ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р4 - 10139

В.Л.Любошиц

О КОГЕРЕНТНЫХ СВОЙСТВАХ СИСТЕМЫ ДВУХ ОДИНАКОВЫХ КВАНТОВЫХ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ ПРИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПЕРЕХОДАХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ МУЛЬТИПОЛЬНОСТИ

1976

Р4 - 10139

В.Л.Любошиц

О КОГЕРЕНТНЫХ СВОЙСТВАХ СИСТЕМЫ ДВУХ ОДИНАКОВЫХ КВАНТОВЫХ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ ПРИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПЕРЕХОДАХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ МУЛЬТИПОЛЬНОСТИ

Направлено в ЖЭТФ

S u m m a r y

The spectrum and the angular distribution of the radiation for the system of two identical two-level centers are investigated, one of them being in the excited state with an integral spin L and the other in the ground state with zero spin. The values of energies and widths of collective excited states for an arbitrary distances between the centers A and B are calculated. The energy and angular dependences of the effective cross-section of the photon resonance scattering on two identical centers are obtained. The spin structure of the resonance interaction between the excited nucleus (atom) and the non-excited one in the case of EL and ML transitions is considered.

§1. Введение

Когерентные явления при излучении системы возбужденных молекул, окруженных невозбужденными молекулами того же типа, были впервые рассмотрены в известной работе Дикке [1]. В этой работе предполагалось, что длина волны фотона гораздо больше расстояния между молекулами ($\lambda >> R$). Противоположный предельный случай $\lambda << R$ обсуждался затем Подгорецким и Ройзеном в рамках классической теории осцилляторов, связанных полем излучения [2]. Как было показано в работах [3–8], в случае двух одинаковых центров /атомов, ядер/, один из которых находится в основном состоянии с нулевым спином, а другой - в возбужденном состоянии со спином 1, задача Дикке допускает точное аналитическое решение при произвольных значениях параметра R/λ. Спектр излучения такой системы, а также энергетическая и угловая зависимости эффективного сечения резонансного рассеяния фотонов на двух бесспиновых центрах [5,7] полностью определяются значениями энергий и ширин симметричных и антисимметричных двухчастичных состояний, отвечающих возбуждению одного из центров. Сказанное относится и к спектру излучения двух одинаковых возбужденных атомов, который изучался в работе [9]. Явные выражения для сдвигов частот и ширин спектральных линий непосредственно следуют из теории резонансного взаимодействия /см. [3,4,6]/. К тем же результатам приводит и чисто классическая теория многократного рассеяния электромагнитных волн на двух одинаковых изотропных осцилляторах [5].

В цитированных выше работах и других статьях, посвященных различным аспектам проблемы Дикке /см., напр., [10–13]/, подразумевалось, что электромагнитное излучение носит дипольный характер. Целью настоящей работы является исследование спектральных и угловых характеристик излучения и резонансного рассеяния фотонов в случае, когда взаимодействие между возбужденным и невозбужденным центрами осуществляется за счет электрических или магнитных переходов произвольной мультипольности. При этом непосредственно обобщаются результаты работ [5,6], относящиеся к E1-переходам.

§2. Коллективные возбужденные состояния

Рассмотрим двухуровневый центр /например, ядро/, возбужденное состояние которого имеет энергию E_B и спин $L \geq 1$, а основное состояние - энергию E_A и спин, равный нулю. В зависимости от относительной четности состояний B и A распаду $B \to A + \gamma$ соответствует 2^L-польное электрическое или магнитное излучение с частотой $\omega_0 = \frac{E_B - E_A}{\hbar}$. Предположим, что два таких центра, один из которых находится в возбужденном, а другой - в основном состояниях, неподвижно закреплены в точках $\vec{R}_1$ и $\vec{R}_2$. При отсутствии электромагнитного взаимодействия между центрами мы имеем $2(2L+1)$ вырожденных состояний $|A(1)\rangle|B_m(2)\rangle$ и $|B_m(1)\rangle|A(2)\rangle$. Здесь $m=0,\pm1,\pm2,\ldots\pm L$- проекция спина возбужденного состояния на вектор $\vec{R}=\vec{R}_1-\vec{R}_2$. За счет обмена фотоном происходит передача возбуждения от одного центра к другому, и вырождение снимается. Легко видеть, что ввиду осевой симметрии и сохранения пространственной четности матричные элементы резонансного взаимодействия между центрами A и B имеют структуру

$$\langle A(1)B_m(2)|\hat{V}|B_{m'}(1)A(2)\rangle = \langle B_{m'}(1)A(2)|\hat{V}|A(1)B_m(2)\rangle = \hbar\gamma_L U^{(L)}_{|m|}(x)\,\delta_{mm'}\,. \qquad /1/$$

В формуле /1/ γ_L - радиационная ширина изолированного центра B, не зависящая от квантового числа m $(0 \leq |m| \leq L)$; величины $U^{(L)}_{|m|}$ представляют собой комплексные функции безразмерного параметра x

$$x = k_0 R = \frac{E_B - E_A}{\hbar c}|\vec{R}_1 - \vec{R}_2|\,. \qquad /2/$$

Как мы увидим в дальнейшем, для EL- и ML-переходов функции $U^{(L)}_{|m|}(x)$ совпадают.

