ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

P4 - 10333

И.Н.Михайлов, Д.Янссен

МИКРОСКОПИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СОСТОЯНИЙ ДЕФОРМИРОВАННЫХ ЯДЕР В ОКРЕСТНОСТИ ИРАСТ-ПОЛОСЫ

1976

P4 - 10333

И.Н.Михайлов, Д.Янссен

МИКРОСКОПИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СОСТОЯНИЙ ДЕФОРМИРОВАННЫХ ЯДЕР В ОКРЕСТНОСТИ ИРАСТ-ПОЛОСЫ

Направлено в "Известия АН СССР" /сер. физ./

Михайлов И.Н., Янссен Д. P4 - 10333

Микроскопическое описание состояний деформированных ядер в окрестности ираст-полосы

Построена простая микроскопическая модель, позволяющая изучить структуру состояний ядер вблизи ираст-полосы. Нутационное движение выступает в данной схеме как одна из нормальных мод колебаний. Вибрационные состояния, связанные с квадрупольными колебаниями поверхности ядра, определяются из общего уравнения, которое в пределе медленного вращения разбивается на известные уравнения для β- и Δ- вибраций, γ - колебательных возбуждений и неколлективизированных $\Delta K = \pm 1$ возбуждений.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований
Дубна 1976

Mikhailov I.N., Janssen J. P4 - 10333

Microscopic Description of the Deformed Nuclei States in the Vicinity of Yrast Band

A simple microscopic model for the structure of nuclear states in vicinity of yrast band is given. The wobbling motion appears in it as a particular normal mode of excitation. The frequencies of surface quadrupole vibrations are determined from a common equation which in the limit of slow rotation separates into the equations for β- and Δ-vibrations, γ-vibration and for the noncollectivized $\Delta K = \pm 1$ excitations.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research

Dubna 1976

§I. Введение

Ниже описана простая теоретическая модель, близкая к методу принудительного вращения, позволяющая описать энергию состояний ираст-полосы, энергии коллективизированных и двухквазичастичных возбуждений, а также основные неэнергетические характеристики этих состояний (в частности, квадрупольные моменты и $B(E2)$ - факторы). При больших угловых моментах состояний ираст-полосы среди коллективизированных возбуждений в этой модели можно выделить ветвь, свойства которой совпадают со свойствами колебаний нутационной природы. При уменьшении углового момента эта ветвь переходит в двухквазичастичные состояния с K -числом, отличающимся на единицу от K -числа основного состояния. Данная ветвь возбуждения ускользала от описания в более ранних подходах /I-7/. В отличие от модели /8/, описание новой ветви возбуждений в данном подходе не связано с введением дополнительных феноменологических констант в гамильтониан ядра.

Для удобства ориентации материал статьи разбит на несколько параграфов. Указание только одной цифры в ссылке на формулу означает, что она находится в этом же разделе.

§2. Формулировка модели I. (Вариационный принцип)

Гамильтониан ядра считается заданным и удовлетворяющим всем известным условиям симметрии. Будем считать, что состояния ираст-полосы φ_{IM} можно связать с семейством состояний Ψ, являющихся вакуумом по отношению к операторам поглощения боголюбовских квазичастиц. Связь устанавливается соотношением

$$\Psi = \sum_{IM} g_{IM}(\mathcal{M})\,\varphi_{IM}. \qquad (2.1)$$

Функции Ψ различаются средними значениями оператора углового момента $\langle\Psi|\hat{\underline{J}}|\Psi\rangle = \underline{\mathcal{M}}$. Поскольку вместе с Ψ любая функция $\hat{R}\Psi$, где $\hat{R}$ – оператор поворота в пространстве, также удовлетворяет соотношению (I) и является боголюбовским вакуумом, можно ограничиться рассмотрением лишь таких состояний, для которых

$$\mathcal{M}_y = \mathcal{M}_z = 0, \quad \mathcal{M}_x = \mathcal{M}. \qquad (2.2)$$

Выполнение соотношения (2) будет предполагаться в дальнейшем.

Состояния Ψ, наилучшим образом аппроксимирующие суперпозиции состояний ираст-полосы, получим, сформулировав вариационный принцип для волновых функций (I). Имеем

$$\delta\langle\Psi|\hat{H}|\Psi\rangle = \sum_I E_I\,\delta\Big(\sum_M |g_{IM}|^2\Big) + \sum_{IM}|g_{IM}|^2\,\delta\langle\varphi_{IM}|\hat{H}|\varphi_{IM}\rangle.$$

Если, как предположено выше, неварьированные функции φ_{IM} являются собственными для гамильтониана $\hat{H}$, то их малая вариация, сохраняющая норму, в линейном порядке не дает вклада в правую часть последнего равенства. Отсюда следует

$$\delta\langle\Psi|\big(\hat{H} - h(\hat{J}^2)\big)|\Psi\rangle = 0, \qquad (2.3)$$

где $\hat{J}^2 \equiv \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$, а функция h зависит от $\hat{J}^2$ так же, как E_I от $I(I+1)$: *)

$$h\big(I(I+1)\big) = E_I. \qquad (2.4)$$

Если при заданном $\mathcal{M}$ энергии состояний ираст-полосы, входящих с большим весом в волновые функции Ψ, достаточно мало отличаются от энергий, определенных простой формулой ротатора

---

*) Вариационный принцип (3) использовался в ряде работ (см.,например[4]).

$$E_I \approx E_{I_0} + \mu\big[I(I+1) - I_0(I_0+1)\big] \qquad (2.5)$$

и (или) если состояния Ψ таковы, что значение $\langle\hat{\underline{J}}^2\rangle$ полностью определяет более высокие моменты оператора $\hat{J}^2$, то вариационный принцип (3) можно упростить, сделав замену $h(\hat{\underline{J}}^2) \to \mu\cdot\hat{\underline{J}}^2$ *).

