СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р4 - 10189

В.Н.Ефимов

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ ТРЕХ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ЧАСТИЦ В МОДЕЛИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

VI. Приближенное одномерное уравнение. Неоднозначность решений уравнений Фаддеева

1976

P4 - 10189

В.Н.Ефимов

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ ТРЕХ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ЧАСТИЦ В МОДЕЛИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

VI. Приближенное одномерное уравнение. Неоднозначность решений уравнений Фаддеева

Ефимов В.Н. P4 - 10189

Интегральное уравнение для волновой функции трех тождественных частиц в модели граничных условий.
VI. Приближенное одномерное уравнение. Неоднозначность решений уравнений Фаддеева

Для связанного состояния с нулевым полным угловым моментом трех тождественных бозонов, взаимодействующих только в относительных s -состояниях, дан метод вывода приближенного одномерного уравнения в модели граничных условий. Метод применим при учёте высших парциальных компонент. Исследованы неоднозначности решений уравнений Фаддеева для произвольных двухчастичных парциальных компонент.

Работа выполнена в Лаборатории нейтронной физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна 1976

Efimov V.N. P4 - 10189

The Integral Equation for the Wave Function of Three Identical Particles in the Boundary Condition Model. VI. An Approximated One-Dimensional Equation. Nonuniques of the Solutions for the Faddeev Equations

For the bound state with the zero total angular momentum of three identical bosons, interacting only in relative s-states, the method is presented to deduce the approximated one-dimensional equation in the boundary condition model. The method is applicable when taking into account the higher partial components. The nonuniques of the solutions of the Faddeev equations for the arbitrary two-particle partial components has been studied.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research
Dubna 1976

§1. Введение

В работах [1,2] было рассмотрено уравнение Фаддеева в координатном представлении для связанного состояния трех тождественных бозонов в предположении, что полный угловой момент системы равен нулю, частицы взаимодействуют только в s-состояниях, и их взаимодействие описывается моделью граничных условий без внешнего потенциала. Было показано, что в этом случае непосредственно двумерное уравнение Фаддеева не имеет однозначного решения, однако оно точным образом сводится к однозначному одномерному уравнению, которое следует рассматривать как модификацию уравнения Фаддеева для сингулярных взаимодействий, описываемых моделью граничных условий.

В работе [2] полученное одномерное уравнение было решено для значений параметров модели граничных условий, соответствующих триплетному s -взаимодействию нейтрона и протона, и для энергии связи трех бозонов было получено E_0 = 7,43 МэВ, что существенно отличается от значения E_0 = 12,69 МэВ, найденного для тех же самых параметров из двумерного уравнения Фаддеева [3]. Данная работа носит методический характер. Во-первых, ввиду большого различия результатов E_0 = 7,43 МэВ [2] и E_0 = 12,69 МэВ [3] рассматривается новый и более эффективный метод решения одномерного уравнения, чем метод, использованный в работе [2]. Во-вторых, предлагается приближенный метод получения однозначного одномерного уравнения, основанный на использовании рядов Фурье. Последнее обстоятельство крайне существенно при рассмотрении реалистических трехнуклонных систем (отличные от нуля полные орбитальные моменты, учёт двухчастичных взаимодействий в высших парциальных компонентах, например, тензорных сил). Проведены численные расчёты, которые подтверждают результат работы /2/.

§2. Точное одномерное уравнение

В работе /1/ показано, что в модели граничных условий при учёте двухчастичных взаимодействий только в s-состояниях из уравнения Фаддеева следует, что функция канала связанной системы трех тождественных бозонов с нулевым полным угловым моментом имеет вид:

$$\psi(r,\rho)=\frac{1}{4\pi r\rho}[\theta(c-r)A(r,\rho)+\theta(r-c)\Phi(r,\rho)], \qquad (1)$$

где $\theta(x)=1,\ x>0;\quad \theta(x)=0,\ x<0,$

$$\Phi(r,\rho)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty q\,dq\,e^{i\sqrt{E_q}\,r}\sin q\rho\,Y(q), \qquad (2)$$

$$Y(q)=\frac{1}{4\pi}\int d\vec r_1\,d\vec\rho_1\,g(r_1,E_q)e^{-i\vec q\vec\rho_1}\times$$
$$\times[\psi(r_2,\rho_2)+\psi(r_3,\rho_3)], \qquad (3)$$

$$g(r,E)=-\frac{1}{r}\,\frac{e^{-ic\sqrt{E}}}{f_0-ic\sqrt{E}}[f_0\delta(r-c)+c\delta'(r-c)], \qquad (4)$$

$E_q=E-\frac{3}{4}q^2$, $E=-E_0$ – полная энергия, $\vec r_i,\vec\rho_i$ – координаты Якоби $(i=1,2,3)$, f_0, c – параметры модели граничных условий (соответственно логарифмическая производная двухчастичной волновой функции и радиус граничных условий).