С учетом /1/ квазистационарные состояния системы AB, отвечающие возбуждению одного из центров, должны быть симметричны или антисимметричны относительно перестановки $B \rightleftarrows A$ [6]:

$$|\psi^{(\pm)}_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|A(1)\rangle|B_m(2)\rangle \pm |B_m(1)\rangle|A(2)\rangle)\,. \qquad /3/$$

Их энергии равны

$$E^{(\pm)}_m = E_A + E_B \pm \hbar\gamma_L \,\mathrm{Re}\, U^{(L)}_{|m|}(x)\,, \qquad /4/$$

а радиационные ширины

$$\gamma^{(\pm)}_{L,m} = \gamma_L(1 \mp 2\,\mathrm{Im}\, U^{(L)}_{|m|}(x))\,. \qquad /5/$$

В соотношениях /4/ и /5/ верхний знак относится к симметричным коллективным состояниям $|\psi^{(+)}_m\rangle$, а нижний - к антисимметричным состояниям $|\psi^{(-)}_m\rangle$. Отклонения радиационных ширин от значения γ_L связаны с когерентным излучением двух центров. Данный механизм, очевидно, не оказывает никакого влияния на парциальные ширины, соответствующие нерадиационным каналам распада. Поэтому изменения полных и радиационных ширин равны друг другу и составляют

$$\Delta\gamma_{L,m} = \gamma^{(+)}_{L,m} - \gamma_L = \gamma_L - \gamma^{(-)}_{Lm} = -2\gamma_L \,\mathrm{Im}\, U^{(L)}_{|m|}(x)\,. \qquad /6/$$

Согласно /6/, средние времена жизни коллективных возбужденных состояний определяются по формуле

$$\tau^{(\pm)}_{L,m} = \frac{\tau^{(0)}}{1 \pm \tau^{(0)}\Delta\gamma_{Lm}}, \qquad /7/$$

где $\tau = 1/\gamma_{полн.}$ - среднее время жизни изолированного возбужденного центра. Очевидно, что спектральная линия с частотой ω_0 и шириной $\gamma_{полн.}$ расщепляется на компоненты с частотами

$$\omega^{(\pm)}_{L,m} = \omega_0 \pm \Delta\omega_{L,m} = \omega_0 \pm \gamma_L \mathrm{Re}\, U^{(L)}_{|m|}(x) \qquad /8/$$

и ширинами $\gamma^{(\pm)}_{L,m(полн)} = \gamma_{полн.} \pm \Delta\gamma_{L,m}$.

Поскольку остается вырождение по знаку проекции спина, число новых спектральных линий равно $2(L+1)$. В дальнейшем мы будем считать, что излучение фотона является единственным каналом распада состояния B , т.е. $\gamma_{полн} = \gamma_L$.

Задача теперь состоит в определении явного вида функций $U^{(L)}_{|m|}(x)$, характеризующих когерентные свойства системы двух идентичных центров. В частном случае дипольных переходов ($L=1$) соответствующие выражения были получены в работе /6/:

$$U^{(1)}_1(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} - \frac{i}{x^2}\right) e^{ix} ,$$

$$U^{(1)}_0(x) = \frac{3}{2}\left(\frac{i}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) e^{ix} \ * . \qquad /9/$$

§3. *Резонансное взаимодействие при EL- и ML-переходах*

Для вычисления комплексных функций $U^{(L)}_{|m|}(x)$ воспользуемся известным выражением для эффективной энергии запаздывающего электромагнитного взаимодействия двух токов, сосредоточенных в окрестностях точек $\vec R_1$ и $\vec R_2$ /см. /14/, /§32.2/

---

* Здесь и в следующих разделах предполагается, что время жизни системы велико по сравнению с временем распространения сигнала между двумя центрами:

$$\frac{\gamma_{полн.}|\vec R_1 - \vec R_2|}{c} \ll 1 , \qquad \tau \gg \frac{|\vec R_1 - \vec R_2|}{c} .$$

$$\langle B(1)A(2)|\hat V|A(1)B(2)\rangle =$$

$$= \iint j^{(1)}_{AB}(\vec r_1 - \vec R_1)\, j^{*(2)}_{AB}(\vec r_2 - \vec R_2)\, \frac{e^{ik_0|\vec r_1 - \vec r_2|}}{|\vec r_1 - \vec r_2|}\, d^3\vec r_1\, d^3\vec r_2 . \qquad /10/$$

Здесь $j_{AB} = \{\rho_{AB}, \vec j_{AB}\}$ - 4-мерная плотность тока “перехода“ между стационарными состояниями B и A, разность энергий которых $E_B - E_A = \hbar c k_0$. Переходя к компонентам Фурье

$$j^{(1)}_{AB}(\vec\kappa) = \int j^{(1)}_{AB}(\vec r_1 - \vec R_1)\, e^{-i(\vec\kappa, \vec r_1 - \vec R_1)}\, d^3\vec r_1 ,$$

$$j^{(2)*}_{AB}(\vec\kappa) = \int j^{(2)*}_{AB}(\vec r_2 - \vec R_2)\, e^{i(\vec\kappa, \vec r_2 - \vec R_2)}\, d^3\vec r_2 , \qquad /11/$$

мы можем переписать формулу /10/ в виде интеграла

$$\langle B(1)A(2)|\hat V|A(1)B(2)\rangle =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\int \frac{\rho^{(1)}_{AB}(\vec\kappa)\rho^{(2)*}_{AB}(\vec\kappa) - \vec j^{(1)}_{AB}(\vec\kappa)\vec j^{(2)*}_{AB}(\vec\kappa)]}{\vec\kappa^2 - k_0^2 - i0}\, e^{i(\vec\kappa, \vec R_1 - \vec R_2)}\, d^3\vec\kappa . \qquad /12/$$