Запишем оператор $\hat{J}^2$ в форме

$$\hat{\underline{J}}^2 = \langle\hat{\underline{J}}^2\rangle + 2\,\mathcal{M}:\hat{J}_x: + :\underbrace{\hat{\underline{J}}\cdot\hat{\underline{J}}}: + :\hat{\underline{J}}^2:, \qquad (2.6)$$

понимая под символом $:\;:$ приведение операторов фермионов к нормальному виду и отмечая скобкой под строкой связь пар операторов фермионов, входящих в разные операторы $\hat{\underline{J}}$. Поскольку первый и последний члены в формуле (6) не дают вклада при варьировании Ψ в классе боголюбовских вакуумов, приходим к вариационному принципу

$$\delta\langle\Psi|\big(\hat{H} - \Omega\hat{J}_x - \mu:\underbrace{\hat{\underline{J}}\cdot\hat{\underline{J}}}:\big)|\Psi\rangle = 0, \qquad (2.7)$$

причем два параметра Ω и μ и среднее значение $\langle\hat{J}_x\rangle = \mathcal{M}$ связаны условием согласования

$$\Omega = 2\mu\cdot\mathcal{M}. \qquad (2.8)$$

Возможность введения дополнительной метки, в качестве которой выступает у нас $\mathcal{M}$, для фиксирования решения вариационного уравнения (3) или (7) связано с вырожденностью этого решения: уравнению (3) удовлетворяет собственная функция любого из состояний ираст-полосы, а вместе с тем и любая их суперпозиция.

---

*) Известно,[9] что для функций с аксиальной симметрией интеграл перекрывания $\langle e^{i\beta\hat{J}_y}\rangle \approx \exp\{-\frac{1}{4}\langle\hat{\underline{J}}^2\rangle\sin^2\beta\}$. Поскольку все моменты $\hat{J}^2$ можно в этом случае связать с некоторыми производными по β от интеграла перекрывания в нулевой точке, все они оказываются определенными функциями $\langle\hat{\underline{J}}^2\rangle$. В частности, $\langle\hat{\underline{J}}^4\rangle = 2\langle\hat{J}^2\rangle^2 + 6\langle\hat{J}^2\rangle$.

Вариационный принцип (7) имеет очевидное сходство с вариационным принципом модели принудительного вращения и, по-видимому, в большинстве практических случаев должен приводить к состояниям Ψ, весьма близким к Ψ_{crank} , получаемым из (7), если отбросить последний член в варьируемом функционале. Соотношение (8) позволяет написать формулу, которая в кренкинг-модели выступает как определение момента инерции ядра $\mathcal{J}_{\mathcal{M}}$:

$$\frac{1}{2\mathcal{J}_{\mathcal{M}}} = \mu = \frac{\partial \langle H \rangle}{\partial \mathcal{M}^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\Omega}{\mathcal{M}}. \tag{2.9}$$

Предположения, с которых мы начали, позволяют, в принципе, отказаться от использования соглашения модели принудительного вращения

$$\mathcal{M}^2_{cr} = I(I+1)\ , \quad E_I^{(cr)} = \langle \mathcal{M}_{cr} | \hat{H} | \mathcal{M}_{cr} \rangle .$$

Применяя аргументы, подобные использованным в [9,10], авторы данной статьи получили в [11] следующие формулы:

$$E_I = \mathcal{N} \langle \Psi | \hat{H} | \tilde{\Psi} \rangle\ , \quad I + 1/2 = \mathcal{N} \langle \Psi | \sqrt{\hat{\underline{J}}^2 + \tfrac{1}{4}}\, | \tilde{\Psi} \rangle , \tag{2.10}$$

где

$$|\tilde{\Psi}\rangle = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{2\pi} d\gamma \int_0^{\pi} \sin\beta\, d\beta \langle \Psi | \hat{R}(-\alpha,\beta,-\gamma) | \Psi \rangle\, \hat{R}(\alpha,\beta,\gamma) | \Psi \rangle \tag{2.11}$$

$$\mathcal{N} = \langle \Psi | \tilde{\Psi} \rangle^{-1} .$$

§ 3. Формулировка модели II. Гамильтониан $H - h$ в приближении случайной фазы

Вариационный принцип, сформулированный в § 2, определяет оператор $\tilde{H} = H - h(\hat{J}^2)$, который можно назвать оператором

внутренних возбуждений системы. Это означает следующее: если известно состояние $|\Psi_0\rangle$, такое, что

$$\delta \langle \Psi | \tilde{H} | \Psi \rangle = 0 \tag{3.1}$$

при произвольных вариациях вектора состояния вблизи $|\Psi_0\rangle$ и если известен оператор O_λ^+ , такой, что

$$[\tilde{H}, O_\lambda^+] = \omega_\lambda O_\lambda^+\ , \quad O_\lambda | \Psi_0 \rangle = 0\ , \quad \langle \Psi_0 | [O_\lambda, O_\lambda^+] | \Psi_0 \rangle = 1 , \tag{3.2}$$

то и состояние $O_\lambda^+ | \Psi_0 \rangle$ удовлетворяет вариационному соотношению (I) . Повторяя аргументы § 2, можно убедиться, что проекция состояния $O_\lambda^+ | \Psi_0 \rangle$ с определенным значением углового момента является собственным состоянием оператора $\hat{H}$, энергия которого отличается на ω_λ от энергии ираст-состояния с тем же угловым моментом. Эти простые соображения открывают возможность использования метода случайной фазы для определения спектра возбужденных состояний при фиксированном значении углового момента.