В выражениях (1), (2) двумерная функция $A(r,\rho)$ и одномерная функция $Y(q)$ являются неизвестными функциями, для определения которых необходимы два уравнения. При введении новых переменных R,α

$$r=R\sin\alpha,\ \rho=\frac{\sqrt3}{2}R\cos\alpha,\ R^2=r^2+\frac{4}{3}\rho^2 \qquad (5)$$

в области $r<c$ $A(r,\rho)\equiv A(R,\alpha)$ как функция α удовлетворяет интегральному уравнению

$$\theta(c-r)[A(R,\alpha)+\frac{4}{\sqrt3}\int_{|\frac{\pi}{3}-\alpha|}^{\min(\frac{\pi}{3}+\alpha,\frac{2\pi}{3}-\alpha)}d\alpha'\theta(c-R\sin\alpha')A(R,\alpha')]=$$
$$=-\theta(c-r)F(R,\alpha), \qquad (6)$$

где

$$F(R,\alpha)=\frac{4}{\sqrt3}\int_{|\frac{\pi}{3}-\alpha|}^{\min(\frac{\pi}{3}+\alpha,\frac{2\pi}{3}-\alpha)}d\alpha'\theta(R\sin\alpha'-c)\Phi(R,\alpha'), \qquad (7)$$

а в качестве второго уравнения можно использовать выражение (3). В области $r < c$, $R > c$ правая часть (7) уравнения (6) отлична от нуля, и в работе /1/ были получены точные решения этого уравнения, выражающие, согласно (7), (5) и (2), двумерную функцию $A(r,\rho)$ через одномерную функцию $Y(q)$. Из вида функции $g(r,E)$ (4) следует, что в (3) интегрирование не включает область $R < c$, поэтому аналитические решения уравнения (6) при $R > c$ (формулы (19)-(24) работы /1/) позволяют с помощью (1) и (2) исключить из (3) двумерную функцию $A(r,\rho)$ и получить точным образом одномерное уравнение, которое имеет следующий вид:

$$\psi(q) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty qq'dq'\,[T(q,q') + V(q,q')]\,\psi(q'), \tag{8}$$

где $\psi(q) = qe^{ic\sqrt{E_q}}Y(q)$,

$$T(q,q') = \frac{c}{f_0 - ic\sqrt{E_q}}\int_{-1}^{+1}dx\,\frac{\cos p_1c - f_0 j_0(p_1c)}{q^2 + q'^2 + qq'x - E}\times \tag{9}$$

$$\times[\cos p_2c - ic\sqrt{E_{q'}}\,j_0(p_2c)],$$

$$p_1^2 = \frac{1}{4}q^2 + q'^2 + qq'x\,,\quad p_2^2 = q^2 + \frac{1}{4}q'^2 + qq'x\,,$$

$$V(q,q') = \frac{1}{q'[f_0 - ic\sqrt{E_q}]}[V_1(q,q') + V_2(q,q')], \tag{10}$$

$$V_1(q,q') = -\frac{3}{2}\int_c^{\frac{2}{\sqrt{3}}c}RdR\Big[\frac{4c}{R\cos\alpha_0}\;\frac{\cos 4\kappa_0}{Q(R)}j_0(q\rho_0) + \tag{11}$$

$$+\frac{\sin 4\kappa_0}{Q(R)}F_0(q,R)\Big]F_1(R,q'),$$

$$V_2(q,q') = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}c}^{2c}RdR\Big\{\sqrt{6}\,\frac{F_0(R,q)}{\sin(\gamma_0 + \frac{\pi}{4})}F_2(R,q') +$$

$$+\Big[\sqrt{6}\,\frac{F_0(q,R)\sin\gamma_0}{\sin(\gamma_0 + \frac{\pi}{4})} - \frac{4c}{R\cos\alpha_0}j_0(q\rho_0)\Big]F_3(R,q')\Big\}, \tag{12}$$