В интересующей нас задаче $j^{(1)}_{AB}(\vec\kappa) = j^{(2)}_{AB}(\vec\kappa)$. Из релятивистской инвариантности и сохранения тока следует, что если спин основного состояния равен нулю, а возбужденного - L, компоненты 4-мерного тока перехода при относительной четности $\eta_{AB} = (-1)^L$ имеют структуру /см. /14/ §25.5, /15/ §143/:

$$\rho_{AB_m}(\kappa) = \sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}}\, \frac{\kappa^L}{(2L-1)!!}\, Y_{Lm}\left(\frac{\vec\kappa}{\kappa}\right) Q^{(э)}_{Lm} f^{(э)}_L \,(k_0^2 - \vec\kappa^2), \qquad /13/$$

$$\vec{j}_{AB_m}(\vec{\kappa}) = \sqrt{\frac{4\pi(L+1)}{L(2L+1)}}\ \frac{k_0 \kappa^{L-1}}{(2L-1)!!}\{\vec{Y}^{(э)}_{Lm}(\frac{\vec{\kappa}}{\kappa}) +$$

$$+\sqrt{\frac{L}{L+1}}\ \frac{\vec{\kappa}}{\kappa} Y_{Lm}(\frac{\vec{\kappa}}{\kappa})\} Q^{(э)}_{Lm}\ f^{(э)}_{L}(k_0^2 - \vec{\kappa}^2) .$$

Если $\eta_{AB} = (-1)^{L+1}$, то

$$\rho_{AB_m}(\vec{\kappa}) = 0, \qquad /14/$$

$$\vec{j}_{AB_m}(\vec{\kappa}) = \sqrt{\frac{4\pi(L+1)}{L(2L+1)}}\ \frac{\kappa^L}{(2L-1)!!}\ \vec{Y}^{(M)}_{Lm}(\frac{\vec{\kappa}}{\kappa}) Q^{(M)}_{Lm} f^{(M)}_{L}(k_0^2 - \kappa^2) .$$

В формулах /13/-/14/ $\vec{Y}^{(э)}_{Lm}(\frac{\vec{\kappa}}{\kappa})$ и $\vec{Y}^{(M)}_{Lm}(\frac{\vec{\kappa}}{\kappa})$ - нормированные поперечные шаровые векторы $(\kappa = |\vec{\kappa}|)$, $Y_{Lm}(\frac{\vec{\kappa}}{\kappa})$ - сферическая функция, $Q^{(э)}_{Lm}$ и $Q^{(M)}_{Lm}$ - соответственно электрический и магнитный мультипольные моменты перехода, определяющие вероятность излучения реального фотона /в рассматриваемом случае величина Q_{Lm} не зависит от m /; $f^{(э)}_{L}(k_0^2 - \vec{\kappa}^2)$ и $f^{(M)}_{L}(k_0^2 - \vec{\kappa}^2)$ - формфакторы, учитывающие виртуальность фотона и удовлетворяющие условию $f_L(0) = 1$.

Мы будем пользоваться приближением точечных центров и в соответствии с этим считать, что $f^{(э)}_{L}(k_0^2 - \vec{\kappa}^2) = f^{(M)}_{L}(k_0^2 - \vec{\kappa}^2) = 1$ и при значениях $Z = k_0^2 - \vec{\kappa}^2$, не равных нулю*. При вычислении интегралов /12/ воспользуемся

---

* Энергетической зависимости формфакторов от переменной $Z = k_0^2 - \vec{\kappa}^2$ отвечает контактное взаимодействие, которое исчезает, если пространственные распределения токов не перекрываются. Реальные атомы и ядра не имеют резких границ, и в связи с этим наше рассмотрение применимо при значениях R, существенно превышающих эффективные размеры центров.

разложением $|\vec{Y}^{(э)}_{Lm}(\frac{\vec{\kappa}}{\kappa})|^2$ и $|\vec{Y}^{(M)}_{Lm}(\frac{\vec{\kappa}}{\kappa})|^2$ по полиномам Лежандра

$$|\vec{Y}^{(э)}_{Lm}(\frac{\vec{\kappa}}{\kappa})|^2 = |\vec{Y}^{(M)}_{Lm}(\frac{\vec{\kappa}}{\kappa})|^2 = \qquad /15/$$

$$= \frac{2L+1}{4\pi}(-1)^{m+1}\sum_{n=0}^{L} C^{2n0}_{L1L-1}\ C^{2n0}_{LmL-m}\ P_{2n}(\cos\theta),$$

где C^{2n0}_{LmL-m} - коэффициенты Клебша-Гордона, θ - угол между $\vec{\kappa}$ и осью квантования углового момента $\vec{R} = \vec{R}_1 - \vec{R}_2$. Как известно,

$$\int_0^\pi P_\ell(\cos\theta)\, e^{i\kappa R\cos\theta}\ \sin\theta d\theta = 2i^\ell \sqrt{\frac{\pi}{2\kappa R}}\ J_{\ell+½}(\kappa R), \qquad /16/$$

где $\kappa = |\vec{\kappa}|$, $R = |\vec{R}|$, $J_{\ell+½}$ - функция Бесселя:

$$J_{\ell+½}(\kappa R) = \sqrt{\frac{2\kappa R}{\pi}}\,(-1)^\ell\ (\frac{R}{\kappa})^\ell\ (\frac{d}{RdR})^\ell\ \frac{\sin\kappa R}{\kappa R} .$$

С учетом /16/ нетрудно показать, что при $R \neq 0$ и целых значениях индексов n и $p\ (p \geq n)$ справедливо соотношение

$$\int \frac{P_{2n}(\cos\theta)\, e^{i\kappa R\cos\theta}}{\kappa^2 - k_0^2 - i0}\,\kappa^{2p} d^3\vec{\kappa} = \qquad /17/$$

$$= (2\pi)^2 (-1)^n\, k_0^{2p+1} (\frac{R}{k_0})^{2n} (\frac{d}{RdR})^{2n}\ \frac{e^{ik_0 R}}{k_0 R} .$$

Здесь подразумевается, что после интегрирования отбрасываются выражения, осциллирующие при бесконечных значениях аргумента; в физической ситуации члены такого рода обращаются в нуль при усреднении по сколь угодно малому разбросу расстояний R.

