СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р4 - 10224

И.Н.Михайлов, Р.Х.Сафаров, Р.Г.Назмитдинов ,
Л.Ш.Ходжаев

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ МАТРИЦЫ ПЛОТНОСТИ 2-го И 3-го ПОРЯДКОВ ПРИБЛИЖЕНИЯ В МИКРОСКОПИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ ЯДРА

1976

P4 - 10224

И.Н.Михайлов, Р.Х.Сафаров,[1] Р.Г.Назмитдинов[2],
Л.Ш.Ходжаев[2]

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ МАТРИЦЫ ПЛОТНОСТИ 2-го И 3-го ПОРЯДКОВ ПРИБЛИЖЕНИЯ В МИКРОСКОПИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ ЯДРА

[1] Самаркандский государственный университет.
[2] Институт ядерной физики, Ташкент.

Михайлов И.Н. и др. P4 - 10224

Аналитические выражения для матрицы плотности 2-го и 3-го порядков приближения в микроскопической теории вращательных состояний ядра

При использовании метода последовательных приближений найдены аналитические решения уравнений микроскопической теории вращательных состояний ядра вплоть до 3-го порядка. Решения выражаются через производные основных характеристик ядра: параметра щели, химического потенциала, квадрупольного момента и момента инерции ядра. Более корректно, чем в модели принудительного вращения, учитывается влияние вращения на внутреннее движение ядра в нулевом приближении.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна 1976

Mikhailov I.N. et al. P4 - 10224

Analytical Expressions for the Density Matrix of the 2nd and 3rd Orders of Approximation in the Microscopic Theory of Nucleus Rotation States

Using the method of successive approximations there were found the analytical solutions of the equations for the microscopic theory of nucleus rotation states up to the 3rd order. The solutions are expressed via the derivatives of the main characteristics of a nucleus: the gap parameters, chemical potential, quadrupole moment, and the nucleus inertia moment. The effect of the rotation on the internal motion of a nucleus in the zero approximation is taken into account more correctly as compared with that in the cranking model.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research

Dubna 1976

§I. Уравнения микроскопической теории вращательных состояний

В микроскопической теории Михайлова-Наджакова информация о собственных состояниях основной ротационной полосы деформированного ядра $|IM\rangle$ извлекается из сведений о волновых пакетах вида

$$| \rangle = \sum_{IM} g_{IM} \, |IM\rangle .$$

Волновой пакет $|0\rangle$, который является вакуумом по отношению к квазичастицам Боголюбова, описывает состояние невращающегося ядра с нулевым угловым моментом $\langle 0 | \hat{I}_x | 0 \rangle = 0$. Можно определить как вращающиеся состояния волновые пакеты, связанные с $|0\rangle$ соотношением

$$|M\rangle = e^{iM\hat{r}_y} |0\rangle , \qquad (1)$$

где $\hat{r}_y$ - y - компонента оператора ротона, введенного в /1/. Используя кинематические свойства оператора ротона (см. Приложение), находим, что в состоянии $|M\rangle$ среднее значение углового момента равно

$$\langle M | \hat{I}_x | M \rangle = -M . \qquad (2)$$

Очевидно, что энергии уровней вращающегося ядра можно выразить некоторой функцией квадрата углового момента

$$E_I = h(I(I+1)) , \qquad (3)$$

которую будем рассматривать как собственное значение модельного гамильтониана $h(\hat{I}^2)$. Состояния $|M\rangle$ не являются собственными функциями многочастичного H и модельного $h(\hat{I}^2)$ гамильтонианов по отдельности, однако

$$(H-h(\hat{I}^2))|M\rangle = \sum_{IM} g_{IM}\left(E_I - h(I(I+1))\right)|IM\rangle = \mathcal{E}_0|M\rangle, \quad (4)$$

где $\mathcal{E}_0$ – внутренняя энергия ядра. Из (4) следует условие стационарности внутренней энергии ядра:

$$\langle M|[\hat{A}, H-h(\hat{I}^2)]|M\rangle = 0, \quad (5)$$

где $\hat{A}$ – произвольный линейный оператор.

Многочастичный гамильтониан выберем в виде /6/

$$H = H_0 + H_{PP} + H_{QQ}, \quad (6)$$

где $H_0 = \sum_{s\sigma}(\varepsilon_s - \lambda(M))\, a^+_{s\sigma} a_{s\sigma}$ – одночастичная часть гамильтониана, $H_{PP} = -G P^+ P$ описывает спаривательные взаимодействия $(\hat{P}^+ = \sum_s a^+_{s+} a^+_{s-})$, а из квадрупольных взаимодействий

$$H_{QQ} = -\frac{1}{2}\sum_{M} \varkappa_{2M}\, \tilde{Q}^+_{2M} \tilde{Q}_{2M}$$

учтем только когерентную часть

$\tilde{Q}_{2M} = \hat{Q}_{2M} - \langle 0|\hat{Q}_{2M}|0\rangle$, где

$\hat{Q}_{2M} = \sum_{s\sigma} \langle s\sigma|\hat{q}_{2M}|s'\sigma'\rangle\, a^+_{s\sigma} a_{s'\sigma'}$ – оператор квадрупольного момента ядра.

Химический потенциал $\lambda(M)$, зависящий от углового момента вращения, определяется из условия сохранения числа частиц в среднем:

$$\langle M|\hat{N}|M\rangle = N. \quad (7)$$

Волновые пакеты $|M\rangle$ полностью определяются обобщенной матрицей плотности Боголюбова

$$F(M) = \begin{pmatrix} \rho(M) & -\Phi(M) \\ \Phi^*(M) & 1-\rho(M) \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Проекционное свойство обобщенной матрицы плотности, установленное Н.Н.Боголюбовым,

$$F^2(M) = F(M), \quad (9)$$

связывает одночастичную матрицу плотности

$$\rho_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}(M) = \langle M|a^+_{s_2\sigma_2} a_{s_1\sigma_1}|M\rangle \quad (10)$$

и матрицу плотности пары

$$\Phi_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}(M) = \langle M|a_{s_1\sigma_1} a_{s_2\sigma_2}|M\rangle. \quad (11)$$

Уравнения стационарности (5) при дополнительных условиях (2) и (7) дают, в принципе, полное описание всех явлений, связанных с вращением ядра, и представляют систему уравнений для матрицы плотности. Но решение таких нелинейных систем уравнений без введения приближений связано с большими трудностями. Поэтому воспользуемся методом последовательных приближений по вращению /3,4/, т.е. по степеням величины M при решении уравнений (5), заменив их эквивалентной системой уравнений

$$\frac{d^n}{dM^n}\langle M|[\hat{A}, H-h(\hat{I}^2)]|M\rangle = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (12)$$

каждое из которых является линейным по старшим производным матрицы плотности $\rho^{(n)} \equiv \frac{1}{n!}\frac{d^n\rho}{dM^n}$ и нелинейным по младшим. Схему решения уравнений (12) можно разбить на следующие этапы:

1. Считая известным решение уравнения для основного состояния ядра $|M_0 = 0\rangle$ в нулевом порядке по вращению, находим из уравнений (12) последовательно матрицу плотности первого, затем второго и т.д. порядка приближения $\rho^{(n)}(M_0)$.