В исследуемой нами модели гамильтониан $\tilde{H}$ имеет вид

$$\tilde{H} = \sum_\alpha e_\alpha (c_\alpha^+ c_\alpha + c_{\tilde{\alpha}}^+ c_{\tilde{\alpha}}) - \frac{G}{4} P^+ P - \frac{\varkappa}{2} \sum_m Q_m Q_{-m} (-1)^m - \mu \hat{\underline{J}}^2 , \tag{3.3}$$

здесь

$$|\alpha\rangle = | j m \mathcal{N} \ell \rangle\ , \quad |\tilde{\alpha}\rangle = (-1)^{j-m} | j\, {-m}\, \mathcal{N} \ell \rangle , \tag{3.4}$$

а структура операторов спаривания P , квадрупольного и углового моментов представлена ниже. Фазовые соглашения, принимаемые нами, таковы, что матричные элементы $\hat{J}_x$ и $\hat{J}_z$ действительны, а $\hat{J}_y$ – чисто мнимы. Мы используем трансформацию Гудмана [12]

$$c_A^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_\alpha^+ + c_{\tilde{\alpha}}^+) \qquad c_{\bar{A}}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (-c_\alpha^+ + c_{\tilde{\alpha}}^+) \tag{3.5}$$

$$c_A = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_\alpha + c_{\tilde{\alpha}}) \qquad c_{\bar{A}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-c_\alpha + c_{\tilde{\alpha}}) .$$

Заметим, что в правой стороне (5) следует ограничиться только теми значениями индекса α, для которых $m-\frac{1}{2}$ – четное. Состояние Ψ из § 2 мы считаем вакуумом по отношению к операторам квазичастиц:

$$a_i|\Psi\rangle = a_{\bar{i}}|\Psi\rangle = 0 \,,$$

где

$$\begin{aligned} a_i^+ &= \sum_A \left(u_{iA} c_A^+ + v_{iA} c_{\bar{A}} \right) , \\ a_{\bar{i}}^+ &= \sum_A \left(\tilde{u}_{iA} c_{\bar{A}}^+ + \tilde{v}_{iA} c_A \right) \end{aligned} \qquad (3.6)$$

с вещественными параметрами $u, \tilde{u}, v, \tilde{v}$, удовлетворяющими соотношениям

$$\begin{aligned} &\sum_A \left(u_{iA} u_{kA} + v_{iA} v_{kA} \right) = \delta_{ik} , \\ &\sum_A \left(\tilde{u}_{iA} \tilde{u}_{kA} + \tilde{v}_{iA} \tilde{v}_{kA} \right) = \delta_{ik} , \\ &\sum_i \left(\tilde{v}_{iA} \tilde{v}_{iB} + u_{iA} u_{iB} \right) = \delta_{AB} , \\ &\sum_i \left(v_{iA} v_{iB} + \tilde{u}_{iA} \tilde{u}_{iB} \right) = \delta_{AB} . \end{aligned} \qquad (3.7)$$

При этом имеют место соотношения симметрии

$$\begin{aligned} &e^{i\pi \hat{J}_x} |\Psi\rangle = \eta \hat{T} e^{i\pi \hat{J}_z} |\Psi\rangle = e^{i\varphi} |\Psi\rangle , \; \eta^2 = 1 \\ &\hat{\pi} |\Psi\rangle = \pm |\Psi\rangle . \end{aligned} \qquad (3.8)$$

($\hat{\pi}, \hat{T}$ – операторы пространственного и временного отражения). Из (8) следует, в соответствии с (2.2), что

$$\begin{aligned} \langle\Psi|\hat{J}_y|\Psi\rangle = \langle\Psi|\hat{J}_z|\Psi\rangle = \langle\Psi|Q_{\pm 1}|\Psi\rangle = \\ = \langle\Psi|(Q_2 - Q_{-2})|\Psi\rangle = 0 \,, \end{aligned} \qquad (3.9)$$

а также следующая блок-диагональная структура матриц плотности

$$\begin{aligned} &\rho_{AB} = \langle\Psi|c_A^+ c_B|\Psi\rangle = \sum_i \tilde{v}_{iA} \tilde{v}_{iB} \\ &\rho_{\bar{A}\bar{B}} = \sum_i v_{iA} v_{iB} \,, \quad \rho_{A\bar{B}} = \rho_{\bar{A}B} = 0 . \\ &K_{\bar{A}B} = \langle\Psi|c_B c_{\bar{A}}|\Psi\rangle = \sum_i v_{iA} u_{iB} , \\ &K_{A\bar{B}} = \sum_i \tilde{v}_{iA} \tilde{u}_{iB} \,, \quad K_{AB} = K_{\bar{A}\bar{B}} = 0 . \end{aligned} \qquad (3.10)$$

Вариационный принцип (2.7) приводит к уравнениям на собственные векторы и собственные значения для матриц u, v, размерность которых равна размерности базиса одночастичных состояний:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 & \Delta_1 \\ \Delta_1^+ & -\mathcal{H}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} , \\ &\begin{pmatrix} \mathcal{H}_2 & \Delta_1^+ \\ \Delta_1 & -\mathcal{H}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ -\tilde{v} \end{pmatrix} = \tilde{E} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ -\tilde{v} \end{pmatrix} , \end{aligned} \qquad (3.11)$$