Легко видеть, что, согласно равенствам /13/ и /14/, подынтегральные выражения в /12/, соответствующие EL и ML-переходам, отличаются друг от друга членом, пропорциональным $\kappa^{2(L-1)}(\kappa^2 - k_0^2)$. В силу /17/ вклад этого члена в интеграл равен нулю*. Таким образом, окончательный результат не зависит от относительной четности состояний A и B. На основе /15/ и /17/ получаем

$$U^{(L)}_{|m|}(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{L}(-1)^{n+m}(2L+1)C^{2n0}_{L1L-1}C^{2n0}_{LmL-m}x^{2n}\left(\frac{d}{xdx}\right)^{2n}\frac{e^{ix}}{x} =$$

$$= \frac{1}{2}\, i\sum_{n=0}^{L}(-1)^{n+m}(2L+1)C^{2n0}_{L1L-1}C^{2n0}_{LmL-m}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,H^{(1)}_{2n+1/2}(x), \qquad /18/$$

где $H^{(1)}_{2n+1/2}(x)$ - функция Ганкеля первого рода. Радиационная ширина /вероятность 2^L-полного излучения/, входящая в структурные формулы §2, имеет вид:

$$\gamma_L = \frac{1}{\hbar}|Q_{Lm}|^2 k_0^{2L+1}\frac{2(L+1)}{L(2L+1)!!(2L-1)!!}. \qquad /19/$$

В частности, при $L = 1$

$$U^{(1)}_1(x) = \left[\frac{1}{2}x^2\left(\frac{d}{xdx}\right)^2\frac{e^{ix}}{x} - \frac{e^{ix}}{x}\right],$$

$$U^{(1)}_0(x) = -\left[x^2\left(\frac{d}{xdx}\right)^2\frac{e^{ix}}{x} + \frac{e^{ix}}{x}\right].$$

Эти формулы полностью эквивалентны выражениям /9/.

*В частности, в случае бесспиновых центров A и B ($E(0)$-переход) резонансное взаимодействие отсутствует при любых конечных R.

Согласно /6/, /8/ и /18/, изменения ширин и сдвиги частот спектральных линий представляют собой осциллирующие функции параметра $x = k_0 R$:

$$\Delta\gamma_{L,m} = \gamma_L\left\{\frac{\sin x}{x} - (2L+1)\sum_{n=1}^{L}(-1)^{n+m}C^{2n0}_{L1L-1}C^{2n0}_{LmL-m}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{2n+1/2}(x)\right\},$$

$$\Delta\omega_{L,m} = \frac{\gamma_L}{2}\left\{-\frac{\cos x}{x} + (2L+1)\sum_{n=1}^{L}(-1)^{n+m}C^{2n0}_{L1L-1}C^{2n0}_{LmL-m}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{-2n-1/2}(x)\right\}. \qquad /20/$$

Рассмотрим предельные случаи малых и больших расстояний между двумя центрами. Легко видеть, что при $R \ll \lambda$ ($x \ll 1$) ширины симметричных возбужденных состояний удваиваются, а ширины антисимметричных состояний исчезающе малы ($\operatorname{Im} U^{(L)}_{|m|}(0) = -\frac{L}{2}$). Простые вычисления дают

$$\gamma^{(-)}_{L,m} = \gamma_L x^2\left(\frac{1}{6} + \frac{2L+1}{15}C^{20}_{L1L-1}C^{20}_{LmL-m}(-1)^{m+1}\right) = \qquad /21/$$

$$= \frac{1}{6}\gamma_L x^2\left\{1 + \frac{2[3m^2 - L(L+1)][3 - L(L+1)]}{(2L-1)L(L+1)(2L+3)}\right\}.$$

Сдвиги частот при $x \ll 1$ пропорциональны $x^{-(2L+1)}$; с учетом явного вида коэффициентов C^{2L0}_{LmL-m}

$$\Delta\omega_{L,m} = (-1)^{L+m}\gamma_L\frac{(2L+1)![(2L)!]^2}{(L+m)!(L-m)!(L+1)!(L-1)!}\left(\frac{1}{2x}\right)^{2L+1}. \qquad /22/$$

При этом $|\Delta\omega_{L,m}/\gamma_L| \geq 1$. Данный результат можно также получить на основании явного вида оператора электростатического /магнитостатического/ взаимодействия двух электрических /магнитных/ 2^L-польных моментов:

$$\hat{V}(R)=\sum_{m=-L}^{L}(-1)^{L+m}\frac{(2L)!}{(L+m)!(L-m)!}\hat{Q}^{*(1)}_{Lm}\hat{Q}^{(2)}_{Lm}\frac{1}{R^{2L+1}}\,. \qquad /23/$$