2. С помощью матрицы плотности и ее производных $\rho^{(n)}(M_0)$ определяем основные характеристики ядра: корреляционную функцию Δ, химический потенциал λ и квадрупольные моменты ядра Q_{2M} в состоянии $|M_1\rangle$, которые определяют матрицу плотности $\rho^{(0)}(M_1)$.

3. Затем этапы I и 2 повторяются последовательно для состояний $|M\rangle$ $(M=M_1, M_2 \cdots)$ вращательной полосы. Данная схема, основанная на методе последовательных приближений, осуществлена в работе /5/ при изучении зависимости от углового момента некоторых физических величин.

§2. Нулевой порядок приближения по вращению

Перейдем в квазичастичный базис состояний с помощью канонического преобразования

$$a^+_{s\sigma} = U_s(M)\alpha^+_{s-\sigma} + \sigma V_s(M)\alpha_{s\sigma} . \qquad (13)$$

Операторы квазичастиц $\alpha^+_{s\sigma}(\alpha_{s\sigma})$ и их амплитуды $U_s(M)$ и $V_s(M)$ определяем для каждого вращательного состояния $|M\rangle$, считая его квазичастичным вакуумом $\alpha_{s\sigma}|M\rangle = 0$.

Рассмотрим матрицы плотности, определенные в квазичастичном базисе состояний,

$$P_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2} = \sigma_2 \langle M|\alpha^+_{s_1\sigma_1}\alpha^+_{s_2\sigma_2}|M\rangle , \qquad (14)$$

$$Q_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2} = \langle M|\alpha^+_{s_1\sigma_1}\alpha_{s_2\sigma_2}|M\rangle , \qquad (15)$$

связь которых с введенными ранее матрицами (10) и (11) легко установить:

$$\begin{aligned}\rho_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2} = {}& U_{s_1}U_{s_2} Q_{s_2-\sigma_2 s_1-\sigma_1} - \sigma_1\sigma_2 V_{s_1}V_{s_2} Q_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2} - \\ & - U_{s_2}V_{s_1} P_{s_2-\sigma_2 s_1-\sigma_1} - U_{s_1}V_{s_2} P^*_{s_1-\sigma_1 s_2-\sigma_2} + V^2_{s_1}\delta_{s_1s_2}\delta_{\sigma_1\sigma_2} ,\end{aligned} \qquad (16)$$

$$\begin{aligned}\Phi_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2} = {}& \sigma_1 U_{s_1}U_{s_2} P^*_{s_2-\sigma_2 s_1\sigma_1} - \sigma_2 U_{s_1}V_{s_2} Q_{s_2\sigma_2 s_1-\sigma_1} + \\ & + \sigma_1 U_{s_2}V_{s_1} Q_{s_1\sigma_1 s_2-\sigma_2} - \sigma_1 V_{s_1}V_{s_2} P_{s_1\sigma_1 s_2-\sigma_2} + \sigma_2 U_{s_1}V_{s_1}\delta_{s_1s_2}\delta_{\sigma_1\sigma_2} .\end{aligned} \qquad (17)$$

Выбирая линейный оператор в виде $\hat{A} = \alpha^+_{s_1\sigma_1}\alpha^+_{s_2-\sigma_2}$, находим, что

$$\begin{aligned}\left[\alpha^+_{s_1\sigma_1}\alpha^+_{s_2-\sigma_2}, H - h(\hat{I}^2)\right] = {}& \sigma_1\left[2(\varepsilon_{s_1}-\lambda(M))U_{s_1}(M)V_{s_1}(M) - (\hat{\Delta}^+U^2_{s_1}(M) - \hat{\Delta}V^2_{s_1}(M))\right]\delta_{s_1s_2}\delta_{\sigma_1\sigma_2} - \\ & - \sigma_2\left[(\varepsilon_{s_1}-\lambda(M))(U^2_{s_1}(M)-V^2_{s_1}(M))\hat{P}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2} + U_{s_1}(M)V_{s_1}(M)(\hat{P}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}\hat{\Delta} + \right. \\ & \left. + \hat{\Delta}^+\hat{P}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2})\right] - \sigma_2\left[(\varepsilon_{s_2}-\lambda(M))(U^2_{s_2}(M)-V^2_{s_2}(M))\hat{P}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2} + U_{s_2}(M)V_{s_2}(M) \times \right. \\ & \left. \times (\hat{P}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}\hat{\Delta} + \hat{\Delta}^+\hat{P}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2})\right] - \sum_{\mu=0,2}\frac{\varkappa_{2\mu}}{2}(\tilde{Q}^+_{2\mu}\tilde{Q}_{2\mu,\alpha} + \tilde{Q}^+_{2\mu,\alpha}\tilde{Q}_{2\mu}) - \\ & - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(\hat{\Omega}_i\hat{I}_{i,\alpha} + \hat{I}_{i,\alpha}\hat{\Omega}_i) - \sigma_1\left[2(\varepsilon_{s_1}-\lambda(M))U_{s_1}(M)V_{s_1}(M)\hat{Q}_{s_2-\sigma_2 s_1-\sigma_1} + \right. \\ & \left. + (V^2_{s_1}(M)\hat{Q}_{s_2-\sigma_2 s_1-\sigma_1}\hat{\Delta} - \hat{\Delta}^+\hat{Q}_{s_2-\sigma_2 s_1-\sigma_1}U^2_{s_1}(M))\right] - \sigma_2\left[2(\varepsilon_{s_2}-\lambda(M)) \times \right. \\ & \left. \times U_{s_2}(M)V_{s_2}(M)\hat{Q}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2} - (U^2_{s_2}(M)\hat{\Delta}^+\hat{Q}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2} - V^2_{s_2}(M)\hat{Q}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}\hat{\Delta})\right] .\end{aligned} \qquad (18)$$

Здесь введены обозначения:

$\hat{\Delta} = G\hat{P}$ – оператор энергетической щели; $\hat{P}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}$, $\hat{Q}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}$ – операторы квазичастичных матриц плотности (14) и (15), $\hat{\Omega}_i = \dfrac{dh(\hat{I}^2)}{d\hat{I}_i}$ – компоненты угловой скорости вращения ядра. Результат (18) справедлив для модельного гамильтониана вида $h(I^2) = I^2/2J$.