где

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}_1 \hat{=} (e_A - \lambda) \delta_{AB} + \Gamma_{AB} \, , \\ &\mathcal{H}_2 \hat{=} (e_{\bar{A}} - \lambda) \delta_{\bar{A}\bar{B}} + \Gamma_{\bar{A}\bar{B}} \quad (e_A = e_{\bar{A}} = e_\alpha) , \end{aligned} \qquad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{AB} = &-\varkappa \left(\langle\Psi|Q_0|\Psi\rangle q_{0\,AB} + \langle\Psi|Q_2^{(+)}|\Psi\rangle q_{2\,AB}^{(+)} \right) \\ &- \mu \cdot \mathcal{M} \, j_{AB}^x + 2\mu \sum_{CD} \left(j_{CB}^x j_{AD}^x + \right. \\ &\left. + j_{CB}^y j_{AD}^y + j_{CB}^z j_{AD}^z \right) \left(\rho_{\bar{C}\bar{D}} + \tfrac{1}{2} \delta_{CD} \right) \end{aligned}$$

$$\Gamma_{\bar{A}\bar{B}} = -\varkappa\left(\langle\Psi|Q_0|\Psi\rangle q_{0AB} + \langle\Psi|Q_2^{(+)}|\Psi\rangle q^{(+)}_{2AB}\right) + \\ + \mu\cdot\mathcal{M}\, j^x_{AB} + 2\mu\sum_{CD}\left(j^x_{CB} j^x_{AD} + \right. \\ \left. + j^y_{CB} j^y_{AD} + j^z_{CB} j^z_{AD}\right)\left(\rho_{CD} + \tfrac{1}{2}\delta_{CD}\right),$$

$$\Delta_1 \hat{=} \Delta_{\bar{A}B} = -\frac{G}{2}\langle\Psi|P^+|\Psi\rangle\delta_{\bar{A}B} - \\ -2\mu\sum_{CD}\left(j^x_{CB} j^x_{DA} + j^y_{CB} j^y_{DA} + j^z_{CB} j^z_{DA}\right) K_{\bar{C}D}.$$

Определим теперь операторы "бозонов" $b,\ b^+$:

$$a_i^+ a_k^+ = b^+_{ik} = -b^+_{ki}$$

$$a_i^+ a_{\bar{k}}^+ = b^+_{i\bar{k}}\ ,\quad a_{\bar{i}}^+ a_{\bar{k}}^+ = b^+_{\bar{i}\bar{k}}\ , \tag{3.I3}$$

$$a_i^+ a_k = \Sigma_\ell\left(b^+_{i\ell} b_{k\ell} + b^+_{i\bar{\ell}} b_{k\bar{\ell}}\right) \quad \text{и т.д.} \tag{3.I4}$$

Используя стандартные приближения метода приближенного вторичного квантования[13], представим гамильтониан $\tilde{\mathcal{H}}$ в виде

$$\tilde{\mathcal{H}} = \langle\Psi|(\hat{H} - \mu\hat{\underline{J}}^2)|\Psi\rangle + H_B\ , \tag{3.I5}$$

где $H_B = H_\Delta + H_R$ включает в себя лишь билинейную по операторам b и b^+ часть. Оператор H_Δ зависит от бозонов $b_{i\bar{k}}$, в то время как в H_R входят бозоны b_{ik} и $b_{\bar{i}\bar{k}}$. Возможность разбиения H_B на две коммутирующие между собой части является следствием первого из соотношений симметрии (8). Многие важные соотношения, определяющие H_B, можно найти в работе[8], однако явные выражения для H_Δ и H_R в рассматриваемой модели существенно отличаются от выражений в работе[8].

Имеем

$$H_\Delta = \sum_{ik}(E_i + E_{\bar{k}})\, b^+_{i\bar{k}} b_{i\bar{k}} - \frac{G}{4} P^+_B P_B - \\ - \frac{\varkappa}{2}\left(\hat{Q}^2_{B0} + \hat{Q}^{(+)^2}_{B2} + \hat{Q}^{(+)^2}_{B1}\right) - \mu\hat{J}^2_{Bx}\ , \tag{3.I6}$$

$$H_R = \frac{1}{2}\sum_{ik}\left[(E_i + E_k)\, b^+_{ik} b_{ik} + (\tilde{E}_i + \tilde{E}_k)\, b^+_{\bar{i}\bar{k}} b_{\bar{i}\bar{k}}\right] - \\ - \frac{\varkappa}{2}\left(Q^{(-)^2}_{B1} + Q^{(-)^2}_{B2}\right) - \mu\left(\hat{J}^2_{By} + \hat{J}^2_{Bz}\right). \tag{3.I7}$$

В (I7) индекс B у оператора означает, что в нем оставлена только однобозонная часть соответствующего одночастичного оператора. В дальнейшем только однобозонные части операторов будут удерживаться в выражениях, а индекс B – подразумеваться

$$\hat{Q}^{(+)}_m = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{Q}_m + (-1)^m\hat{Q}_{-m}\right), \tag{3.I8}$$

$$\hat{Q}^{(-)}_m = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(Q_m - (-1)^m\hat{Q}_{-m}\right)$$

(m = I или 2)

