

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

95-164

P3-95-164

В.И.Боднарчук, Л.С.Давтян, Д.А.Корнеев

ЭФФЕКТЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФАЗЫ
В НЕЙТРОННОЙ ОПТИКЕ

1995

Введение

В ставшей классической работе Халперна и Хольштейна [1] по прохождению нейтронов через ферромагнетики была предложена итерационная схема, позволяющая находить конечный вектор поляризации по начальному при прохождении через произвольно заданную конфигурацию магнитного поля. Эта итерационная схема лежит в основе обработки данных по прохождению нейтронов через различные неколлинеарные магнитные конфигурации и сегодня.

Возможен ли более общий взгляд на этот вопрос? Существуют ли закономерности поведения вектора поляризации, которые трудно усмотреть, оставаясь в рамках подхода Халперна-Хольштейна? Поиск ответов на эти вопросы приводит к необходимости детального анализа другой не менее знаменитой работы.

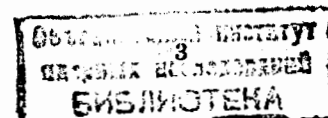
В 1984 году М. Берри опубликовал в "Proceedings of Royal Society" работу [2] под названием "Quantal phase factors accompanying adiabatic changes". История явления, обсуждаемого в этой работе, восходит к маятнику Фуко и опытам Саньяка с вращающимся интерферометром. Позднее, в работах Рытова, Владимирского и Панчатнама [3] по оптике световодов, обладающих анизотропией показателя преломления, было замечено и проанализировано влияние геометрии световода на результаты поляризационных экспериментов. Однако именно в этой работе Берри, в рамках квантовой механики, было в полной мере осознано то обстоятельство, что поведение системы с зависящими от времени (или координат) параметрами качественно отличается от поведения систем, для которых эти параметры фиксированы. Берри показал, что в пределе адиабатического изменения параметров системы общее изменение фазы волновой функции квантово-механической системы после возвращения к начальным значениям параметров отличается от динамической. Возникающая разность фаз может быть связана простым соотношением с телесным углом, очерчиваемым за время циклической эволюции вектор-параметром $\vec{R}(t)$ системы (в случае нейтронов – вектором напряженности магнитного поля $\vec{H}(t)$). Значение этой фазы не зависит в пределе от длительности рассматриваемой циклической эволюции и может приводить к экспериментально наблюдаемым эффек-

там. Прошедшие после этой знаменательной работы десять лет были отмечены многочисленными экспериментальными и теоретическими работами, посвященными различным проявлениям т. н. геометрической, или топологической фазы [4, 5]. Ааронов и Анандан доказали, что геометрическая фаза возникает и в случае неадиабатической эволюции [6]. Более того, эти рассуждения могут быть обобщены также на случаи нециклической, неунитарной и неабелевой эволюций [7].

Соответствующий анализ классических систем был проведен Ханни [8]: в механических системах с изменяющимися во времени параметрами наблюдается дополнительное угловое смещение – т. н. угол Ханни. С точки зрения классической механики причина этого в том, что наряду с адиабатическим инвариантом действия существует неинвариантная переменная – угол. Впоследствии Берри показал [9], что введенная им дополнительная фаза волновой функции и угол Ханни в квазиклассическом приближении совпадают.

Движение нейтрона в магнитном поле, сопровождающееся соответствующей эволюцией его спина, представляет одну из наиболее удобных для наблюдения эффектов геометрической фазы физических ситуаций. Эта задача примечательна и с теоретической точки зрения, т. к. соответствующее уравнение Шредингера точно решается в важном частном случае прецессирующего магнитного поля [10]. Необходимо подчеркнуть, что в контексте геометрической фазы под эволюцией мы будем подразумевать поведение нейтронного спина при наличии не явной (через параметры) зависимости гамильтониана от времени. Реализовать такую зависимость можно, например, во время-пролетных экспериментах при наличии неколлинеарных (геликоидальных) магнитных полей. Вместо простой картины обычно рассматриваемых состояний с положительной и отрицательной ориентацией спина в однородном и стационарном магнитном поле в случае эволюции мы имеем дело с поведением, качественно отличным по сложности.

Эксперименты Биттера, Дубберса [11], Ричардсона [12] продемонстрировали принципиальную возможность измерения геометрических фаз в нейтронной оптике. В экспериментах Вейнфуртера и Бадурека [13] наблюдались специфические, обусловленные наличием геометрической фазы, эффекты: подавление модуляций в измерениях компонент вектора поляризации и линейное смещение измеряемых спектров по



параметру, характеризующему нециклическую эволюцию. Вместе с тем анализ времяпролетного эксперимента [14] показал, что модель прецессирующего поля недостаточна для описания эффектов геометрической фазы в случае произвольных (сложных) конфигураций магнитного поля и необходима разработка более общего метода вычисления фазы.