$$\begin{aligned}\hat{Q}_{2\mu,\alpha} \equiv \left[\alpha^+_{s_1\sigma_1}\alpha^+_{s_2-\sigma_2}, \hat{Q}_{2\mu}\right] = {}& \sigma_1\langle s_1\sigma_1|\hat{q}_{2\mu}|s_2\sigma_2\rangle U^{(+)}_{s_1s_2} - \\ & - \sum_{s\sigma}\sigma\left[\hat{P}_{s_1\sigma_1 s\sigma}\langle s\sigma|\hat{q}_{2\mu}|s_2\sigma_2\rangle V^{(-)}_{ss_2} + \sigma_1\sigma_2\langle s_1\sigma_1|\hat{q}_{2\mu}|s\sigma\rangle V^{(-)}_{s_1s}\hat{P}_{s\sigma s_2\sigma_2}\right] - \\ & - \sum_{s\sigma}\sigma\left[\hat{Q}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}\langle s\sigma|\hat{q}_{2\mu}|s_2\sigma_2\rangle U^{(+)}_{ss_2} + \sigma_1\sigma_2\langle s_1\sigma_1|\hat{q}_{2\mu}|s\sigma\rangle U^{(+)}_{s_1s}\hat{Q}_{s\sigma s_2\sigma_2}\right]\end{aligned} \qquad (19)$$

$$\begin{aligned}\hat{I}_{x,\alpha} \equiv \left[\alpha^+_{s_1\sigma_1}\alpha^+_{s_2-\sigma_2}, \hat{I}_x\right] = {}& -\sigma_1\langle s_1\sigma_1|\hat{j}_x|s_2\sigma_2\rangle U^{(-)}_{s_1s_2} - \\ & - \sum_{s\sigma}\sigma\left[\hat{P}_{s_1\sigma_1 s\sigma}\langle s\sigma|\hat{j}_x|s_2\sigma_2\rangle V^{(+)}_{ss_2} - \sigma_1\sigma_2\langle s_1\sigma_1|\hat{j}_x|s\sigma\rangle V^{(+)}_{s_1s}\hat{P}_{s\sigma s_2\sigma_2}\right] + \\ & + \sum_{s\sigma}\sigma\left[\hat{Q}_{s_1\sigma_1 s\sigma}\langle s\sigma|\hat{j}_x|s_2\sigma_2\rangle U^{(-)}_{ss_2} + \sigma_1\sigma_2\langle s_1\sigma_1|\hat{j}_x|s\sigma\rangle \times \right. \\ & \left. \times U^{(-)}_{s_1s}\hat{Q}_{s\sigma s_2\sigma_2}\right] ,\end{aligned} \qquad (20)$$

$$U^{(\pm)}_{s_1 s_2} = U_{s_1}(M) V_{s_2}(M) \pm U_{s_2}(M) V_{s_1}(M) ,$$
$$V^{(\pm)}_{s_1 s_2} = U_{s_1}(M) U_{s_2}(M) \pm V_{s_1}(M) V_{s_2}(M) . \tag{21}$$

Усредняя (I8) по состоянию $|M_0=0\rangle$, получим уравнение нулевого порядка по вращению, которое совпадает с основным уравнением теории парных корреляций /6/

$$\left(\tilde{\mathcal{E}}_{s_1} - \lambda(M_0)\right) U^{(+)}_{s_1 s_1} - V^{(-)}_{s_1 s_1} \tilde{\Delta}_{s_1} = 0 \tag{22}$$

с перенормированными из-за вращения одночастичными энергиями

$$\tilde{\mathcal{E}}_{s_1} = \mathcal{E}_{s_1} - \frac{1}{\mathcal{J}} \sum_{s} |\langle s\sigma | \hat{j}_x | s_1\sigma_1 \rangle|^2 V^{(-)}_{ss} . \tag{23}$$

Решение уравнения (22) приводит также к перенормировке корреляционной функции

$$\tilde{\Delta}_{s_1} = \Delta - \frac{1}{\mathcal{J}} \sum_{s} |\langle s\sigma | \hat{j}_x | s_1\sigma_1 \rangle|^2 U^{(+)}_{ss} . \tag{24}$$

Аналогичные выражения (23) и (24) получены в работе /7/, где выяснено, что более существенным является перенормирование параметра щели, которое приводит к улучшению согласия с экспериментом теоретического значения момента инерции. Матрицы плотности нулевого порядка равны

$$\rho^{(0)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}(M_0) = V^2_{s_1}(M_0)\, \delta_{s_1 s_2} \delta_{\sigma_1 \sigma_2} ,$$
$$\Phi^{(0)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}(M_0) = \sigma_2 U_{s_1}(M_0) V_{s_1}(M_0)\, \delta_{s_1 s_2} \delta_{\sigma_1, -\sigma_2} . \tag{25}$$

С помощью матриц плотности (25) определим основные характеристики ядра в состоянии $|M_0\rangle$ в нулевом приближении по вращению:

а) корреляционную функцию в состоянии

$$\Delta(M_0) = G\, Sp\, \Phi^{(0)}(M_0) = \sum_{s} U_s(M_0) V_s(M_0) , \tag{26}$$

б) квадрупольные моменты

$$Q_{2\mu}(M_0) = Sp\, q_{2\mu} \rho^{(0)}(M_0) = 2 \sum_{s} q^{2\mu}_{ss} V^2_s(M_0) . \tag{27}$$

Условие сохранения числа частиц

$N = Sp\, \rho^{(0)}(M_0) = 2 \sum_{s} V^2_s(M_0)$ определяет химический потенциал $\lambda(M_0)$.

Среднее значение углового момента в состоянии $|M_0\rangle$ в нулевом приближении равно **нулю**:

$$\langle M_0 | \hat{I}_x | M_0 \rangle = Sp\, j^x \rho^{(0)}(M_0) = 0 .$$

§3. Первый порядок приближения по вращению

Уравнение микроскопической теории (I2) в первом порядке для состояния $|M=0\rangle$ имеет вид

$$\sigma_2 \left(E_{s_1} + E_{s_2} \right) P^{(1)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2} + \sigma_1 \Omega^{(1)} \langle s_1\sigma_1 | \hat{j}_x | s_2\sigma_2 \rangle U^{(-)}_{s_1 s_2} = 0 , \tag{28}$$

где
$$\Omega^{(1)} \equiv \frac{d\langle \Omega \rangle}{dM} = \frac{1}{\mathcal{J}} . \tag{29}$$

Используя свойства симметрии матриц плотности относительно обращения времени (см. Приложение I), находим из (I6)

$$P^{(1)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2} = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{U^{(-)}_{s_1 s_2}} \rho^{(1)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2} , \tag{30}$$

так как $Q_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2} = 0$. Подставляя (28) в уравнение (26), получим выражение для матрицы плотности первого порядка:

$$\rho^{(1)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2} = - \Omega^{(1)} \frac{\langle s_1\sigma_1 | \hat{j}_x | s_2\sigma_2 \rangle}{E_{s_1} + E_{s_2}} U^{(-)\,2}_{s_1 s_2} . \tag{31}$$

Для определения $\Phi^{(1)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}$ воспользуемся проекционным свойством обобщенной матрицы плотности (9), которое в первом порядке имеет вид

$F^{(0)} F^{(1)} F^{(0)} = 0$, откуда следует

$$\Phi^{(1)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2} = -\sigma_2 \rho^{(1)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2} \frac{V^{(+)}_{s_1 s_2}}{U^{(-)}_{s_1 s_2}} . \tag{32}$$

Используя (29), находим

$$\Phi_{s_1\sigma_1 s_2 -\sigma_2} = \sigma_2 \Omega^{(1)} \frac{<s_1\sigma_1 | \hat{j}_x | s_2\sigma_2> U^{(-)}_{s_1 s_2} V^{(+)}_{s_1 s_2}}{E_{s_1} + E_{s_2}} . \tag{33}$$