$$F_0(q,R) = f_0 j_0(q\rho_0) - \frac{3}{4}\,\frac{qc^2}{\rho_0}j_1(q\rho_0),$$

$$Q(R) = \kappa_0 j_0(a_{(+)}\kappa_0) - \kappa_0 j_0(a_{(-)}\kappa_0)\,,\quad a_{(\pm)} = 4 \pm \frac{4}{\sqrt{3}},$$

$$F_1(R,q) = \int_{\alpha_0}^{\pi/2}d\alpha\,G(R,q,\alpha)\sin\frac{4}{\sqrt{3}}\Big(\frac{\pi}{2} - \alpha\Big),$$

$$F_2(R,q) = \int_{\alpha_1}^{\pi/2}d\alpha\,G(R,q,\alpha)\sin\frac{4}{\sqrt{3}}\Big(\frac{\pi}{2} - \alpha\Big),$$

$$F_3(R,q) = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1}d\alpha\,G(R,q,\alpha),$$

$$G(R,q,\alpha) = e^{i\sqrt{E_q}(R\sin\alpha - c)} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} qR\cos\alpha\right),$$

$$\rho_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{R^2 - c^2}, \qquad \alpha_0 = \arcsin\frac{c}{R},$$

$$\kappa_0 = \frac{\pi}{2} - \alpha_0, \quad \gamma_0 = \frac{4}{\sqrt{3}}\left(\alpha_0 - \frac{\pi}{6}\right), \ \alpha_1 = \frac{2\pi}{3} - \alpha_0.$$

В области $R < c$, согласно (7), правая часть уравнения (6) равна нулю, однако это уравнение имеет нетривиальное решение вида

$$A(R,\alpha) = B(R)\sin 4\alpha, \qquad (13)$$

где $B(R)$ – произвольная функция от R. Следствием этого является то, что при $R<c$, согласно (1) и (5), функция канала $\psi(r,\rho)$ неоднозначна и имеет вид:

$$\psi(r,\rho) = F(R)(R^2 - 2r^2), \ R = \sqrt{r^2 + \frac{4}{3}\rho^2} < c, \qquad (14)$$

причём $F(R)$ является произвольной функций R.

Таким образом, уравнение Фаддеева в модели граничных условий не имеет однозначного решения, однако неоднозначность (14) функции канала не будет влиять на вид ядра $V(q,q')$ (10) уравнения (8), вытекающего из соотношения (3), так как интегрирование в (3) не включает область $R<c$, что было указано выше. Неоднозначность функции канала совершенно несущественна также при определении полной трехчастичной функции $\Psi(\vec{r},\vec{\rho})$, имеющей вид:

$$\Psi(\vec{r}_1,\vec{\rho}_1) = \psi(r_1,\rho_1) + \psi(r_2,\rho_2) + \psi(r_3,\rho_3), \qquad (15)$$

так как в области $R<c$ эта функция, согласно (14), будет иметь вполне определенное значение:

$$\Psi(\vec{r},\vec{\rho}) = 0, \quad R<c, \qquad (16)$$

а при $R>c$ функция канала $\psi(r,\rho)$ в (15) определяется в соответствии с (1) однозначным образом, если известны решения уравнений (6) и (8).

Конкретное решение уравнения (8) связано с определенными трудностями, обусловленными медленным затуханием ядер $V_1(q,q')$ (11) и $V_2(q,q')$ (12) по переменным q,q' (по крайней мере, как произведение $1/q$ на осциллирующий множитель). Решение подобных уравнений стандартным методом сведения их к матричным уравнениям с помощью квадратурных формул Гаусса для конечного интервала интегрирования $-1<x<+1$ не вполне корректно математически, так как при этом оказывается $dq \sim q^2 dx$, что приводит к матрицам с бесконечно растущими элементами /4/. Для решения уравнения (8) в работе /2/ был использован метод, заключающийся в разбиении интервала интегрирования на два участка $(0,q_0)$ и (q_0,∞) и введении во втором участке новой переменной $x = q'^2 - q^2$ и формального веса $e^{-\alpha x}$ с последующим использованием квадратурных формул Гаусса с этим весом. Искомое значение энергии связи $E_0 = -E$ рассматривалось как предел $E_0(0)$ при $\alpha \to 0$, определяемый приближенно по нескольким значениям $E_0(\alpha)$, вычисляемым при $\alpha \neq 0$. Для параметров модели граничных условий $f_0 = -0{,}253$ и $c = 1{,}095$ ферми, соответствующих триплетному s–взаимодействию нейтрона и протона, было получено $E_0 = 7{,}43$ МэВ. Описанный выше метод хотя и достаточно эффективен, но обладает существенными недостатками. Во-первых, необходимо решение исходного уравнения для ряда значений α, и, во-вторых, всегда имеет место ошибка, связанная с экстраполяцией по a в точку $a=0$. (В работе [2] такая ошибка для энергии связи оценивается как $\Delta E = 0{,}2$ МэВ). Поэтому в данной работе для решения уравнения (8) был использован иной, чем во [2], метод, основанный на применении специальной квадратурной формулы Гаусса непосредственно для бесконечного интервала интегрирования [5]:

$$\int_0^\infty dx\, f(x) \approx \sum_{i=1}^{N} A_i^{(N)} f(x_i^{(N)}), \tag{17}$$

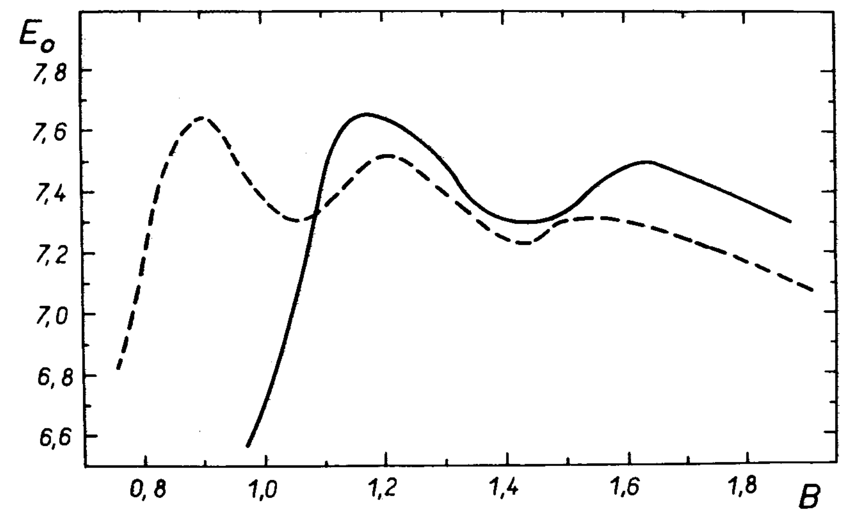
где $x_i^{(N)}$ - корни полинома Лагерра $L_N^{(0)}(x)$, $A_i^{(N)}$ - соответствующие веса. При решении уравнения (8) вводилась новая переменная

$$x = Bq' \tag{18}$$

и использовалась квадратурная формула (17) с числом узлов $N=12$ и $N=16$, причём параметр B в (18) рассматривался как своего рода вариационный и исследовалась зависимость E_0 от B. Эта зависимость показана на рисунке, из которого видно, что E_0 достигает максимального значения $E_0 = 7{,}65$ МэВ при $B = 1{,}15$ ферми для $N=12$ и при $B=0{,}9$ ферми для $N=16$. Значение $E_0 = 7{,}65$ МэВ очень хорошо согласуется с результатом работы [2] и со значением $E_0 = 7{,}70$ МэВ, полученным в работе [6] при решении уравнения Шредингера для той же самой модельной задачи.

§3. Приближенное одномерное уравнение

Сведение двумерного уравнения Фаддеева к точному одномерному уравнению (8) основано на том, что для системы трех тождественных бозонов с полным угловым моментом $L=0$ в модели граничных условий с учётом двухчастичных взаимодействий только в s-состояниях известно точное аналитическое решение "внутреннего"



Зависимость энергии связи трех бозонов E_0 (МэВ) от параметра B (ферми) в (18) для числа узлов в квадратурной формуле (17) $N=12$ (сплошная линия) и $N=16$ (пунктирная линия).

уравнения (6) (формулы (19)-(24) работы [1]). Это обстоятельство не имеет места для более сложных случаев ($L \neq 0$, учёт высших парциальных компонент $\ell > 0$ двухчастичных взаимодействий), и в этих случаях необходим какой-то приближенный метод решения соответствующих "внутренних" уравнений типа уравнения (6). Таким методом, пригодным для любых значений L и ℓ, может служить метод, основанный на представлении решений уравнений типа (6) в виде рядов Фурье. Ниже этот метод будет применен к рассмотренному выше простейшему случаю, для которого известно точное решение.

