat{\vec{k}}\sqrt{k^2-q^2/4}}, \qquad /5.4/$$

где вектор $\vec{r}''^{(-)} = \vec{b}'' - \hat{\vec{k}} z''$, $\hat{\vec{k}} = (\vec{k}_1 + \vec{k}_2)/|\vec{k}_1 + \vec{k}_2|$, а линейный по потенциалу член

$$\Phi_k(r, \vec{r}', \vec{q}) = -2i \int d\vec{r}'' V_r(r'')\theta(r'' - r') \times$$

/5.5/

$$\times \{\exp[i\vec{s}(\vec{r}' - \vec{r}'')] G^{(+)}(k, \vec{r}', \vec{r}'')\}_{\vec{s} = -\vec{q}/2 + \hat{\vec{k}}\sqrt{k^2 - q^2/4}}$$

известен точно. Потенциал $V_r(r')$ в формулах /5.3/-/5.5/ определен в /1.1/, $\theta(x)$ -ступенчатая функция, а $G^{(+)}(k, \vec{r}, \vec{r}')$ -свободная функция Грина.

Введенную таким образом /5.1/ функцию $\chi_k(r, \vec{r}', \vec{q})$ можно интегрировать [4] как некоторую фазу, возникающую в амплитуде рассеяния /5.1/ в процессе движения частицы в области действия потенциала $V_r(r')$. В этой связи, величину $\chi_k(r, \vec{r}', \vec{q})$, как функцию параметра обрезания $r(0 \leq r < \infty)$, можно, по аналогии с /2,3/, назвать полной фазовой функцией. Для короткодействующих потенциалов искомая фаза $\chi_k(\vec{r}', \vec{q})$ амплитуды рассеяния $f(\vec{k}_1, \vec{k}_2)$ есть $\chi_k(r, \vec{r}', \vec{q})$ при $r \to \infty$.

6. До сих пор не накладывалось никаких существенных ограничений на вид заданного потенциала $V(r)$. В данном пункте рассмотрим специальный случай короткодействующего гладкого потенциала $V(r)$. Будем предполагать, что потенциал $V(r)$ имеет характерные радиус a и амплитуду V_0. Исходя из представления амплитуды рассеяния /5.1/, исследуем решение фазового уравнения /5.3/ в пределе $ka \to \infty$.

Рассмотрим в этом пределе линейный по потенциалу член /5.5/. Если ограничиться малыми углами рассеяния

$$\theta \leq 1/\sqrt{ka} \qquad (ka \gg 1), \tag{6.1}$$

то для получения главного члена в асимптотическом разложении /5.5/ по обратным степеням ka можно воспользоваться [4, 10] следующим приближением для функции Грина * :

$$G^{(+)}(k,\vec{r}',\vec{r}'') = -\frac{i}{2k}\delta^{(2)}(\vec{b}'-\vec{b}'')\exp(ik|z'-z''|), \qquad /6.2/$$

где $\vec{r}'=\vec{b}'+\hat{\vec{k}}z'$, $\vec{r}''=\vec{b}''+\hat{\vec{k}}z''$, $\hat{\vec{k}} = \dfrac{\vec{k}_1+\vec{k}_2}{|\vec{k}_1+\vec{k}_2|}$, $\delta^{(2)}(\vec{b})$ - двумерная δ-функция.

Подставив /6.2/ в /5.5/, с точностью до членов $O(1/ka)$ получим выражение для фазы Φ_k в виде

$$\Phi_k(r,\vec{r}',\vec{q}) = -\frac{1}{k}\int\limits_{|z'|}^{\sqrt{r^2-z'^2}} dz''V(|\vec{b}'+\hat{\vec{k}}z''|)\{1+ \qquad /6.3/$$

$$+\exp[ik(z'+z'')]\}.$$

Используя /6.2/, можно оценить нелинейный член в уравнении /5.3/ при $ka\to\infty$. Нетрудно убедиться в соответствии с анализом, данным в [11], что его величина есть $O(V_0/k^2)$ по сравнению с /6.3/ и при условии

$$V_0/k^2 \ll 1 \qquad /6.4/$$

основной вклад в полную фазовую функцию $\chi_k(r,\vec{r}',\vec{q})$ дает /6.3/. Следовательно, искомая фаза $\chi_k(\vec{r}',\vec{q})$ в рассматриваемом приближении есть /6.3/ при $r\to\infty$. В этом пределе быстроосциллирующей компонентой в интеграле /6.3/ можно пренебречь. В результате для фазы $\chi_k(\vec{r}',\vec{q})$ получим следующее выражение:

---

*Формула /6.2/ отличается от известного эйконального приближения [4] для функции Грина лишь тем, что здесь сохранена симметрия относительно z' и z''. Вывод /6.2/ дан в [10].

$$\chi_k(\vec{r}',\vec{q}) = -\frac{1}{k}\int\limits_{|z'|}^{\infty} dz'' V(|\vec{b}' + \hat{\vec{k}} z''|).$$

Подставив эту фазу в /5.1/ при $r \to \infty$, проводя в нем интегрирование по частям по переменной z', а также интегрирование по азимутальному углу, получим эйкональное представление /4/ для амплитуды рассеяния

$$f(q) = -ik\int\limits_0^\infty db\cdot b\cdot J_0(bq)\{\exp[i\chi_k(b)] - 1\},$$

где $q = |\vec{k}_1 - \vec{k}_2|$-переданный импульс, а фаза

$$\chi_k(b) = -\frac{1}{k}\int\limits_0^\infty dz V(|\vec{b} + \hat{\vec{k}} z|),$$

с известными условиями применимости /6.1/ и /6.4/.

Отметим, что анализ эйконального приближения для амплитуды рассеяния в аналогичном подходе был подробно рассмотрен в /11/, где было получено также обобщение его в область больших углов рассеяния. При получении фазового уравнения /5.3/ в настоящей работе и в /11/ была введена цилиндрическая система координат с осью, направленной по вектору $\hat{\vec{k}} = (\vec{k}_1 + \vec{k}_2)/|\vec{k}_1 + \vec{k}_2|$. В результате такого выбора системы координат получающиеся приближения для амплитуды рассеяния удовлетворяют соотношению взаимности.

7. Формулировка теории потенциального рассеяния, рассмотренная в данной статье, представляет собой прямое обобщение метода фазовых функций /2,3/. Продолжением аналогии с /2,3/ является возможность введения в этой схеме так называемой полной фазовой функции. Существенно, что для этой величины удается получить точное уравнение /5.3/. Это позволяет /11/ последовательным образом подойти к изучению амплитуды высокоэнергетического рассеяния при больших передачах импульса. Сферически симметричный способ обрезания

потенциала /1.1/, в отличие от рассмотренного в /10,11/, представляется более пригодным для анализа такой проблемы.

Одним из основных результатов настоящей работы является представление уравнения /1.2/ в виде /4.7/, не содержащем обобщенных функций. В такой форме /4.7/ уравнение /1.2/ становится доступным для конкретных численных расчетов.

Рассмотренный здесь подход интересно обобщить на релятивистский случай на основе квазипотенциальных уравнений /12/. В этой связи отметим особо трехмерную формулировку релятивистской проблемы двух тел, данную в /13/ .

В заключение автор выражает глубокую благодарность за обсуждения Г.В.Груше, Г.В.Ефимову, В.К.Лукьянову, Р.М.Мир-Касимову, В.В.Нестеренко и С.А.Садовскому.

Литература

1. *Babikov V.V., Mir-Kasimov R.M. Phys.Lett., 1970, 31B, p.415.*
2. *Бабиков В.В. УФН, 1967, 92, с.3; Метод фазовых функций в квантовой механике. "Наука" М., 1976.*
3. *Калоджеро Ф. Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния. "Мир", М., 1972.*
4. *Moliere G., Naturforsch Z. 1947, 2A, p.133.* Glauber R.J. *Lectures in Theoretical Physics, vol 1, N.Y., 1959.*
5. *Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. "Физматгиз", М.,1962.*
6. *Guttinger W. Fortschr. Physik, 1966, 14, p.517.*
7. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции, т.2. "Физматгиз", М., 1958.*
8. *Бабиков В.В., Мир-Касимов Р.М., Ханхасаев М.Х. Физ.-техн. ин-т АН УССР. Вопр. ат. науки и техн., 1972, 1/3/, с.40.*
9. *Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований, т. 1. "Наука", М., 1969.*
10. *Бабиков В.В., Ханхасаев М.Х. Изв. АН СССР, сер. физ., 1974, 38, с.725. Ханхасаев М.Х. ОИЯИ, Р4-8475, Дубна, 1974.*

11. Ханхасаев М.Х. ТМФ, 1976, 29, с.221.
12. Гарсеванишвили В.Р. и др. ТМФ, 1971, 6, с. 36. Кадышевский В.Г., Мир-Касимов Р.М., Скачков Н.Б. ЭЧАЯ, 1972, т.2, с. 635.
13. Амирханов И.В., Груша Г.В., Мир-Касимов Р.М. ТМФ, 1970, 30, с.333.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 марта 1977 года.