В этой работе мы ограничимся рассмотрением эффектов, связанных с эволюцией в макрорегионах, когда спин движется в магнитном поле внешнего макроскопического источника или в некотором усредненном поле при движении в конденсированной среде. Эволюция в микрополях (например, магнитное поле, создаваемое электронной оболочкой атома), которые сами могут изменяться в зависимости от характера движения нейтрона, заслуживает отдельного рассмотрения. Отметим здесь только, что геометрическая фаза с необходимостью возникает при анализе целого ряда чисто квантовых явлений: эффекта Яна-Теллера, квантового эффекта Холла, эффекта Ааронова-Бома и других.

1. Фаза Берри

В теории возмущений предполагается, что гамильтониан квантовой системы может быть представлен как сумма некоторого невозмущенного гамильтониана \hat{H}_0 и возмущения \hat{V} :

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}.$$

Явная зависимость гамильтониана от времени обычно связывается с зависимостью от времени возмущения:

$$\hat{V} = \hat{V}(t).$$

Во времяпролетных экспериментах мы имеем дело с движением нейтрона через магнитное поле, напряженность которого может изменяться от одной точки траектории к другой как по величине, так и по направлению. Это обстоятельство не отражается на характере локального взаимодействия (спина нейтрона с магнитным полем), но

приводит к неявной, через компоненты напряженности магнитного поля (вектор-параметра $\vec{R}(t)$), зависимости гамильтониана от времени:

$$\hat{H}(\vec{R}(t)) = \hat{H}_0(\vec{R}(t)).$$

Как описывать поведение нейтрона в этом случае? Что известно вообще о системах с неявной зависимостью от времени?

Из адиабатической гипотезы Эренфеста [15] следует, что такая квантовая система после циклической эволюции вектор-параметра не должна отличаться от системы в начальном состоянии при соблюдении условия адиабатичности эволюции. В чем ценность работы Берри? Он указал на то, что это не совсем так; в общем случае волновая функция системы при циклическом изменении параметров приобретает дополнительный нетривиальный фазовый множитель. Действительно, для любой квантовой системы, в частности, с зависящими от времени параметрами, формально имеет место задача на собственные значения гамильтониана — система, по крайней мере, локально во времени описывается "стационарным" уравнением Шредингера

$$\hat{H}(\vec{R}(t))\psi_n(q, \vec{R}(t)) = E_n(\vec{R}(t))\psi_n(q, \vec{R}(t)).$$

При этом полная волновая функция

$$\Psi_n(q, \vec{R}(t), t) = \psi_n(q, \vec{R}(t)) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(\tau) d\tau}$$

должна удовлетворять временному уравнению Шредингера:

$$i\hbar \dot{\Psi}_n = \hat{H} \Psi_n.$$

В результате на уровне матричных элементов мы приходим к т. н. условию параллельного переноса:

$$\left(\psi_n(q, \vec{R}(t)), \frac{\partial}{\partial t} \psi_n(q, \vec{R}(t)) \right) = 0.$$

Удовлетворить этому условию можно только воспользовавшись тем обстоятельством, что фаза волновой функции еще произвольна. Заменив $\psi_n \rightarrow \tilde{\psi}_n e^{i\gamma_n}$, имеем

$$i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi}_n(q, \vec{R}(t)) e^{i\gamma_n} + i \left(\frac{\partial}{\partial t} \gamma_n \right) \tilde{\psi}_n e^{i\gamma_n} \right) = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} \gamma_n = i \left(\tilde{\psi}_n(q, \vec{R}(t)), \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi}_n(q, \vec{R}(t)) \right).$$

Определенная таким образом γ_n и есть геометрическая фаза, или фаза Берри.

Однако для произвольной зависимости параметров от времени цепочка введенных выше "стационарных" уравнений Шредингера не разрешима. Поэтому реальное описание таких систем связано с некоторыми дополнительными предположениями о характере изменения параметров, дающими, например, возможность применять методы нестационарной теории возмущений. Важным частным случаем является т.н. адiabатическое возмущение, когда в течение эволюции система остается в состоянии с фиксированным квантовым числом n (см. ниже).