Операторы, входящие в (I6), (I7), имеют следующий вид:

$$\hat{J}_x = \sum_{ik} j^x_{ik}\left(b^+_{i\bar{k}} + b_{i\bar{k}}\right),$$

$$\hat{J}_y = i\sum_{ik}\left[j^y_{ik}\left(b^+_{ik} - b_{ik}\right) + \tilde{j}^y_{ik}\left(b^+_{\bar{i}\bar{k}} - b_{\bar{i}\bar{k}}\right)\right],$$

$$\hat{J}_z = -\sum_{ik}\left[j^z_{ik}\left(b^+_{ik} + b_{ik}\right) + \tilde{j}^z_{ik}\left(b^+_{\bar{i}\bar{k}} + b_{\bar{i}\bar{k}}\right)\right],$$

$$j^x_{ik} = -\langle\Psi|\hat{J}_x a^+_{\bar{k}} a^+_i|\Psi\rangle \quad \text{и т.д.}$$

$$
\begin{aligned}
Q_2^{(-)} &= -i\sum_{ik}\left\{ q_{2ik}^{(-)}\left(b_{ik}^{+}-b_{ik}\right)+\tilde{q}_{2ik}^{(-)}\left(b_{\bar{i}\bar{k}}^{+}-b_{\bar{i}\bar{k}}\right)\right\}, \\
Q_2^{(+)} &= \sum_{ik} q_{2ik}^{(+)}\left(b_{i\bar{k}}^{+}+b_{i\bar{k}}\right), \\
Q_1^{(-)} &= -\sum_{ik}\left\{ q_{1ik}^{(-)}\left(b_{ik}^{+}+b_{ik}\right)+\tilde{q}_{1ik}^{(-)}\left(b_{\bar{i}\bar{k}}^{+}+b_{\bar{i}\bar{k}}\right)\right\}, \\
Q_1^{(+)} &= i\sum_{ik} q_{1ik}^{(+)}\left(b_{i\bar{k}}^{+}-b_{i\bar{k}}\right), \\
Q_0 &= \sum_{ik} q_{0ik}\left(b_{i\bar{k}}^{+}+b_{i\bar{k}}\right), \\
P^{+} &= \sum_{ik}\left\{ p_{ik}^{(+)}\left(b_{i\bar{k}}^{+}+b_{i\bar{k}}\right)+p_{ik}^{(-)}\left(b_{i\bar{k}}^{+}-b_{i\bar{k}}\right)\right\},
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

причем свойства симметрии гамильтониана ($[\hat{\mathfrak{J}}, H] = 0$, $[\hat{\mathcal{N}}, H] = 0$) приводят к следующим соотношениям:

$$
\begin{aligned}
&2Q\sin\gamma\cdot\varkappa\, q_{2ik}^{(-)} = E_{ik}\, j_{ik}^{z} - 2\mu\cdot\mathcal{M}\, j_{ik}^{y}, \\
&2Q\sin\gamma\cdot\varkappa\, \tilde{q}_{2ik}^{(-)} = \tilde{E}_{ik}\, \tilde{j}_{ik}^{z} - 2\mu\cdot\mathcal{M}\, \tilde{j}_{ik}^{y}, \\
&-2\sqrt{2}\, Q\cos(\gamma+\pi/6)\,\varkappa\, q_{1ik}^{(-)} = E_{ik}\, j_{ik}^{y} - 2\mu\mathcal{M}\, j_{ik}^{z}, \\
&-2\sqrt{2}\, Q\cos(\gamma+\pi/6)\,\varkappa\, \tilde{q}_{1ik}^{(-)} = \tilde{E}_{ik}\, \tilde{j}_{ik}^{y} - 2\mu\cdot\mathcal{M}\, \tilde{j}_{ik}^{z}, \\
&2\sqrt{2}\, Q\cos(\gamma-\pi/6)\,\varkappa\, q_{1ik}^{(+)} = 2(E_i+\tilde{E}_k)\, j_{ik}^{x} \\
&\Delta p_{ik}^{(-)} = (E_i+\tilde{E}_k)\, n_{ik}, \quad n_{ik} = \langle\Psi|\hat{\mathcal{N}} a_k^{+} a_i|\Psi\rangle, \\
&E_{ik} = E_i + E_k, \quad \tilde{E}_{ik} = \tilde{E}_i + \tilde{E}_k, \\
&Q\cos\gamma = \langle\Psi|\hat{Q}_0|\Psi\rangle, \quad Q\sin\gamma = \langle\Psi|Q_2^{(+)}|\Psi\rangle.
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

§ 4. Диагонализация гамильтониана H_B

Общая схема диагонализации H_B повторяет стандартную процедуру метода случайных фаз (см., например/8/, как наиболее близкий пример). Вводим эрмитовские операторы обобщенных координат и импульсов X_λ, P_λ, канонически сопряженные друг другу в приближении случайных фаз, представляющие собой линейные комбинации бозонных операторов b, b^+. Коэффициенты определяем из уравнений

$$
\begin{aligned}
&[P_\lambda, H_B] = -i\,\omega_\lambda X_\lambda, \\
&[X_\lambda, H_B] = i\,\omega_\lambda P_\lambda, \\
&[X_\lambda, P_{\lambda'}] = i\,\delta_{\lambda\lambda'}.
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Нормальные моды оператора H_Δ