Если $x \gg 1$, проще исходить не из соотношений /20/, а воспользоваться еще до интегрирования представлением шаровых векторов через d-функции Вигнера /16/, §16/:

$$|\vec{Y}^{(м)}_{Lm}(\frac{\vec{\kappa}}{\kappa})|^2 = |\vec{Y}^{(э)}_{Lm}(\frac{\vec{\kappa}}{\kappa})|^2 =$$

$$= \frac{2L+1}{8\pi}[(d^{(L)}_{|m|,1}(\theta))^2 + (d^{(L)}_{|m|,-1}(\theta))^2] = \qquad /24/$$

$$= \frac{2L+1}{8\pi}\sum_{n=0}^{L}\beta^{(L,m)}_{n}(\cos\theta)^{2n}\,.$$

Функции $U^{(L)}_{|m|}(x)$ могут быть заданы с помощью коэффициентов $\beta^{(L,m)}_{n}$:

$$U^{(L)}_{|m|}(x) = -\frac{2L+1}{4}\sum_{n=0}^{L}(-1)^n\beta^{(L,m)}_{n}\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(\frac{e^{ix}}{x})\,^{*} \qquad /25/$$

При $x \gg 1$ основной вклад в интеграл /12/ вносит область малых углов, в которой $d^{(L)}_{|m|,\pm 1}(\theta) \sim (\sin\theta)^{|(|m|\mp 1)|}$. Отсюда следуют асимптотические выражения:

$$U^{(L)}_{1}(x) = -\frac{2L+1}{4}\frac{e^{ix}}{x}\,,\quad U^{(L)}_{0}(x) = i\frac{2L+1}{4}L(L+1)\frac{e^{ix}}{x^2}\,,$$

$$U^{(L)}_{|m|(\geq 2)} = -\frac{2L+1}{2}\frac{(L+|m|)!}{(L-|m|)!\,L(L+1)}(-i)^{|m|-1}\frac{e^{ix}}{(2x)^{|m|}}\,. \qquad /26/$$

* Выражением /25/ удобно пользоваться при небольших L, когда зависимость d-функций от угла имеет простой вид. В частности, при $L=2$

$$U^{(2)}_{1}(x) = -\frac{5}{8}(1+3\frac{d^2}{dx^2}+4\frac{d^4}{dx^4})\frac{e^{ix}}{x}\,,$$

$$U^{(2)}_{0}(x) = \frac{15}{4}(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^4}{dx^4})\frac{e^{ix}}{x}\,,\quad U^{(2)}_{2}(x) = -\frac{5}{8}(1-\frac{d^4}{dx^4})\frac{e^{ix}}{x}\,.$$

§4. *Основные эффекты*

а. Угловое распределение излучения. Выражение /20/ для изменения ширин можно получить путем непосредственного вычисления вероятности распада коллективных состояний /3/. В рассматриваемом случае спиральные амплитуды распада имеют вид

$$A^{(\pm)}_{1m}(\theta,\phi) = d^{(L)}_{1m}(\theta)e^{im\phi}\,b^{(\pm)}(\theta)\,,$$

$$A^{(\pm)}_{-1m}(\theta,\phi) = \eta_{AB}(-1)^{L+1}\,d^{(L)}_{-1m}(\theta)\,e^{im\phi}\,b^{(\pm)}(\theta)\,, \qquad /27/$$

причем

$$b^{(\pm)} = \frac{1}{2}\sqrt{\gamma_L\frac{2L+1}{4\pi}}\{\exp(i\frac{k_0 R\cos\theta}{2}) \pm \exp(-i\frac{k_0 R\cos\theta}{2})\}\,. \qquad /27'/$$

Здесь θ - угол между вектором $\vec{R}$ и импульсом фотона $\vec{k}$; фактор $\eta_{AB}(-1)^{L+1}$ равен $+1$ для ML-переходов и -1 для EL-переходов. Легко видеть, что $\gamma^{(\pm)}_{L,m} = 2\pi\int_{-1}^{1}W^{(\pm)}_{L,m}(\cos\theta)\,d(\cos\theta)$, где

$$W^{(\pm)}_{1m}(\cos\theta) = |A^{(\pm)}_{1m}(\theta,\phi)|^2 + |A^{(\pm)}_{-1m}(\theta,\phi)|^2 = \qquad /28/$$

$$= \frac{2L+1}{8\pi}\gamma_L[(d^{(L)}_{1m}(\theta))^2 + (d^{(L)}_{-1m}(\theta))^2][1\pm\cos(k_0 R\cos\theta)]\,.$$

Мы видим, что угловые распределения электрического и магнитного 2^L-польного излучения одинаковы. Излучению фотона с вектором линейной поляризации, параллельным плоскости $(\vec{k},\vec{R})$, отвечает комбинация

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(A^{(\pm)}_{1m}(\theta,\phi) + A^{(\pm)}_{-1m}(\theta,\phi))\,, \qquad /29/$$

а излучению фотона, поляризованного перпендикулярно плоскости $(\vec{k},\vec{R})$, - комбинация

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(A^{(\pm)}_{1m}(\theta,\phi) - A^{(\pm)}_{-1m}(\theta,\phi)\right). \qquad /29'/$$

Так как амплитуды /27/ факторизуются, интерференция излучения двух центров, которая приводит к угловой зависимости $\cos(k_0 R\cos\theta)$, не сказывается на поляризации.