В соответствии с правилами симметрии изменение химического потенциала в первом порядке равно нулю: $\lambda^{(1)} = 0$. Также равны нулю производные

$$\Delta^{(1)} = G\, Sp\, \Phi^{(1)} = 0 , \tag{34}$$

$$Q^{(1)}_{2\mu} = Sp\, q_{2\mu} \rho^{(1)} = 0 . \tag{35}$$

Определение вращающегося состояния, согласно которому $<M | \hat{I}_x | M> = -M$, приводит в первом порядке к соотношению

$$Sp\, j^x \rho^{(1)} = -1 , \tag{36}$$

подставляя в которое (29), находим выражение для момента инерции ядра

$$\mathcal{J} = \sum_{\substack{s_1\sigma_1 \\ s_2\sigma_2}} \frac{|<s_1\sigma_1 | \hat{j}_x | s_2\sigma_2>|^2}{E_{s_1} + E_{s_2}} U^{(-)2}_{s_1 s_2} . \tag{37}$$

§4. Второй порядок приближения по вращению

Уравнение второго порядка для состояния $|M=0>$ имеет вид

$$\begin{aligned} &-\sigma_2 (E_{s_1} + E_{s_2}) P^{(2)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2} - \sigma_1 (\Delta^{(2)} V^{(-)}_{s_1 s_1} + \lambda^{(2)} U^{(+)}_{s_1 s_1}) \delta_{s_1 s_2} \delta_{\sigma_1\sigma_2} - \\ &- \sigma_1 \sum_{\mu} \varkappa_{2\mu} Q^{(2)}_{2\mu} <s_1\sigma_1 | \hat{q}_{2\mu} | s_2\sigma_2> U^{(+)}_{s_1 s_2} - \\ &- \Omega^{(1)} \sum_{s\sigma} \sigma [P^{(1)}_{s_1\sigma_1 s\sigma} <s\sigma | \hat{j}_x | s_2\sigma_2> V^{(+)}_{s s_2} - \sigma_1\sigma_2 <s_1\sigma_1 | \hat{j}_x | s\sigma> \times \\ &\times V^{(+)}_{s_1 s} P^{(1)}_{s\sigma s_2\sigma_2}] = 0 . \end{aligned} \tag{38}$$

Для того, чтобы перейти к уравнению для матрицы плотности $\rho_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}$ и ее производных, воспользуемся соотношениями

$$P^{(2)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2} = \frac{1}{U^{(+)}_{s_1 s_2}} (Q^{(2)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2} V^{(-)}_{s_1 s_2} - \sigma_1\sigma_2 \rho^{(2)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}) , \tag{39}$$

$$\Phi^{(2)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2} = \sigma_1 (P^{(2)}_{s_1\sigma_1 s_2 -\sigma_2} V^{(-)}_{s_1 s_2} + Q^{(2)}_{s_1\sigma_1 s_2 -\sigma_2} U^{(+)}_{s_1 s_2}) , \tag{40}$$

которые следуют из (16) и (17) соответственно, и соотношением

$$\rho^{(2)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2} V^{(-)}_{s_1 s_2} + \sigma_2 \Phi^{(2)}_{s_1\sigma_1 s_2 -\sigma_2} U^{(+)}_{s_1 s_2} = -\sum_{s\sigma} \frac{\rho^{(1)}_{s_1\sigma_1 s\sigma} \rho^{(1)}_{s\sigma s_2\sigma_2}}{U^{(-)}_{s_1 s} U^{(-)}_{s s_2}} , \tag{41}$$

которое получаем исходя из проекционного свойства обобщенной матрицы плотности во втором порядке по вращению:

$$F^{(0)} F^{(2)} F^{(0)} + F^{(0)} F^{(1)} F^{(1)} F^{(0)} = 0 . \tag{42}$$

Исключая матрицы Q и Φ , из соотношений (39), (40) и (41) находим:

$$P^{(2)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2} = - \frac{\sigma_1\sigma_2 \rho^{(2)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}}{U^{(+)}_{s_1 s_2}} - \frac{\sigma_1\sigma_2 V^{(-)}_{s_1 s_2}}{U^{(+)}_{s_1 s_2}} \sum_{s\sigma} \frac{\rho^{(1)}_{s_1\sigma_1 s\sigma} \rho^{(1)}_{s\sigma s_2\sigma_2}}{U^{(-)}_{s_1 s} U^{(-)}_{s s_2}} . \tag{43}$$

Подставив (43) в (38), получим уравнение для матрицы плотности $\rho^{(2)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}$:

$$\begin{aligned} &\rho^{(2)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2} \frac{(E_{s_1} + E_{s_2})}{U^{(+)}_{s_1 s_2}} + \frac{V^{(-)}_{s_1 s_2}}{U^{(+)}_{s_1 s_2}} \sum_{s\sigma} \frac{\rho^{(1)}_{s_1\sigma_1 s\sigma} \rho^{(1)}_{s\sigma s_2\sigma_2}}{U^{(-)}_{s_1 s} U^{(-)}_{s s_2}} - (\lambda^{(2)} U^{(+)}_{s_1 s_2} + \\ &+ \Delta^{(2)} V^{(-)}_{s_1 s_1}) \delta_{s_1 s_2} \delta_{\sigma_1\sigma_2} - \sum_{\mu} \varkappa_{2\mu} Q^{(2)}_{2\mu} <s_1\sigma_1 | \hat{q}^{2\mu} | s_2\sigma_2> U^{(+)}_{s_1 s_2} - \\ &- \Omega^{(1)} \sum_{s\sigma} (\frac{\rho^{(1)}_{s_1\sigma_1 s\sigma}}{U^{(-)}_{s_1 s}} <s\sigma | \hat{j}_x | s_2\sigma_2> V^{(+)}_{s s_2} - <s_1\sigma_1 | \hat{j}_x | s\sigma> V^{(+)}_{s_1 s} \frac{\rho^{(1)}_{s\sigma s_2\sigma_2}}{U^{(-)}_{s s_2}}) = 0 . \end{aligned} \tag{44}$$

Используя (29), определим матрицу плотности второго порядка:

$$\rho^{(2)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2} = \rho^{(2)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}(j) + \rho^{(2)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}(\Delta) + \rho^{(2)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}(\lambda) + \rho^{(2)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}(Q_{2\mu}) . \tag{45}$$

$$\rho^{(2)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}(j) = -(\Omega^{(1)})^2 \sum_{s\sigma} <s_1\sigma_1 | \hat{j}_x | s\sigma> <s\sigma | \hat{j}_x | s_2\sigma_2> \times \tag{46}$$

$$\times\left[\frac{U^{(-)}_{s_1 s}U^{(-)}_{s s_2}V^{(-)}_{s_1 s_2}}{(E_{s_1}+E_{s_2})(E_s+E_{s_2})}+\frac{U^{(-)}_{s_1 s}V^{(+)}_{s s_2}U^{(+)}_{s_1 s_2}}{(E_{s_1}+E_{s_2})(E_{s_1}+E_s)}-\frac{V^{(+)}_{s_1 s}U^{(-)}_{s s_2}U^{(+)}_{s_1 s_2}}{(E_{s_1}+E_{s_2})(E_s+E_{s_2})}\right],$$ IO.