Операторы $\hat{\mathfrak{J}}_x$ и $\hat{\mathcal{N}}$ коммутируют с H_Δ и соответствуют "духовым фононам". Введение двух лагранжевых множителей μ и Ω в (2.7) мы связали выше с вырождением задачи на отыскание решения вариационного уравнения (2.7), не связанным с поворотами в пространстве или изменениями фазы состояния. Вырождение будет иметь место, если потребовать наличия еще одного "духового фонона" для оператора H_Δ:

$$
[\hat{\varphi}, H_\Delta] = 0 . \tag{4.2}
$$

Единственным свободным параметром (при фиксированном Ω или $\mathcal{M}$) является параметр μ, уравнение (2) фиксирует его значение. Нормировав собственный вектор $\hat{\varphi}$ оператора H_Δ, соответствующий решению (2), так, чтобы

$$
[\hat{\varphi}, \hat{\mathfrak{J}}_x] = i , \tag{4.3}
$$

находим, что состояние

$$\Psi' = e^{i\Delta\mathcal{M}\hat{\varphi}}\,\Psi$$

удовлетворяет вариационному принципу (2.3), если таковому удовлетворяет состояние Ψ ($\hat{\varphi}$ - коммутирует с $\widetilde{H}$ в приближении случайных фаз!). Среднее значение

$$\begin{aligned}\mathcal{M}' &= \langle \Psi' | \hat{J}_x | \Psi' \rangle = \\ &= \langle \Psi | \hat{J}_x | \Psi \rangle + i\Delta\mathcal{M} \langle \Psi | [\hat{J}_x, \varphi] | \Psi \rangle = \mathcal{M} + \Delta\mathcal{M},\end{aligned} \tag{4.4}$$

и решения (2.3) могут быть наделены меткой $\mathcal{M}$, причем каждому значению $\mathcal{M}$ соответствует одно решение (2.7), если остальные собственные частоты H_B отличны от нуля. Структура оператора $\hat{\varphi}$ из уравнений (2), (3) определяется уравнениями

$$\begin{aligned}&\hat{\varphi} = i\sum_{ik} \varphi_{ik}\,(b^{+}_{i\bar{k}} - b_{i\bar{k}}),\\ &(E_i+\widetilde{E}_k)\varphi_{ik} - \mu j^{x}_{ik} = G\Big(\sum_{lm}\varphi_{lm}P^{(+)}_{lm}\Big)P^{(+)}_{ik} + \\ &+ 2\varkappa\Big(\sum_{lm}\varphi_{lm}q_{0lm}\Big)q_{0lm} + 2\varkappa\Big(\sum_{lm}\varphi_{lm}q^{(+)}_{2lm}\Big)q^{(+)}_{2ik},\\ &4\sum_{ik} j^{x}_{ik}\varphi_{ik} = 1.\end{aligned} \tag{4.5}$$

Операторы P_ν и X_ν запишем в виде

$$\begin{aligned}P_\nu &= i\sum_{ik} p^{\nu}_{ik}\,(b^{+}_{i\bar{k}} - b_{i\bar{k}}),\\ X_\nu &= \sum_{ik} x^{\nu}_{ik}\,(b^{+}_{i\bar{k}} + b_{i\bar{k}}).\end{aligned} \tag{4.6}$$

Поскольку $\hat{H}^{k}_{\Delta}$ содержит несколько факторизованных операторов, уравнения (I) приводят к секулярному уравнению невысокого порядка. Заметим, что в применении к реальным ядрам секулярное уравнение, приводимое здесь, следует преобразовать, вводя протонные и нейтрон-

ные индексы у одночастичных уровней, а также выделяя из гамильтониана члены $g^{-1}_{tt'}\hat{\mathcal{N}}_t\hat{\mathcal{N}}_{t'}$ (индексы t, t' - различают протоны от нейтронов). При этом вид секулярного уравнения существенно усложняется. Общий вид секулярного уравнения таков

$$\omega^2\,\mathcal{F}_\Delta(\omega^2) = 0, \tag{4.7}$$

где

$$\mathcal{F}_\Delta(\omega^2) = \begin{vmatrix} 2GS_1-1 & 4\varkappa S_2 & S_5 & 4\varkappa S_3 & S_4 \\ 2GS_2 & 4\varkappa S_6-1 & S_9 & 4\varkappa S_7 & S_8 \\ 2GS_5 & 4\varkappa S_9 & S_{15} & 4\varkappa S_{12} & S_{14} \\ 2GS_3 & 4\varkappa S_7 & S_{12} & 4\varkappa S_{10}-1 & S_{11} \\ 2GS_4 & 4\varkappa S_8 & S_{14} & 4\varkappa S_{11} & S_{13} \end{vmatrix}. \tag{4.8}$$

Здесь

$$\begin{aligned}&S_1 = \sum_{ik}\frac{(P^{(+)}_{ik})^2\,2E_{i\tilde{k}}}{4E^2_{i\tilde{k}}-\omega^2} \equiv \sum\frac{(P^{(+)})^2\,2E}{4E^2-\omega^2}, \quad S_2 = \sum\frac{P^{(+)}q_0\,2E}{4E^2-\omega^2},\\ &S_3 = \sum\frac{P^{(+)}q^{(+)}_2\,2E}{4E^2-\omega^2}, \quad S_4 = \sum\frac{P^{(+)}j^{x}\,2E}{4E^2-\omega^2}, \quad S_5 = \sum\frac{P^{(+)}n\,2E}{4E^2-\omega^2},\\ &S_6 = \sum\frac{(q_0)^2\,2E}{4E^2-\omega^2}, \quad S_7 = \sum\frac{q_0q^{(+)}_2\,2E}{4E^2-\omega^2}, \quad S_8 = \sum\frac{q_0j^{x}\,2E}{4E^2-\omega^2},\\ &S_9 = \sum\frac{n\,q_0\,2E}{4E^2-\omega^2}, \quad S_{10} = \sum\frac{(q^{(+)}_2)^2\,2E}{4E^2-\omega^2}, \quad S_{11} = \sum\frac{q^{(+)}_2 j^{x}\,2E}{4E^2-\omega^2},\\ &S_{12} = \sum\frac{q^{(+)}_2 n}{4E^2-\omega^2}, \quad S_{13} = \sum\frac{(j^{x})^2\,2E}{4E^2-\omega^2}, \quad S_{14} = \sum\frac{j^{x}n\,2E}{4E^2-\omega^2},\\ &S_{15} = \sum\frac{(n)^2\,2E}{4E^2-\omega^2}; \quad E_{i\tilde{k}} \equiv E = E_i+\widetilde{E}_k.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Решение (3), (7) с нулевой частотой связано с наличием "духового фонона" $\hat{\varphi}$.