б. Резонансное рассеяние. Зная энергии, ширины и амплитуды распада промежуточных коллективных состояний, мы можем написать явное выражение для амплитуды резонансного рассеяния фотона на двух бесспиновых центрах. Пусть θ_0 и θ - углы между вектором $\vec{R}$ и импульсами фотона соответственно до и после рассеяния, ϕ - азимутальный угол между плоскостями, проходящими через $\vec{R}$ и направления импульсов падающего и рассеянного фотонов, r и r′ - спиральности фотона до и после рассеяния $(r,r' = \pm 1)$. Тогда

$$f^{(L)}_{rr'}(\theta_0,\theta,\phi) =$$

$$= \frac{2L+1}{2k_0}\gamma_L\left\{\cos\left(\frac{k_0 R\cos\theta_0}{2}\right)\cos\left(\frac{k_0 R\cos\theta}{2}\right)\times\right.$$

$$\times\sum_{m=-L}^{L}\frac{d^{(L)}_{rm}(\theta_0)\,d^{(L)}_{r'm}(\theta)\,e^{im\phi}}{\omega^{(+)}_{L,m}-\omega-\frac{i}{2}\gamma^{(+)}_{L,m}} + \qquad /30/$$

$$+\sin\left(\frac{k_0 R\cos\theta_0}{2}\right)\sin\left(\frac{k_0 R\cos\theta}{2}\right)\times$$

$$\left.\times\sum_{m=-L}^{L}\frac{d^{(L)}_{rm}(\theta_0)\,d^{(L)}_{r'm}(\theta)\,e^{im\phi}}{\omega^{(-)}_{L,m}-\omega-\frac{i}{2}\gamma^{(-)}_{L,m}}\right\}.$$

Полное сечение резонансного рассеяния легко найти с помощью оптической теоремы. Для неполяризованных фотонов

$$\sigma^{(L)} = \frac{4\pi}{k_0}\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left(f^{(L)}_{11}(\theta_0,\theta_0,0)+f^{(L)}_{-1-1}(\theta_0,\theta_0,0)\right) = \qquad /31/$$

$$= \frac{\pi}{k_0^2}(2L+1)\gamma_L\left\{\cos^2\left(\frac{k_0 R\cos\theta_0}{2}\right)\sum_{m=-L}^{L}\frac{\gamma^{(+)}_{L,m}\left(d^{(L)}_{1m}(\theta_0)\right)^2}{\left(\omega^{(+)}_{L,m}-\omega\right)^2+\frac{1}{4}\left(\gamma^{(+)}_{L,m}\right)^2}+\right.$$

$$\left.+\sin^2\left(\frac{k_0 R\cos\theta_0}{2}\right)\sum_{m=-L}^{L}\frac{\gamma^{(-)}_{L,m}\left(d^{(L)}_{1m}(\theta_0)\right)^2}{\left(\omega^{(-)}_{L,m}-\omega\right)^2+\frac{1}{4}\left(\gamma^{(-)}_{L,m}\right)^2}\right\}.$$

Мы здесь учли, что $\sum_m\left(d^{(L)}_{1m}(\theta_0)\right)^2 = \sum_m\left(d^{(L)}_{-1m}(\theta_0)\right)^2$. При $L=1$ из формулы /31/ непосредственно следуют результаты работы /5/ для резонансного дипольного рассеяния.

Согласно /30/ и /31/, если векторы $\vec{k}$ и $\vec{R}$ параллельны $/\theta_0=0$ или $\theta_0=\pi/$, вклад в резонансное рассеяние дают только коллективные уровни с проекциями спина, равными +1 или -1. Это связано с тем, что спиральность фотона принимает значения ± 1. Ввиду вырождения уровней по знаку m в этом случае имеем только два резонанса с частотами $\omega^{(+)}_{L,1}$ и $\omega^{(-)}_{L,1}$ и ширинами $\gamma^{(+)}_{L,1}$ и $\gamma^{(-)}_{L,1}$. С другой стороны, если $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, в формулах /30/ и /31/ исчезают члены, соответствующие антисимметричным состояниям $|\psi^{(-)}_m\rangle$; при этом резонансные энергии фотонов, поляризованных вдоль и перпендикулярно $\vec{R}$, различны. Действительно, из свойств d-функций следует, что при $\theta = \frac{\pi}{2}$ одна из амплитуд /29/ или /29'/ равна нулю. В случае EL-переходов резонансное рассеяние фотонов, поляризованных параллельно $\vec{R}$, определяется уровнями $|\psi^{(+)}_m\rangle$ с нечетными значениями суммы $(L+m)$, а рассеяние фотонов с вектором поляризации $\vec{e}\perp\vec{R}$ - уровнями $|\psi^{(+)}_m\rangle$ с четными $(L+m)$. Если резонансное рассеяние связано с ML-переходами, то наоборот, нечетным $(L+m)$ отвечает вектор поляризации, перпендикулярный $\vec{R}$, а четным - параллельный.

в. Излучение двух возбужденных центров. На основе результатов §3 можно также определить спектр излучения двух одинаковых возбужденных центров B, находящихся в точках $\vec{R}_1$ и $\vec{R}_2$. Уровни $|\psi^{(\pm)}_m\rangle$, соответствующие возбуждению одного из центров, являются в этом случае промежуточными. Конкретные соотношения для формы спектра могут быть получены в рамках развитой в работе /9/ теории каскадного распада двух возбужденных атомов, в которой учитывается интерференция двухфотонных амплитуд, связанная с исходной эквидистантностью системы. Заметим, что в работе /9/ предполагалось, что возбужденные состояния не вырождены, причем излучение имеет дипольный характер. Однако общая структура спектра не зависит от этих допущений. Если оба центра находятся в одинаковых состояниях B_m со спином L, спектральное распределение интенсивности после интегрирования по углам вылета фотонов имеет вид

$$R_{L,m}(\omega) = R^{(+)}_{L,m}(\omega) + R^{(-)}_{L,m}(\omega),$$

где

$$R^{(\pm)}_{L,m}(\omega) = \frac{1}{4\pi}(\gamma_L \pm \Delta\gamma_{L,m})\Big\{\frac{(3\gamma_L \pm \Delta\gamma_{L,m})(1-a^{(\pm)}_{L,m}) + b^{(\pm)}_{L,m}(\omega-\omega_0 \pm \Delta\omega_{L,m})}{(\omega-\omega_0 \pm \Delta\omega_{L,m})^2 + \frac{1}{4}(3\gamma_L \pm \Delta\gamma_{L,m})^2} +$$