$$\rho^{(2)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}(\Delta)=\frac{U^{(+)}_{s_1 s_1}V^{(-)}_{s_1 s_1}}{2E_{s_1}}\,\Delta^{(2)}\delta_{s_1 s_2}\delta_{\sigma_1\sigma_2}, \qquad (47)$$

$$\rho^{(2)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}(\lambda)=\frac{U^{(+)2}_{s_1 s_1}}{2E_{s_1}}\,\lambda^{(2)}\delta_{s_1 s_2}\delta_{\sigma_1\sigma_2}, \qquad (48)$$

$$\rho^{(2)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}(Q_{2\mu})=\sum_{\mu}\varkappa_{2\mu}Q^{(2)}_{2\mu}\frac{\langle s_1\sigma_1|\hat{q}^{2\mu}|s_2\sigma_2\rangle U^{(+)2}_{s_1 s_2}}{E_{s_1}+E_{s_2}}. \qquad (49)$$

В выражения (47), (48) и (49) входят вторые производные корреляционной функции $\Delta^{(2)}$, химического потенциала $\lambda^{(2)}$ и квадрупольных моментов $Q^{(2)}_{2\mu}$, которые определяются из соотношений

$$\Delta^{(2)}=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dM^2}G\,Sp\,\Phi=G\,Sp\,\Phi^{(2)}, \qquad (50)$$

$$Q^{(2)}_{2\mu}=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dM^2}Sp\,q_{2\mu}\rho=Sp\,q_{2\mu}\rho^{(2)}, \qquad (51)$$

а $\lambda^{(2)}$ – из соотношения $Sp\,\rho^{(2)}=0$ (52), которое следует из условия сохранения числа в среднем.

Используя явные выражения для матриц плотности и их производных, получим из соотношений (50), (51) и (52) связанную систему алгебраических уравнений для величин $\Delta^{(2)}$, $\lambda^{(2)}$ и $Q^{(2)}_{2\mu}$. Решая эту систему уравнений совместно, получим выражения для второй производной корреляционной функции по угловому моменту:

$$\Delta^{(2)}=\frac{\Omega^{(1)2}}{4}\frac{\partial\mathcal{J}}{\partial\Delta}\frac{b}{a^2+b^2}-\frac{\Omega^{(1)2}}{4}\frac{\partial\mathcal{J}}{\partial\lambda}\frac{a}{a^2+b^2}+\varkappa_{20}Q^{(2)}_{20}\frac{sb-\sigma a}{a^2+b^2}, \qquad (53)$$

для второй производной химического потенциала:

$$\lambda^{(2)}=-\frac{\Omega^{(1)2}}{4}\frac{\partial\mathcal{J}}{\partial\Delta}\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{\Omega^{(1)2}}{4}\frac{\partial\mathcal{J}}{\partial\lambda}\frac{b}{a^2+b^2}-\varkappa_{20}Q^{(2)}_{20}\frac{sa+\sigma b}{a^2+b^2} \qquad (54)$$

и второй производной квадрупольных моментов:

$$Q^{(2)}_{2\mu}=\frac{\Omega^{(1)2}}{2C_{2\mu}\varkappa_{2\mu}}\cdot\frac{\partial\mathcal{J}}{\partial Q_{2\mu}}+\delta_{\mu,0}\left(\frac{\Omega^{(1)2}}{C_{20}}\frac{\partial\mathcal{J}}{\partial\Delta}\frac{sb-\sigma a}{a^2+b^2}-\frac{\Omega^{(1)2}}{C_{20}}\frac{\partial\mathcal{J}}{\partial\lambda}\frac{sa+\sigma b}{a^2+b^2}\right). \qquad (55)$$

Здесь использованы обозначения, введенные в /8/:

$$a=\sum_s\frac{U^{(+)}_{ss}V^{(-)}_{ss}}{2E_s},$$

$$b=\sum_s\frac{U^{(+)2}_{ss}}{2E_s},$$

$$s=\sum_s\frac{U^{(+)}_{ss}V^{(-)}_{ss}}{2E_s}q^{20}_{ss}, \qquad (56)$$

$$\sigma=\sum_s\frac{U^{(+)2}_{ss}}{2E_s}q^{20}_{ss},$$

$$\Sigma_{2\mu}=2\sum_{s_1 s_2}\frac{U^{(+)2}_{s_1 s_2}}{E_{s_1}+E_{s_2}}|q^{2\mu}_{s_1 s_2}|^2,$$

$$C_{2\mu}=1-\varkappa_{2\mu}\Sigma_{2\mu}-\delta_{\mu,0}\cdot 2\varkappa_{20}\left(s\,\frac{sb-\sigma a}{a^2+b^2}-\sigma\,\frac{sa+\sigma b}{a^2+b^2}\right)-$$

– безразмерный параметр жесткости в адиабатическом приближении.

Производные момента инерции равны

$$\frac{\partial\mathcal{J}}{\partial\Delta}=-4\sum_{s_1 s_2}\frac{|j^x_{s_1 s_2}|^2}{E_{s_1}+E_{s_2}}\left(\frac{U^{(-)2}_{s_1 s_2}U^{(+)}_{s_1 s_2}}{E_{s_1}+E_{s_2}}+\frac{V^{(-)}_{s_1 s_1}V^{(+)}_{s_1 s_2}U^{(-)}_{s_1 s_2}}{E_{s_1}}\right),$$

$$\frac{\partial\mathcal{J}}{\partial\lambda}=4\sum_{s_1 s_2}\frac{|j^x_{s_1 s_2}|^2}{E_{s_1}+E_{s_2}}\left(\frac{U^{(-)2}_{s_1 s_2}V^{(-)}_{s_1 s_1}}{E_{s_1}+E_{s_2}}-\frac{U^{(-)}_{s_1 s_2}V^{(+)}_{s_1 s_2}U^{(+)}_{s_1 s_1}}{E_{s_1}}\right),$$

$$\frac{\partial\mathcal{J}}{\partial Q_{2\mu}}=-2\varkappa_{2\mu}\sum_{\substack{s_1\sigma_1\\ s_2\sigma_2\\ s\sigma}}\langle s_1\sigma_1|\hat{q}^{2\mu}|s_2\sigma_2\rangle\langle s_1\sigma_1|\hat{j}_x|s\sigma\rangle\langle s\sigma|\hat{j}_x|s_2\sigma_2\rangle\times$$

$$\times\frac{U^{(-)}_{s_1 s}}{E_{s_1}+E_s}\left(\frac{U^{(-)}_{s s_2}V^{(-)}_{s_1 s_2}}{E_s+E_{s_2}}+2\,\frac{V^{(+)}_{s s_2}U^{(+)}_{s_1 s_2}}{E_{s_1}+E_{s_2}}\right).$$