При $\mathcal{M}=0$ для аксиальных ядер структура секулярного уравнения упрощается, поскольку детерминант приобретает блочную структуру: блоки, не равные нулю тождественно, обведены в (8) штрихованной линией. Решения приобретают в этом случае знакомый вид:

а) левый верхний блок генерирует секулярное уравнение

$$\begin{vmatrix} 2GS_1-1 & 4\varkappa S_2 & S_5 \\ 2GS_2 & 4\varkappa S_6-1 & S_9 \\ 2GS_5 & 4\varkappa S_9 & S_{15} \end{vmatrix} = 0 , \qquad (4.10)$$

описывающее β - и Δ - вибрационные моды[13].

в) следующий блок приводит к уравнению

$$4\varkappa \sum_{ik} \frac{(q^{(+)}_{2\,ik})^2\, 2E_{i\tilde{k}}}{4E^2_{i\tilde{k}}-\omega^2} = 1 \qquad (4.11)$$

и описывает γ -вибрационные возбужденные состояния ядер[13].

с) последний блок секулярного уравнения вырождается в уравнение для частот возбуждений с $\Delta K=\pm 1$, рассмотренных в работе[14], которые в данной модели при $\mathcal{M}=0$ коллективными свойствами не обладают.

Наконец, в формуле (5) суммы в круглых скобках обращаются при $\mathcal{M}=0$ в нуль и условие для μ ведет к знакомой формуле кренкинг-модели для момента инерции

$$(2\mu)^{-1} \equiv \mathcal{J}_x = 2\sum_{ik} \frac{(j^x_{ik})^2}{E_{i\tilde{k}}} . \qquad (4.12)$$

При $\mathcal{M}\neq 0$ спаривание и квадрупольные силы меняют соотношение (12), приводя его к виду, установленному в[15]. Вибрационные моды β-, γ - типов, парные вибрации и ветвь, родственная $\Delta K=\pm 1$ возбуждениям невращающихся ядер, оказываются связанными между собой вследствие того, что вращение приводит одновременно к исчезновению аксиальной симметрии и T -инвариантности решений.

§ 5. Диагонализация H_R ; моды нутационных колебаний

Повторяя процедуру, описанную в § 4, вводим операторы

$$P_\lambda = \sum_{ik}\left[p^\lambda_{ik}(b^+_{ik}-b_{ik}) + \tilde{p}^\lambda_{ik}(b^+_{\bar{i}\bar{k}}-b_{ik})\right], \qquad (5.1)$$

$$X_\lambda = \sum_{ik}\left[x^\lambda_{ik}(b^+_{ik}+b_{ik}) + \tilde{x}^\lambda_{ik}(b^+_{\bar{i}\bar{k}}+b_{\bar{i}\bar{k}})\right],$$

коэффициенты которых находим из уравнений

$$[P_\lambda, H_R] = -i\omega_\lambda X_\lambda , \qquad (5.2)$$

$$[X_\lambda, H_R] = i\omega_\lambda P_\lambda .$$

Ограничимся здесь обсуждением решений для ω_λ , возникающих из секулярного уравнения. Секулярное уравнение удовлетворяется, если:

а) $\omega = 0$.

Заметим, что $\hat{J}_y$, $\hat{J}_z$ имеют структуру X_λ и P_λ , соответственно, и коммутируют с оператором H_R ;

в) $\mathcal{M}=0$.

Оператор H_R остается хорошо определенным и в этом предельном случае. Таким образом, данное решение является формальным, и для получения физических результатов при $\mathcal{M}=0$ требуется специальное рассмотрение, учитывающее дополнительную симметрию H_R.

c) $$\left[\omega^2 S + \frac{\mathcal{M}}{4\mathcal{J}_x}(\mathcal{J}_x - \mathcal{J}_y(\omega))\right]\cdot\left[\omega^2 S + \frac{\mathcal{M}}{4\mathcal{J}_x}(\mathcal{J}_x - \mathcal{J}_z(\omega))\right] = $$

$$= \omega^2\left(\frac{1}{4}\mathcal{J}_y(\omega) - \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{J}_x}S\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\mathcal{J}_z(\omega) - \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{J}_x}S\right), \qquad (5.3)$$

где

$$\mathcal{J}_a(\omega) = 4\sum_{ik}\left[\frac{(j^a_{ik})^2 E_{ik}}{E^2_{ik} - \omega^2} + \frac{(\tilde{j}^a_{ik})^2 \tilde{E}_{ik}}{\tilde{E}^2_{ik} - \omega^2}\right] \quad (a = y, z), \qquad (5.4)$$

$$S = \sum_{ik}\left[\frac{j^z_{ik}\, j^y_{ik}}{E^2_{ik} - \omega^2} + \frac{\tilde{j}^z_{ik}\, \tilde{j}^y_{ik}}{\tilde{E}^2_{ik} - \omega^2}\right]. \qquad (5.5)$$