Из работы Берри следует, что волновую функцию эволюционирующей квантовой системы с учетом возможных геометрических фаз необходимо записывать в следующем, наиболее общем виде:

$$\Psi(q, \vec{R}(t), t) = \sum_n C_n(\vec{R}(t), t) \psi_n(q, \vec{R}(t)) = \sum_n e^{i\alpha_n} C_n(\vec{R}(0), 0) \psi_n(q, \vec{R}(t)), \quad (1)$$

где $\psi_n(q, \vec{R}(t))$ – собственные состояния гамильтониана $H(\vec{R}(t))$ и

$$\alpha_n = \int_0^t \frac{\partial \alpha_n}{\partial \tau} d\tau + \int_{\vec{R}(0)}^{\vec{R}(t)} \vec{\nabla}_{\vec{R}} \alpha_n d\vec{R}.$$

Эти величины – разности фаз коэффициентов разложения в начальный и произвольный моменты времени, т.н. полная фаза, или фаза Панчаратнама, – определяют характер эволюции системы.

Первый интеграл в экспоненте представляет собой знаковую динамическую фазу волновой функции:

$$\beta_n = \int_0^t \frac{\partial \alpha_n}{\partial \tau} d\tau = -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(\tau) d\tau. \quad (2)$$

Однако ниже нас будет интересовать в основном второй (криволинейный) интеграл:

$$\gamma_n = \int_{\vec{R}(0)}^{\vec{R}(t)} \vec{\nabla}_{\vec{R}} \alpha_n d\vec{R}. \quad (3)$$

По сути, именно эта величина была введена в [2].

В целом волновая функция системы, гамильтониан которой неявно зависит от времени, изменяется не только во времени, но и в параметрическом пространстве. При этом, в принципе, если это пространство имеет геометрические особенности (кривизну, кручение, полюсы, не является односвязным), то последние могут влиять на поведение системы: в тех случаях, когда это имеет место, говорят, что система обладает (нетривиальной) голономией. В частности, если предположить, что эволюция системы происходит в полях, изменяющихся только по направлению, то рассмотрение возможных эволюций системы сводится к анализу свойства голономности соответствующих траекторий, очерчиваемых вектор-параметром $\vec{R}(t)$ на единичной сфере возможных направлений векторной величины – сферическом Пуанкаре.

Подставим разложение (1) в уравнение Шредингера (предполагается, что спектр $E_n(t)$ не вырожден):

$$i\hbar \sum_m C_m e^{i\gamma_m - \frac{i}{\hbar} \int_0^t E_m(\tau) d\tau} \left\{ \dot{\psi}_m + i\psi_m \dot{\gamma}_m - \frac{i}{\hbar} \psi_m E_m \right\} = \\ = \hat{H}(\vec{R}(t)) \sum_m C_m \psi_m e^{i\gamma_m - \frac{i}{\hbar} \int_0^t E_m(\tau) d\tau},$$

или

$$i\hbar \sum_m C_m e^{i\gamma_m - \frac{i}{\hbar} \int_0^t E_m(\tau) d\tau} \left\{ \dot{\psi}_m + i\psi_m \dot{\gamma}_m \right\} = 0.$$

Отсюда, если воспользоваться ортогональностью состояний ψ_m , то получим следующую систему уравнений для геометрических фаз:

$$\dot{\gamma}_n = \frac{i}{C_n} \sum_m C_m e^{i(\gamma_m - \gamma_n) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t (E_m(\tau) - E_n(\tau)) d\tau} (\psi_n, \dot{\psi}_m), \quad (4)$$

где $C_n = C_n(\vec{R}(0), 0) \neq 0$. В интересующем нас случае эволюций спина нейтрона индексы m и n принимают два значения: $+$ и $-$.

Так как зависимость от времени неявная, то эта система уравнений может быть преобразована к виду

$$\vec{\nabla}_{\vec{R}} \dot{\gamma}_n = \frac{i}{C_n} \sum_m C_m e^{i(\gamma_m - \gamma_n) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t (E_m(\tau) - E_n(\tau)) d\tau} (\psi_n, \vec{\nabla}_{\vec{R}} \psi_m). \quad (5)$$

Возникающие справа векторные поля

$$\vec{A}_{nm} = i(\psi_n, \vec{\nabla}_{\vec{R}} \psi_m)$$

принято называть полями, индуцированными $\psi_n(q, \vec{R}(t))$.

Заметим, что представление коэффициентов разложения (1) в виде

$$e^{i\alpha_n} C_n(\vec{R}(0), 0)$$

усложнило вид стандартной линейной системы уравнений, получаемой для эволюционных коэффициентов в методе Дирака. Однако при анализе конкретной задачи могут оказаться полезными как стандартное представление, так и представление через фазовые экспоненты.