§5. Третий порядок приближения по вращению

Уравнение 3-его порядка для состояния $|M=0>$ имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&-\sigma_2 (E_{s_1}+E_{s_2}) P^{(3)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2} - \\
&-\Omega^{(1)}\sum_{s\sigma}\sigma\Big[P^{(2)}_{s_1\sigma_1 s\sigma}<s\sigma|\hat{j}_x|s_2\sigma_2>V^{(+)}_{ss_2}-\sigma_1\sigma_2<s_1\sigma_1|\hat{j}_x|s\sigma>\times \\
&\times V^{(+)}_{s_1 s}P^{(2)}_{s\sigma s_2\sigma_2}\Big]+\Omega^{(1)}\sum_{s\sigma}\sigma\Big[Q^{(2)}_{s_1\sigma_1 s\sigma}<s\sigma|\hat{j}_x|s_2\sigma_2>U^{(-)}_{ss_2}+ \\
&+\sigma_1\sigma_2<s_1\sigma_1|\hat{j}_x|s\sigma>U^{(-)}_{s_1 s}Q^{(2)}_{s\sigma s_2\sigma_2}\Big]+\sum_{M}\varkappa_{2M}Q^{(2)}_{2M}\times \\
&\times\sum_{s\sigma}\sigma\Big[P^{(1)}_{s_1\sigma_1 s\sigma}<s\sigma|\hat{q}^{2M}|s_2\sigma_2>V^{(-)}_{ss_2}+\sigma_1\sigma_2<s_1\sigma_1|\hat{q}^{2M}|s\sigma>\times \qquad (57)\\
&\times V^{(-)}_{s_1 s}P^{(1)}_{s\sigma s_2\sigma_2}\Big]-\sigma_2\Delta^{(2)}\big(U^{(+)}_{s_1 s_1}+U^{(+)}_{s_2 s_2}\big)P^{(1)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}+ \\
&+\sigma_2\lambda^{(2)}\big(V^{(-)}_{s_1 s_1}+V^{(-)}_{s_2 s_2}\big)P^{(1)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}-\sigma_1\Omega^{(3)}<s_1\sigma_1|\hat{j}_x|s_2\sigma_2>U^{(-)}_{s_1 s_2}=0.
\end{aligned}
$$

Используя соотношения

$$
\sigma_1\sigma_2\,\rho^{(3)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}=-Q^{(3)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}V^{(+)}_{s_1 s_2}+P^{(3)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}U^{(-)}_{s_1 s_2},
$$

$$
-\sigma_1\,\Phi^{(3)}_{s_1\sigma_1 s_2-\sigma_2}=P^{(3)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}V^{(+)}_{s_1 s_2}+Q^{(3)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}U^{(-)}_{s_1 s_2},
$$

$$
\begin{aligned}
\Phi^{(3)}_{s_1\sigma_1 s_2-\sigma_2}=&-\frac{\sigma_2 V^{(+)}_{s_1 s_2}}{U^{(-)}_{s_1 s_2}}\rho^{(3)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}- \\
&-\frac{\sigma_2}{U^{(-)}_{s_1 s_2}}\sum_{s\sigma}\left(\frac{\rho^{(2)}_{s_1\sigma_1 s\sigma}\rho^{(1)}_{s\sigma s_2\sigma_2}}{U^{(+)}_{s_1 s}U^{(-)}_{ss_2}}-\frac{\rho^{(1)}_{s_1\sigma_1 s\sigma}\rho^{(2)}_{s\sigma s_2\sigma_2}}{U^{(-)}_{s_1 s}U^{(+)}_{ss_2}}\right)- \\
&-\frac{\sigma_2}{U^{(-)}_{s_1 s_2}}\sum_{\substack{s\sigma\\ s'\sigma'}}\frac{\rho^{(1)}_{s_1\sigma_1 s\sigma}\rho^{(1)}_{s\sigma s'\sigma'}\rho^{(1)}_{s'\sigma' s_2\sigma_2}}{U^{(-)}_{s_1 s}U^{(-)}_{ss'}U^{(-)}_{s's_2}}\left(\frac{V^{(-)}_{s_1 s'}}{U^{(+)}_{s_1 s'}}-\frac{V^{(-)}_{ss_2}}{U^{(+)}_{ss_2}}\right),
\end{aligned}
$$

которые следуют из (16), (17) и проекционного свойства обобщенной матрицы плотности в третьем порядке, получим уравнение для матрицы плотности $\rho^{(3)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}$:

$$
\begin{aligned}
&\rho^{(3)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}+\Omega^{(3)}\frac{<s_1\sigma_1|\hat{j}_x|s_2\sigma_2>U^{(-)2}_{s_1 s_2}}{E_{s_1}+E_{s_2}}+ \\
&+V^{(+)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}\sum_{s_3\sigma_3}\left(\frac{\rho^{(2)}_{s_1\sigma_1 s_3\sigma_3}\rho^{(1)}_{s_3\sigma_3 s_1\sigma_1}}{U^{(+)}_{s_1 s_3}U^{(-)}_{s_3 s_2}}-\frac{\rho^{(1)}_{s_1\sigma_1 s_3\sigma_3}\rho^{(2)}_{s_3\sigma_3 s_2\sigma_2}}{U^{(-)}_{s_1 s_3}U^{(+)}_{s_3 s_2}}\right)- \\
&-\Omega^{(1)}\frac{U^{(-)}_{s_1 s_2}}{E_{s_1}+E_{s_2}}\sum_{s_3\sigma_3}\left(\frac{\rho^{(2)}_{s_1\sigma_1 s_3\sigma_3}}{U^{(+)}_{s_1 s_3}}<s_3\sigma_3|\hat{j}_x|s_2\sigma_2>V^{(+)}_{s_3 s_2}-\right. \\
&\left.-<s_1\sigma_1|\hat{j}_x|s_3\sigma_3>V^{(+)}_{s_1 s_3}\frac{\rho^{(2)}_{s_3\sigma_3 s_2\sigma_2}}{U^{(+)}_{s_3 s_2}}\right)+V^{(+)}_{s_1 s_2}\times \\
&\times\sum_{\substack{s_3\sigma_3\\ s_4\sigma_4}}\frac{\rho^{(1)}_{s_1\sigma_1 s_4\sigma_4}\rho^{(1)}_{s_4\sigma_4 s_3\sigma_3}\rho^{(1)}_{s_3\sigma_3 s_2\sigma_2}}{U^{(-)}_{s_1 s_4}U^{(-)}_{s_4 s_3}U^{(-)}_{s_3 s_2}}\left(\frac{V^{(-)}_{s_1 s_3}}{U^{(+)}_{s_1 s_3}}-\frac{V^{(-)}_{s_4 s_2}}{U^{(+)}_{s_4 s_2}}\right)+ \qquad (58)\\
&+\frac{\Omega^{(1)}U^{(-)}_{s_1 s_2}}{E_{s_1}+E_{s_2}}\sum_{\substack{s_3\sigma_3\\ s_4\sigma_4}}\left(\frac{\rho^{(1)}_{s_1\sigma_1 s_4\sigma_4}\rho^{(1)}_{s_4\sigma_4 s_3\sigma_3}<s_3\sigma_3|\hat{j}_x|s_2\sigma_2>U^{(-)}_{s_3 s_2}}{U^{(-)}_{s_1 s_4}U^{(-)}_{s_4 s_3}}+\right. \\
&\left.+\frac{<s_1\sigma_1|\hat{j}_x|s_3\sigma_3>U^{(-)}_{s_1 s_3}\rho^{(1)}_{s_3\sigma_3 s_4\sigma_4}\rho^{(1)}_{s_4\sigma_4 s_2\sigma_2}}{U^{(-)}_{s_3 s_4}U^{(-)}_{s_4 s_2}}\right)-\frac{\Omega^{(1)}U^{(-)}_{s_1 s_2}}{E_{s_1}+E_{s_2}}\sum_{\substack{s_3\sigma_3\\ s_4\sigma_4}}\left(\frac{V^{(-)}_{s_1 s_3}}{U^{(+)}_{s_1 s_3}}\times\right. \\
&\times\frac{\rho^{(1)}_{s_1\sigma_1 s_4\sigma_4}\rho^{(1)}_{s_4\sigma_4 s_3\sigma_3}<s_3\sigma_3|\hat{j}_x|s_2\sigma_2>V^{(+)}_{s_3 s_2}}{U^{(-)}_{s_1 s_4}U^{(-)}_{s_4 s_3}}-\frac{<s_1\sigma_1|\hat{j}_x|s_3\sigma_3>V^{(+)}_{s_1 s_3}\rho^{(1)}_{s_3\sigma_3 s_4\sigma_4}\rho^{(1)}_{s_4\sigma_4 s_2\sigma_2}}{U^{(-)}_{s_3 s_4}U^{(-)}_{s_4 s_2}}\times \\
&\left.\times\frac{V^{(-)}_{s_3 s_2}}{U^{(+)}_{s_3 s_2}}\right)-\sum_{M}\varkappa_{2M}Q^{(2)}_{2M}\frac{U^{(-)}_{s_1 s_2}}{E_{s_1}+E_{s_2}}\sum_{s_3\sigma_3}\left(\frac{\rho^{(1)}_{s_1\sigma_1 s_3\sigma_3}q^{2M}_{s_3\sigma_3 s_2}V^{(-)}_{s_3 s_2}}{U^{(-)}_{s_1 s_3}}+\frac{q^{2M}_{s_1\sigma_1 s_3\sigma_3}V^{(-)}_{s_1 s_3}}{U^{(-)}_{s_3 s_2}}\times\right. \\
&\left.\times\rho^{(1)}_{s_3\sigma_3 s_2\sigma_2}\right)+\frac{\Delta^{(2)}}{E_{s_1}+E_{s_2}}\big(U^{(+)}_{s_1 s_1}+U^{(+)}_{s_2 s_2}\big)\rho^{(1)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}-\frac{\lambda^{(2)}}{E_{s_1}+E_{s_2}}\big(V^{(-)}_{s_1 s_1}+V^{(-)}_{s_2 s_2}\big)\rho^{(1)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}=0.
\end{aligned}
$$