Заметим, что при $\mathcal{M} \to 0$ $\mathcal{J}_a(\omega) \to \mathcal{J}_a(\mathrm{crank})$, $S \to 0$.
При определенных условиях одно из решений (5.3) приближенно описывается формулой

$$\omega^2_H = \frac{\mathcal{M}^2}{\mathcal{J}^2_x}\,\frac{(\mathcal{J}_x - \mathcal{J}_y)(\mathcal{J}_x - \mathcal{J}_z)}{\mathcal{J}_y \mathcal{J}_z} \qquad (5.6)$$

$(\mathcal{J}_a = \mathcal{J}_a(\omega = 0))$. Формула (6) справедлива, если
$|\mathcal{J}_a(\omega_H) - \mathcal{J}_a| \ll \mathcal{J}_a$ и $4\mathcal{M}S(\omega_H) \ll |\mathcal{J}_x - \mathcal{J}_a|$ $(a = y, z)$.
Первое из этих условий выполняется, когда вклад отдельных двухквазичастичных состояний в суммы (4) при $\omega = \omega_H$ примерно равен их вкладу при $\omega = 0$. Следовательно, (6) определяет ветвь коллективных колебаний, адиабатически медленных в масштабе времен, связанных с квазичастичным возбуждением. Следующие неравенства означают, что соотношение (6) неприменимо, если ядра остаются аксиальными (например, при $\mathcal{J}_x = \mathcal{J}_y$). Заметим, что нарушение перечисленных условий делает плохим приближением формулу (6), в то время как уравнение (3) остается применимым.

Записав (3) в виде

$$\mathcal{F}_R(\omega^2, S, \mathcal{J}_a(\omega)) = 0,$$

где выделена плавная зависимость от ω, и учитывая полюсной характер функций $S(\omega)$, $\mathcal{J}_a(\omega)$, приходим к выводу, что (3) имеет также решения в каждом из интервалов $E_{ik} \le \omega \le E_{i+1,k+1}$; $\tilde{E}_{ik} \le \omega \le \tilde{E}_{i+1,k+1}$, разделяющих энергии двухквазичастичных возбуждений.

§6. Заключение

Остановимся на обсуждении физического смысла коллективной ветви гамильтониана H_R. Используя формулы из работ /5,6/, можно показать, что при $I \gg 1$ число квантов коллективного возбуждения H_R не меняется в переходах $E2$, если $I \to I$, $I \to I \pm 2$ и меняется на ± 1, если $I \to I \pm 1$. Формула (6) для частоты колебаний ω_H и такие правила отбора для E2-переходов при $I \gg 1$ совпадают с аналогичными соотношениями квантовой механики для состояний жесткого трехосного ротатора вблизи ираст-полосы.

Таким образом, обсужденная выше модель позволяет дать микроскопическое описание подобным состояниям ядер, не использующее предположений о его адиабатическом характере. Попытка описания нутационных колебаний вращающихся ядер в микромодели была предпринята в работе /8/, в которой было найдено практическое решение некоторых важных формальных вопросов. Однако с физической точки зрения модель /8/ представляется неудовлетворительной. В частности, предельный случай трехосного ротатора не может быть получен на основании формул /8/, а наличие коллективной ветви H_R не связано с возникновением неаксиальной деформации. Отметим также, что в /8/ не учтены квадрупольные силы, без которых микроскопический гамильтониан модели теряет сферическую симметрию, а ее строгий учет является весьма важным для правильного описания нутационного движения.

Литература

1. Hill D.L., Wheeler J.A., Phys.Rev., 89, 1002 (1953).
   Peierls R.E., Yoccoz J., Proc.Phys.Soc., (L) A70, 381 (1957).
2. Kerman A., Klein A., Phys.Rev., 132, 1326 (1963); 138B, 1323 (1965);
   Klein A., Selenza L., Kerman A., Phys.Rev., 140B, 245 (1965).
3. Беляев С.Т., Зелевинский В.Г. ЯФ I6, II95 (I972).
4. Караджов Д., Михайлов И.Н., Наджаков Е. ЭЧАЯ т.4, в.2, стр.3II (I973)
5. Mayer J., Nucl.Phys., A137, 193 (1969).
6. Marshalek E.R., Phys.Rev., 158, 993 (1967);
   Phys.Rev.Lett., 20, 214 (1968).
7. Бор О., Моттельсон Б. Теория атомного ядра. т.2.
8. Marshalek E.R., Nucl.Phys., A266, 317 (1976).
9. Kamlah A., Zf.Phys., 216, 52 (1968).
10. Beck R., Mang H.J., Ring P., Zf.Physik 231, 10, 26 (1970).
11. Janssen D., Mikhailov I.N., Selected Topics in Nuclear Structure v. 1, 33, Proceedings of Dubna Conference, 1976.
12. Goodman A.L., Nucl.Phys., A256, 113 (1976).
13. Соловьев В.Г. "Теория сложных ядер", "Наука", I974.
14. Кулиев А.А., Пятов Н.И. ЯФ 20, 297 (I974).
15. Мигдал А.Б. ЖЭТФ 37, 249 (I959).
16. Михайлов И.Н. Сообщения ОИЯИ Р4-7862, Дубна (I974).

Рукопись поступила в издательский отдел
27 декабря I976 года.