Разложим функцию $\theta(c-r)A(r,\rho)$ в (1) в ряд Фурье по переменной a, определяемой соотношениями (5):

$$\theta(c-r)A(r,\rho)\equiv\theta(c-R\sin\alpha)A(R,\alpha)=\sum_m A_m(R)\sin 2m\alpha, \qquad (19)$$

имея в виду граничные условия:

$$A(0,\rho) = 0, \qquad \theta(c-r)A(r,0) = 0.$$

Подстановка разложения (19) в уравнение (6) приводит к следующей системе линейных уравнений для коэффициентов $A_m(R)$:

$$\sum_{m'} S_{mm'}(R)A_{m'}(R) = -F_m(R), \qquad (20)$$

где

$$S_{mm'}(R) = \delta_{mm'} + \frac{4}{\sqrt{3}}D_{mm'}(R), \qquad (21)$$

$$D_{mm'}(R) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} d\alpha\,\theta(c-R\sin\alpha)\;\times$$

$$\times\;\sin 2m\alpha \int_{|\frac{\pi}{3}-\alpha|}^{\min(\frac{\pi}{3}+\alpha,\frac{2\pi}{3}-\alpha)} d\alpha'\sin 2m'\alpha', \qquad (22)$$

$$F_m(R) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} d\alpha\,\theta(c-R\sin\alpha)\sin 2m\alpha\, F(R,\alpha). \qquad (23)$$

Решение системы (20) можно записать с помощью обратной матрицы S^{-1} в виде

$$A_m(R) = -\sum_{m'} S^{-1}_{mm'}(R)F_{m'}(R). \qquad (24)$$

Выражение (24) дает возможность с помощью (1) и (2) получить из соотношения (3) одномерное уравнение, аналогичное (8), которое, однако, будет приближенным при учёте конечного числа членов в разложении (19):

$$\psi(q) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty qq'dq'[T(q,q')+W(q,q')]\,\psi(q'), \qquad (25)$$

где $T(q,q')$ определяется выражением (9), а $W(q,q')$, в отличие от $V(q,q')$ (10), имеет вид:

$$W(q,q') = \frac{1}{q'[f_0 - ic\sqrt{E_q}]}[W_1(q,q') - W_2(q,q')],$$

$$W_1(q,q') = 4\int_c^{\frac{2}{\sqrt{3}}c} RdR \sum_{mm'} G_m^{(1)}(q,R)S^{-1}_{mm'}(R)F^{(1)}_{m'}(R,q'), \qquad (26)$$

$$W_2(q,q') = 4\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}c}^{2c} RdR \sum_{mm'} G_m^{(2)}(q,R)S^{-1}_{mm'}(R)F^{(2)}_{m'}(R,q'),$$

$$G_m^{(1)}(q,R) = [2\frac{cj_0(q\rho_0)}{R\cos\alpha_0}\cos 2m\kappa_0 +$$

$$+\frac{1}{m}F_0(q,R)\sin 2m\kappa_0]\sin\frac{m\pi}{3},$$

$$G_m^{(2)}(q,R) = \frac{cj_0(q\rho_0)}{R\cos\alpha_0}\sin 2m(\frac{\pi}{3}-\alpha_0) -$$

$$-\frac{1}{m}F_0(q,R)\sin 2m(\alpha_0-\frac{\pi}{6})\sin\frac{m\pi}{3}. \qquad (27)$$

В выражениях (26) и (27) $S^{-1}_{mm'}(R)$ – матрица, обратная матрице (21), где, согласно (22),

$$D_{mm'}(R)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi m'}\sin\dfrac{2m'\pi}{3}\left[\dfrac{\sin 2(m-m')\alpha_0}{m-m'}-\dfrac{\sin 2(m+m')\alpha_0}{m+m'}\right], & m\neq m',\\[2ex] \dfrac{2}{\pi m}\sin\dfrac{2m\pi}{3}\left[\alpha_0-\dfrac{\sin 4m\alpha_0}{4m}\right], & m=m',\end{cases}$$

а $F^{(1)}_m(R,q)$ и $F^{(2)}_m(R,q)$ в соответствии с (23) имеют вид:

$$F^{(1)}_m(R,q)=\frac{4}{\pi m}\sin\frac{2m\pi}{3}\int_{\alpha_0}^{\pi/2} d\alpha\sin 2m\alpha\, G(R,\alpha,q),$$

$$F^{(2)}_m(R,q)=\frac{2}{\pi m}\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha\left[\cos 2m\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)-\cos 2m\kappa_0\right]G(R,\alpha,q)+$$

$$+\frac{4}{\pi m}\sin\frac{2m\pi}{3}\int_{\alpha_0}^{\pi/2} d\alpha\sin 2m\alpha\, G(R,\alpha,q).$$