Решение уравнения (58) можно представить в виде

$$\rho^{(3)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2} = \rho^{(3)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}(jjj) + \rho^{(3)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}(j) + \rho^{(3)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}(\Delta^{(2)}) + \rho^{(3)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}(\lambda^{(2)}) + \rho^{(3)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}(Q^{(2)}_{2\mu}), \tag{59}$$

где

$$\rho^{(3)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}(jjj) \equiv \rho^{(3)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}(\Omega^{(1)}) = \Omega^{(1)3} \sum_{\substack{s_3\sigma_3\\ s_4\sigma_4}} \langle s_1\sigma_1|\hat{j}_x|s_2\sigma_2\rangle\langle s_2\sigma_2|\hat{j}_x|s_3\sigma_3\rangle \times \langle s_3\sigma_3|\hat{j}_x|s_4\sigma_4\rangle N_{1234},$$

$$N_{1234} = \left(\frac{U^{(-)}_{s_1s_2}V^{(+)}_{s_2s_3}V^{(+)}_{s_3s_4}U^{(-)}_{s_4s_1}}{(E_{s_1}+E_{s_2})(E_{s_1}+E_{s_3})(E_{s_1}+E_{s_4})}\right) - \left(\frac{U^{(-)}_{s_1s_2}V^{(+)}_{s_2s_3}U^{(-)}_{s_3s_4}V^{(+)}_{s_4s_1}}{(E_{s_1}+E_{s_2})(E_{s_1}+E_{s_3})(E_{s_3}+E_{s_4})}\right) + \left(\frac{U^{(-)}_{s_1s_2}U^{(-)}_{s_2s_3}U^{(-)}_{s_3s_4}U^{(-)}_{s_4s_1}}{(E_{s_1}+E_{s_2})(E_{s_1}+E_{s_4})(E_{s_2}+E_{s_3})}\right) + \text{циклические перестановки } 1,2,3,4,$$

$$\rho^{(3)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}(j) \equiv \rho^{(3)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}(\Omega^{(3)}) = -\Omega^{(3)}\frac{\dot{j}^{x}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}U^{(-)2}_{s_1s_2}}{(E_{s_1}+E_{s_2})},$$

$$\rho^{(3)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}(\Delta^{(2)}) = \Omega^{(1)}\Delta^{(2)}\frac{\dot{j}^{x}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}}{(E_{s_1}+E_{s_2})}\left[\frac{(U^{(+)}_{s_1s_1}+U^{(+)}_{s_2s_2})U^{(-)2}_{s_1s_2}}{(E_{s_1}+E_{s_2})} + U^{(-)}_{s_1s_2}V^{(+)}_{s_1s_2}\left(\frac{V^{(-)}_{s_1s_1}}{E_{s_1}} - \frac{V^{(-)}_{s_2s_2}}{E_{s_2}}\right)\right],$$

$$\rho^{(3)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}(\lambda^{(2)}) = -\Omega^{(1)}\lambda^{(2)}\frac{\dot{j}^{x}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}}{(E_{s_1}+E_{s_2})}\left[\frac{V^{(-)}_{s_1s_1}+V^{(-)}_{s_2s_2}}{(E_{s_1}+E_{s_2})}U^{(-)2}_{s_1s_2} - U^{(-)}_{s_1s_2}V^{(+)}_{s_1s_2}\left(\frac{U^{(+)}_{s_1s_1}}{E_{s_1}} - \frac{U^{(+)}_{s_2s_2}}{E_2}\right)\right],$$