$$+ \frac{(\gamma_L \pm \Delta\gamma_{L,m})(1 + a^{(\pm)}_{L,m}) + b^{(\pm)}_{L,m}(\omega_0 - \omega \pm \Delta\omega_{L,m})}{(\omega_0 - \omega \pm \Delta\omega_{L,m})^2 + \frac{1}{4}(\gamma_L \pm \Delta\gamma_{L,m})^2}\Big\}, \qquad /32/$$

$$a^{(\pm)}_{L,m} = \frac{(\gamma_L \pm \Delta\gamma_{L,m})\gamma_L}{\gamma_L^2 + 4\Delta\omega^2_{L,m}}, \quad b^{(\pm)}_{L,m} = \frac{4(\gamma_L \pm \Delta\gamma_{L,m})\Delta\omega_{L,m}}{\gamma_L^2 + 4\Delta\omega^2_{L,m}}.$$

Функция $R^{(+)}_{L,m}(\omega)$ описывает вклад симметричного промежуточного состояния $|\psi^{(+)}_m\rangle$, а функция $R^{(-)}_{Lm}(\omega)$ антисимметричного состояния $|\psi^{(-)}_m\rangle$.

Из /32/ и асимптотических формул /26/ вытекает, что, если расстояние между центрами велико ($x = k_0 R \gg 1$), в спектре излучения, как и следовало ожидать, остается лишь одна лоренцовская линия с частотой ω_0 и шириной γ_L, т.е. оба центра излучают независимо. В противоположном предельном случае $x \ll 1$ спектр состоит из двух неперекрывающихся линий одинаковой интенсивности, одна из которых имеет частоту $\omega_0 - \Delta\omega_{L,m}$ и ширину $4\gamma_L$, а другая - частоту $\omega_0 + \Delta\omega_{L,m}$ и ширину $2\gamma_L$. При этом можно пренебречь вкладом распада системы через состояние $|\psi^{(-)}_m\rangle$ и интерференционным искажением спектра*.

Если проекции спина возбужденных центров не равны друг другу ($m_1 \neq m_2$), спектр излучения определяется уже четырьмя промежуточными уровнями: $|\psi^{(\pm)}_{m_1}\rangle$ и $|\psi^{(\pm)}_{m_2}\rangle$.

§5. *Спиновая структура резонансного взаимодействия*

При произвольных спинах возбужденного и основного состояний матричные элементы оператора 2^L-польного взаимодействия атомов или ядер выражаются через введенные ранее функции $U^{(L)}_{|m|}(x)$. В представлении, отвечающем выбору оси квантования спина вдоль вектора $\vec{R}$ ($m = m_1 - m'_2 = m'_1 - m_2$),

$$\langle B_{m_1}(1)A_{m_2}(2)|\hat{V}^{(L)}|A_{m'_2}(1)B_{m'_1}(2)\rangle = \qquad /33/$$

$$= \hbar\gamma_L\, C^{s_B m_1}_{s_A m'_2 L m}\, C^{s_B m'_1}_{s_A m_2 L m}\, U^{(L)}_{|m|}(x),$$

* Строго говоря, при $R \ll \lambda$ на линию с частотой $\omega_0 - \Delta\omega_{L,m}$ и шириной $4\gamma_L$ накладывается, в соответствии с /32/, узкий пик, высота которого в два раза превышает высоту основного пика. Однако вклад узкого пика, соответствующего распаду антисимметричного состояния, в интегральную интенсивность линии исчезающе мал /имеет порядок величины $\gamma^{(-)}_{L,m}/\gamma_L \sim x^2 \ll 1$/.

где γ_L - вероятность 2^L-польного перехода $B \to A + \gamma$ в единицу времени. В частности, если спин возбужденного состояния равен нулю, а основного $L(s_B = 0, s_A = L)$, то сдвиги частот и изменения ширин коллективных возбужденных состояний типа /3/, выраженные в единицах γ_L, в $(2L+1)$ раз меньше, чем в рассмотренном выше случае $s_B = L$, $s_A = 0$.

С учетом /18/ и /33/, электромагнитное взаимодействие между возбужденным и невозбужденным центрами имеет общую структуру

$$\hat V = \hbar\gamma \hat f(x) \frac{e^{ix}}{x} \hat P_{AB} , \qquad /34/$$

где $\hat P_{AB}$ - обменный оператор, меняющий местами состояния A и B /6/, γ- радиационная ширина изолированного центра /при переходах смешанной мультипольности $\gamma = \sum_L \gamma_L$ /, $\hat f(x)$ - матрица в спиновом пространстве

центров A и B, содержащая полиномы степени $N \le 2(s_A + s_B)$ по переменной $1/x$. Так как собственные значения $\hat P_{AB}$ равны ± 1, коллективные квазистационарные состояния всегда симметричны или антисимметричны по отношению к перестановке $A \to B$. Они соответствуют определенному значению проекции суммарного спина системы $\hat{\vec S} = \hat{\vec s}_A + \hat{\vec s}_B$ на вектор $\vec R$, но при $s_A \ne 0$, $s_B \ne 0$, вообще говоря, не являются собственными состояниями оператора $\hat{\vec S}^2$. Исключение составляет случай $s_A = s_B = 1/2$ /см. ниже/.