Уравнение (25) было решено для ряда значений M числа членов в разложении (19) с помощью квадратурной формулы (17) с N=12 и замены переменной (18). Как

и прежде, параметр B считался вариационным, и для каждого значения M отыскивался максимум энергии связи E_0 в зависимости от B. В таблице приведены полученные максимальные значения E_0 для M = 8, 12, 16 и 20, причём все они соответствуют одному и тому же значению B = 1,15 ферми. Результаты, приведенные в таблице, указывают на сходимость метода и на то, что приближенные значения E_0 незначительно отличаются от значения, полученного из точного уравнения (8) (на 8,1% для M = 8 и на 5,5% для M =12). Заметим, что в области R<c, согласно (22), $D_{mm'}(R)$ в (21) имеет вид:

$$D_{mm'}(R)=\frac{1}{m}\sin\frac{2m\pi}{3}\delta_{mm'},$$

и в соответствии с (7) и (23) решением системы (20) будет $A_m(R)=0$, $m\neq 2$, $A_2(R)$ произвольно, то есть ряд Фурье (19) дает точное решение (13).

Таблица

Зависимость энергии связи E_0 (МэВ) трех бозонов от числа M членов в разложении (19). В последнем столбце указано значение E_0, полученное из точного уравнения (8).

M	8	12	16	20	
E_0	8,27	8,07	7,99	7,94	7,65

§4. О неоднозначности решений уравнений Фаддеева в модели граничных условий

Выше было показано, что в модели граничных условий уравнение Фаддеева для функции канала системы трех тождественных бозонов с полным угловым моментом $L=0$ при учёте двухчастичных взаимодействий только в парциальных состояниях с $\ell = 0$ (ℓ – угловой момент пары частиц) не имеет однозначного решения. Это обстоятельство связано с тем, что при $R < c$ однородное уравнение (6) имеет нетривиальное решение (13), приводящее к неоднозначности (14) функции канала. Естественно возникает вопрос о неоднозначности уравнений Фаддеева и конкретном виде неоднозначностей функций каналов для более общих случаев $L \neq 0$ и $\ell \geq 0$. Ниже будет рассмотрен этот вопрос для системы трех тождественных бозонов при учёте произвольных двухчастичных компонент ℓ. Как и прежде, для простоты будем считать $L=0$, что не является принципиальным ограничением.

При введении трех наборов координат Якоби $\vec{r}_i$, $\vec{\rho}_i$ $(i=1,2,3)$ полная волновая функция $\Psi(\vec{r}_1,\vec{\rho}_1)$ будет иметь вид:

$$\Psi(\vec{r}_1,\vec{\rho}_1) = \psi(\vec{r}_1,\vec{\rho}_1) + \psi(\vec{r}_2,\vec{\rho}_2) + \psi(\vec{r}_3,\vec{\rho}_3), \qquad (28)$$

где

$$\psi(\vec{r},\vec{\rho}) = \sum_{\ell} \psi_\ell(r,\rho)\, P_\ell\left(\frac{\vec{r}\vec{\rho}}{r\rho}\right), \qquad (29)$$

$P_\ell(x)$ – полиномы Лежандра, а сумма по ℓ содержит только четные ℓ и ограничена максимальным значением ℓ_{max} учитываемых компонент двухчастичных взаимодействий. Тривиальное обобщение метода, изложенного в работах /1,6/, показывает, что $\psi_\ell(r,\rho)$ в (29) можно представить в виде, аналогичном (1):

$$\psi_\ell(r,\rho) = \frac{1}{4\pi r\rho}\left[\theta(c_\ell - r)A_\ell(r,\rho) + \theta(r - c_\ell)\Phi_\ell(r,\rho)\right], \qquad (30)$$

где c_ℓ – радиус граничных условий для двухчастичной внемассовой волновой функции с угловым моментом ℓ,

$$\Phi_\ell(r,\rho) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty q^2\, dq\, ir\sqrt{E_q}\, h_\ell^{(1)}(r\sqrt{E_q})\,\rho\, j_\ell(q\rho)\, Y_\ell(q), \qquad (31)$$