$$\rho^{(3)}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}(Q^{(2)}_{2\mu}) = \Omega^{(1)}\sum_{\mu}\varkappa_{2\mu}Q^{(2)}_{2\mu}\sum_{s_3\sigma_3}\Big\{ q^{2\mu}_{s_1\sigma_1 s_3\sigma_3}\dot{j}^{x}_{s_3\sigma_3 s_2\sigma_2}\Big[\frac{U^{(-)}_{s_1s_2}U^{(+)}_{s_1s_3}V^{(+)}_{s_3s_2}}{(E_{s_1}+E_{s_2})(E_{s_1}+E_{s_3})} + \frac{V^{(+)}_{s_1s_2}U^{(+)}_{s_1s_3}U^{(-)}_{s_3s_2}}{(E_{s_1}+E_{s_3})(E_{s_3}+E_{s_2})} - \frac{U^{(-)}_{s_1s_2}V^{(-)}_{s_1s_3}U^{(-)}_{s_3s_2}}{(E_{s_1}+E_{s_2})(E_{s_3}+E_{s_2})}\Big] - \dot{j}^{x}_{s_1\sigma_1 s_3\sigma_3}q^{2\mu}_{s_3\sigma_3 s_2\sigma_2}\Big[\frac{U^{(-)}_{s_1s_2}V^{(+)}_{s_1s_3}U^{(+)}_{s_3s_2}}{(E_{s_1}+E_{s_2})(E_{s_2}+E_{s_3})} + \frac{V^{(+)}_{s_1s_2}U^{(-)}_{s_1s_3}U^{(+)}_{s_3s_2}}{(E_{s_1}+E_{s_3})(E_{s_3}+E_{s_2})} + \frac{U^{(-)}_{s_1s_2}U^{(-)}_{s_1s_3}V^{(-)}_{s_3s_2}}{(E_{s_1}+E_{s_2})(E_{s_1}+E_{s_3})}\Big]\Big\}.$$

Продолжая эту процедуру далее, можно найти, в принципе, сколь угодно высокое приближение по известным предыдущим.

Заключение

В настоящей работе на основе техники последовательных приближений найдено аналитическое решение уравнений микроскопической теории вращательных состояний в 3-ем порядке по вращению. Более корректно учитывается в нулевом приближении влияние вращения на внутреннее движение ядра, приводящее к перенормировке одночастичных состояний и корреляционной функции. Решения выражаются через производные основных характеристик ядра Δ, λ, $Q_{2\mu}$ и $\mathcal{J}$, что представляет большие удобства для непосредственного изучения явлений, связанных с вращением ядра.

Приложение I

Некоторые кинематические свойства операторов ротона и свойства симметрии производных матриц плотности при обращении времени

Приведем кинематические свойства операторов ротона, используемые в данном сообщении.

Для описания состояний основной ротационной полосы четно-четного ядра в работе /I/ введены тензорные операторы второго ранга $\hat{r}_{2\mu}$, получившие название ротонов, которые имеют следующие свойства симметрии относительно отражения пространственных и временных координат:

$$P\hat{r}_{2\mu}P^{-1} = \hat{r}_{2\mu},$$

$$T\hat{r}_{2\mu}T^{-1} = \hat{r}_{2\mu}.$$

В случае сильнодеформированных ядер с аксиальной симметрией для декартовых компонент оператора ротона можно воспользоваться приближением

$$< \hat{r}_z > \sim 1\,, < \hat{r}_x > \text{ и } < \hat{r}_y > \ll 1\,, \qquad \text{(I-3)}$$
$$< \hat{r}_{2x} > \text{ и } < \hat{r}_{2y} > \sim O(r_x^2, r_y^2)\,.$$

В этом приближении имеем коммутационные соотношения для оператора ротона, как для неприводимого тензорного оператора,

$$[\hat{I}_\alpha, i\hat{r}_\beta] = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{r}_\gamma\,. \qquad \text{(I-4)}$$

Среднее значение произвольного оператора $\hat{F}$ по состоянию $|M\rangle = e^{i(M-M_0)\hat{r}_y}|M_0\rangle$ вращающегося вокруг оси ядра можно представить в виде разложения

$$\langle M|\hat{F}|M\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(M-M_0)^n}{n!}\langle M_0|[[\ldots[\hat{F}, i\hat{r}_y]\ldots, i\hat{r}_y], i\hat{r}_y]|M_0\rangle =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(M-M_0)^n F^{(n)}(M_0) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(M-M_0)^n}{n!}\left(\frac{d^nF}{dM^n}\right)_{M=M_0}. \qquad \text{(I-5)}$$

Используя соотношения (5), (3) и (4), находим, что среднее значение углового момента по вращающемуся состоянию $|M\rangle$ равно

$$\langle M|\hat{I}_x|M\rangle = -M\,. \qquad \text{(I-6)}$$

Решение уравнения микроскопической теории вращательных состояний ищется в виде разложения матрицы плотности по степеням углового момента /3,4/:

$$\langle M|\hat{\rho}|M\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}(M-M_0)^n\rho^{(n)}(M_0), \qquad \text{(I-7)}$$

где $\rho^{(n)}(M_0) = \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n\rho}{dM^n}\right)_{M=M_0} = \frac{1}{n!}\langle M_0|[[\ldots[\hat{\rho}, i\hat{r}_y]\ldots, i\hat{r}_y], i\hat{r}_y]|M_0\rangle\,.$

Установим свойства симметрии для произвольных матрицы плотности при обращении времени. Из определения операции обращения времени следует

$$T a^+_{s\sigma} T^{-1} = \gamma_\sigma a^+_{s-\sigma}, \qquad \text{(I-9)}$$

где $\gamma_\sigma\gamma_{-\sigma} = -1$ и $\gamma_\sigma\gamma_\sigma = 1$. Можно выбрать такое представление одночастичных состояний, что $\gamma_{\sigma_1}\gamma_{\sigma_2} = \sigma_1\sigma_2$. А операторы квазичастиц преобразуются по закону

$$T \alpha^+_{s\sigma} T^{-1} = -\gamma_\sigma \alpha^+_{s-\sigma}\,. \qquad \text{(I-10)}$$

Тогда легко установить свойства симметрии для производных матриц плотности при обращении времени

$$\rho^{(n)}_{s_1-\sigma_1 s_2-\sigma_2} = \sigma_1\sigma_2\,\rho^{(n)*}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}\,; \quad \varphi^{(n)}_{s_1-\sigma_1 s_2-\sigma_2} = \sigma_1\sigma_2\,\varphi^{(n)}_{s_2\sigma_2 s_1\sigma_1}\,.$$
$$q^{(n)}_{s_1-\sigma_1 s_2-\sigma_2} = \sigma_1\sigma_2\,q^{(n)*}_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2}\,; \quad P^{(n)}_{s_1-\sigma_1 s_2-\sigma_2} = \sigma_1\sigma_2\,P^{(n)}_{s_2\sigma_2 s_1\sigma_1}\,.$$

Литература

1. И.Н.Михайлов, Е.Наджаков. Препринт ОИЯИ, Р4-4293, Дубна, 1969.
2. И.Н.Михайлов, Е.Наджаков, Д.Караджов. ЭЧАЯ, т.4, вып.2, 311 (1975).
3. Д.Караджов, И.Н.Михайлов, Й.Пиперова. Ядерная физика, <u>21</u>, 964 (1975).

4. Й.Пиперова. ОИЯИ, Р4-8755, Дубна,1975.

5. Д.Караджов, И.Н.Михайлов, Е.Наджаков, Й.Пиперова. ЯФ,24, 888 (1976).

6. В.Г.Соловьев. Теория сложных ядер. Наука, Москва, 1971.

7. S.Frauendorf, D.Janssen, L.Munchov. Nucl.Phys., A125, 369 (1969).

8. E.R.Marshalek. Phys.Rev., 158,993 (1967).

Рукопись поступила в издательский отдел
16 ноября 1976 года.