Выпишем явный вид $\hat f(x)$ для чисто дипольных переходов $(\gamma = \gamma_1)$. При $s_B = 1$, $s_A = 0$ /6/

$$\hat f(x) = F(x) = D(x)(\hat{\vec S}\vec n)^2 , \qquad /35/$$

где $\vec n = \vec R/R$,

$$F(x) = xe^{-ix} U_0^{(1)}(x) = -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{i}{x}\right), \qquad /36/$$

$$D(x) = xe^{-ix}(U_1^{(1)}(x) - U_0^{(1)}(x)) = -\frac{3}{4}\left(1 + \frac{3i}{x} - \frac{3}{x^2}\right).$$

Если $s_B = 0$, $s_A = 1$, то

$$\hat f(x) = \frac{1}{3} F(x) + \frac{1}{3} D(x)(\hat{\vec S}\vec n)^2 . \qquad /35'/$$

В частности, в длинноволновом пределе ширины спектральных линий, согласно /35'/, равны $\gamma^{(+)}_{1,0} = \gamma^{(+)}_{1,1} = \frac{4}{3}\gamma_1$ и $\gamma^{(-)}_{1,0} = \gamma^{(-)}_{1,1} = \frac{2}{3}\gamma_1$.

Можно показать, что в случае $s_A = s_B = \frac{1}{2}$

$$\hat f(x) = \frac{1}{3}\{ F(x)[1 - 2(\hat{\vec S}\vec n)^2 + \hat{\vec S}^2] + 2D(x)[1 - (\hat{\vec S}\vec n)^2]\} . \qquad /37/$$

В *таблице* приведены собственные значения матрицы

S	M	$f_{SM}(x)$	$\omega^{(\pm)}_{1,SM}$ $(x \ll 1)$	$\gamma^{(+)}_{1,SM}$ $(x \ll 1)$	$\gamma^{(-)}_{1,SM}$ $(x \ll 1)$
1	± 1	$\frac{1}{3}F(x)$	$\omega_0 \mp \frac{1}{2}\frac{\gamma_1}{x^3}$	$\frac{4}{3}\gamma_1$	$\frac{2}{3}\gamma_1$
	0	$F(x) + \frac{2}{3}D(x)$	$\omega_0 \mp \frac{\gamma_1}{2x}$	$2\gamma_1$	$\frac{1}{6}\gamma_1 x^2$
0	0	$\frac{1}{3}F(x) + \frac{2}{3}D(x)$	$\omega_0 \pm \frac{\gamma_1}{x^3}$	$\frac{4}{3}\gamma_1$	$\frac{2}{3}\gamma_1$

/37/, отвечающие определенным значениям суммарного спина S и его проекции M, а также частоты и ширины спектральных линий при значениях $x = k_0 R \ll 1$. Заметим, что антисимметричный уровень с квантовыми числами $S = 1$, $M = 0$ при $R \ll 1/k_0 = \lambda$ является долгоживущим $(\gamma^{(-)}_{1,10} \ll \gamma_1)$.

Если центры не являются неподвижными, а частоты ν, характеризующие их движение, удовлетворяют условиям $\omega_0 \gg \nu \gg \gamma$, $\nu \ll c/R$, выражение /34/ следует рассматривать как оператор не только в спиновом, но и в координатном пространстве двух центров /6/. Ясно, что из-за наличия в /34/ экспоненты с мнимым показателем все коллективные эффекты должны исчезать, если длина волны фотона гораздо меньше линейных размеров областей пространственной локализации излучателей. В частности, заметное изменение времени жизни возбужденного ядра в кристалле в присутствии невозбужденных ядер того же типа имеет место лишь при условии $\lambda \gtrsim a_{кол.}$, где $a_{кол.}$ - амплитуда колебаний. Фактор подавления здесь такой же, как и для эффекта Мессбауэра. Аналогичная ситуация возникает и в случае двухатомных молекул с изомерными ядрами, свойства которых обсуждались в работе /6/.

Автор выражает благодарность В.Г.Барышевскому и М.И.Подгорецкому за интерес к работе и полезные замечания.

Литература

1. *R.H.Dicke. Phys.Rev., 93, 99, 1954.*
2. *М.И.Подгорецкий, И.И.Ройзен. ЖЭТФ, 39, 1473, 1960.*
3. *M.J.Stephen. J.Chem.Phys., 40, 669, 1964.*
4. *D.A.Hutchinson, F.T.Hameca. J.Chem.Phys., 41, 2006, 1964.*
5. *В.Л.Любошиц. ЖЭТФ, 52, 926, 1967.*
6. *В.Л.Любошиц. ЖЭТФ, 53, 1630, 1967.*
7. *J.W.Czarnic, P.R.Fontana. J.Chem.Phys., 50, 4071, 1969.*
8. *Ю.А.Вдовин, А.М.Ермаченко. Сб. Вопросы теории атомных столкновений, стр. 111, М., Атомиздат, 1970.*
9. *Д.Ф.Смирнов, И.В.Соколов, Е.Д.Трифонов. ЖЭТФ, 63, 2105, 1972.*
10. *R.H.Lehmberg. Phys.Rev., A2, 883, 1970; Phys.Rev., A2, 889, 1970.*
11. *F.T.Arrechi, E.Courtens. Phys.Rev., A2, 1730, 1970.*
12. *W.E.Rehler, J.H.Eberly., Phys.Rev., A3, 1735, 1971.*
13. *H.Morawitz. Phys.Rev., A7, 1148, 1973.*
14. *А.И.Ахиезер, В.Б.Берестецкий. Квантовая электродинамика, М., Наука, 1969.*
15. *Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский. Релятивистская квантовая теория, часть. 2, М., Наука, 1971.*
16. *В.Б.Берестецкий, Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский. Релятивистская квантовая теория, часть 1, М., Наука, 1968.*

Рукопись поступила в издательский отдел 29 сентября 1976 года.