$j_\ell(x)$, $h_\ell^{(1)}(x)$ – соответственно сферические функции Бесселя и Ганкеля первого рода. Одна из систем уравнений для неизвестных функций $A_\ell(r,\rho)$ в (30) и $Y_\ell(q)$ в (31) вытекает, как и уравнение (6) при $\ell=0$ в (30), из условия

$$\theta(c_\ell - r)\int d\Omega_{\vec{r}}\, d\Omega_{\vec{\rho}}\, P_\ell\left(\frac{\vec{r}\vec{\rho}}{r\rho}\right)\Psi(\vec{r},\vec{\rho}) = 0, \quad \ell \leq \ell_{max}, \qquad (32)$$

являющегося следствием соотношения, связывающего зависимость от $\vec{r}$ полной трехчастичной функции $\Psi(\vec{r},\vec{\rho})$ с зависимостью от $\vec{r}$ внемассовой двухчастичной волновой функции /6,7/. Эта система уравнений в области $R < c = \min(c_\ell)$ (R – шестимерный радиус-вектор, определенный в (5)) однородна и не содержит $Y_\ell(q)$:

$$A_\ell(R,\alpha) + \frac{4}{\sqrt{3}}\sum_{\ell'} \int\limits_{|\frac{\pi}{3}-\alpha|}^{\min(\frac{\pi}{3}+\alpha,\, \frac{2\pi}{3}-\alpha)} d\alpha'\, K_{\ell\ell'}(\alpha,\alpha')\, A_{\ell'}(R,\alpha') = 0, \qquad (33)$$

где $K_{\ell\ell'}(\alpha,\alpha') = (2\ell+1)P_\ell(\cos\theta_1)P_{\ell'}(\cos\theta_2)$,

$$\cos\theta_1 = \frac{\cos 2\alpha + 2\cos 2\alpha'}{\sqrt{3}\sin 2\alpha}, \quad \cos\theta_2 = -\frac{2\cos 2\alpha + \cos 2\alpha'}{\sqrt{3}\sin 2\alpha'}.$$

Существование нетривиальных решений системы (33) при произвольных ℓ, как и в рассмотренном выше случае $\ell=0$, может привести к неоднозначности функций каналов (30). Наличие таких решений, а также их конкретный вид, подобный выражению (13) для $\ell=0$, можно установить с помощью некоторых соображений, имеющих, с нашей точки зрения, достаточное физическое обоснование и прозрачный смысл. Эти соображения основаны на том, что для $\ell=0$ известно точное аналитическое решение (13) системы (33), то есть фактически однородного уравнения (6). Связанная с этим решением неоднозначность функции канала (14) имеет такой вид, что в соответствии с (15) в области $R<c$ полная волновая функция, а не только, согласно (32), ее s-проекция, тождественно обращается в нуль. Последнее обстоятельство имеет место при учёте только двухчастичных s-компонент также и для пространственных компонент полной волновой функции трех нуклонов в случае $L=0$ [8]. Указанные выше факты равенства нулю при $R<c$ пространственных волновых функций, являющиеся следствием точных решений соответствующих уравнений (однородное уравнение (6) для трех бозонов и аналогичные уравнения для трех нуклонов) имеют простой физический смысл: запрещены такие трехчастичные состояния, когда перекрываются коры всех пар взаимодействующих частиц, так как в модели граничных условий именно область $R<c$ соответствует перекрытию всех трех коров.

В рассматриваемом случае системы трех тождественных частиц с $L=0$ и произвольными ℓ области перекрытия всех коров соответствует область $R<c=\min(c_\ell)$, и нам кажется вполне логичным потребовать, чтобы и в этом случае при $R<c$ полная волновая функция (28) обращалась в нуль:

$$\Psi(\vec r_1,\vec\rho_1) = \psi^{(c)}(\vec r_1,\vec\rho_1) + \psi^{(c)}(\vec r_2,\vec\rho_2) + \psi^{(c)}(r_3,\rho_3) = 0, \quad R<c=\min(c_\ell). \tag{34}$$

Условию (34) удовлетворяют только функции смешанной симметрии, осуществляющие двумерное представление группы перестановок трех частиц. Такие функции удобно разложить по гиперсферическим функциям соответствующей симметрии, определенным в работе [9], учитывая, что в (29) входят только чётные полиномы Лежандра:

$$\psi^{(c)}(\vec r,\vec\rho) = \sum_{K\nu} F_{K\nu}(R)\, v_K^\nu(\alpha,\theta), \quad \cos\theta = \frac{\vec r\vec\rho}{r\rho}, \tag{35}$$

где $F_{K\nu}(R)$ – произвольные функции шестимерного радиуса R, $v_K^\nu(\alpha,\theta)$ – функции из работы [9], K пробегает чётные значения, $\nu=\frac{1}{2}K$, $\frac{1}{2}K-2,\dots,$ не кратно трем и ограничено условием $\nu\geq 0$. В частном случае учёта двухчастичных взаимодействий в s- и d-состояниях ℓ в (29) принимает значения 0 и 2, в соответствии с чем в (35) могут входить только функции v_K^ν с $K=2$, $\nu=1$; $K=4$, $\nu=2$ и $K=6$, $\nu=1$. Из явного вида этих функций и из соотношения (30) следует, что при $\ell,\ell'=0,2$ система уравнений (33) будет иметь нетривиальное решение вида:

$$\begin{aligned} A_0(R,\alpha) &= F_1(R)\sin 4\alpha + F_2(R)\sin 6\alpha + F_3(R)\sin 8\alpha, \\ A_2(R,\alpha) &= [-2F_2(R)\sin 2\alpha + 4F_3(R)\sin 4\alpha]\sin^2 2\alpha, \end{aligned} \tag{36}$$

где $F_1(R), F_2(R), F_3(R)$ – произвольные функции от R. Если система (33) имеет еще нетривиальные решения другого вида, чем (36), то эти решения должны быть отброшены как нефизические, так как они будут приводить к отличной от нуля полной волновой функции в области перекрытия коров всех трех пар взаимодействующих частиц, что, с нашей точки зрения, физически неоправданно.

Для системы с угловым моментом $L = 0$ трех различных частиц полная волновая функция вместо (28) будет иметь вид:

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{\rho}_1) = \psi_1(\vec{r}_1, \vec{\rho}_1) + \psi_2(\vec{r}_2, \vec{\rho}_2) + \psi_3(\vec{r}_3, \vec{\rho}_3), \qquad (37)$$

и требование обращения ее в нуль в области перекрытия всех коров $R < c = \min(c_a)$ (индекс a соответствует различным каналам), приводит, согласно (37), к соотношению

$$\psi_1^{(c)}(\vec{r}_1, \vec{\rho}_1) + \psi_2^{(c)}(\vec{r}_2, \vec{\rho}_2) + \psi_3^{(c)}(\vec{r}_3, \vec{\rho}_3) = 0, \quad R < c,$$

которое, очевидно, будет выполнено, если только

$$\psi_1^{(c)}(\vec{r}, \vec{\rho}) = \psi_2^{(c)}(\vec{r}, \vec{\rho}) = \psi_3^{(c)}(\vec{r}, \vec{\rho}) = \chi(\vec{r}, \vec{\rho}),$$

где $\chi(\vec{r}, \vec{\rho})$, как и прежде, функция смешанной симметрии. Однако, в отличие от (35), для этой функции, в соответствии с [9], будем иметь разложение

$$\chi(\vec{r}, \vec{\rho}) = \sum_{K\nu} [F_{K\nu}(R) v_K^{\nu}(a, \theta) + \Phi_{K\nu}(R) w_K^{\nu}(a, \theta)], \qquad (38)$$

где для K и ν имеют место те же самые ограничения, что и в (35), $F_{K\nu}(R)$, $\Phi_{K\nu}(R)$ - произвольные функции от R. Для случая $L \neq 0$ в разложениях типа (35) и (38) следует использовать гиперсферические функции, определенные в работе [10].

Литература

1. В.Н.Ефимов. ОИЯИ, Е4-9475, Дубна, 1976.
2. В.Н.Ефимов. ОИЯИ, Р4-9819, Дубна, 1976.
3. Y.E.Kim, A.Tubis. Phys.Lett., 38B, 354 (1972).
4. D.D.Brayshaw. Phys.Rev., D8, 2572 (1973).
5. Е.Н.Деканосидзе. Таблицы корней и весовых множителей обобщенных полиномов Лагерра. АН СССР, Москва, 1966.
6. V.N.Efimov, H.Schulz. Nucl. Phys., A261, 328 (1976).
7. В.Н.Ефимов. ОИЯИ, Р4-8580, Дубна, 1975.
8. В.Н.Ефимов. Труды Международной конференции по избранным вопросам структуры ядра, т.1, Дубна, 1976. ОИЯИ, Р4-9732, Дубна, 1976.
9. Ю.А.Симонов. ЯФ, 3, 630 (1966).
10. В.В.Пустовалов, Ю.А.Симонов. ЖЭТФ, 51, 345 (1966).

Рукопись поступила в издательский отдел
26 октября 1976 года.