Проанализируем адиабатическую эволюцию. Она соответствует условию

$$(\psi_n, \dot{\psi}_m) = 0, \quad n \neq m. \quad (6)$$

Следовательно, в адиабатическом пределе уравнения (4) сильно упрощаются и принимают вид

$$\dot{\gamma}_n = i(\psi_n, \dot{\psi}_n), \quad (7)$$

или

$$\vec{\nabla}_{\vec{R}} \dot{\gamma}_n = i(\psi_n, \vec{\nabla}_{\vec{R}} \psi_n) = \vec{A}_{nn}. \quad (8)$$

Пусть система совершает адиабатическую эволюцию вдоль замкнутого контура C в пространстве параметров, то есть $\vec{R}(T_C) = \vec{R}(0)$, где

$T_C \rightarrow \infty$ — время эволюции. Тогда изменение фазы γ_n за время T_C будет определяться выражением

$$\Delta \gamma_n \rightarrow \gamma_n = i \oint_C \vec{A}_{nn} d\vec{R}. \quad (9)$$

Если контур не содержит особенностей, то, используя теорему Стокса, можно записать выражение для фазы в виде

$$\gamma_n = \int_{\Sigma_C} \text{rot} \vec{A}_{nn} d\vec{s}, \quad (10)$$

где $d\vec{s}$ — элемент ориентированной поверхности Σ_C , натянутой на контур C . Характерной чертой адиабатической эволюции является то, что изменение фазы в процессе циклической эволюции не зависит от времени, за которое эта эволюция была совершена, а определяется исключительно геометрией области параметрического пространства, ограниченного замкнутым контуром C ; в этом пределе $\text{rot} \vec{A}_{nn} \rightarrow \text{const}$ и

$$\gamma_n \sim \int d\vec{s} = \Omega,$$

где Ω — телесный угол, очерчиваемый вектор-параметром \vec{R} . Для волновой функции нейтрона дополнительные фазы для двух спиновых состояний (\pm) выражаются через телесный угол, очерчиваемый вектором магнитного поля \vec{H} , следующим образом [2]:

$$\gamma_{\pm} = \mp \frac{1}{2} \Omega, \quad (11)$$

или

$$\gamma_+ = \frac{1}{2}(4\pi - \Omega), \quad \gamma_- = \frac{1}{2}\Omega. \quad (12)$$

Изменение направления обхода контура соответствует переходу от внутреннего телесного угла к внешнему, дополняющему до 4π :

$$\gamma_n \rightarrow \tilde{\gamma}_n \sim 4\pi - \Omega.$$

Итак, последовательный анализ адиабатического предела приводит к качественно отличной картине циклической эволюции; система возвращается в состояние, отличающееся от начального соответствующей геометрической фазой.

В нейтронно-оптических задачах мы имеем дело в основном с двумя векторными величинами: напряженностью магнитного поля \vec{H} и прецессирующим вокруг него вектором поляризации $\vec{P} = \langle \vec{\sigma} \rangle$.

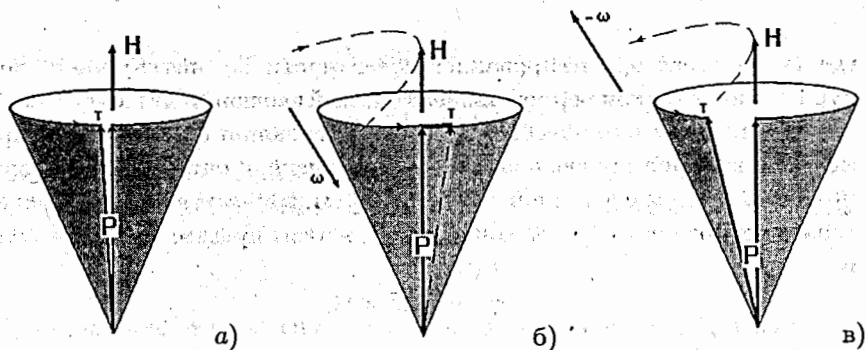


Рис. 1. Характерное поведение вектора поляризации, приводящее к возникновению геометрических фаз на уровне волновых функций: а) обычная прецессия вектора поляризации вокруг вектора напряженности магнитного поля; б) поведение вектора поляризации при наличии прецессии вектора напряженности магнитного поля; в) поведение вектора поляризации при обратной прецессии вектора напряженности

В случае описанной выше адиабатической эволюции, когда ось квантования достаточно медленно меняет свое направление, параллельная полю компонента вектора поляризации сохраняется. Однако направление компоненты, перпендикулярной оси квантования (прецессирующей вокруг оси), из-за движения последней, в общем случае, в конце циклической эволюции не совпадает с начальным, даже если время эволюции

вектор-параметра кратно периоду прецессии (см. рис. 1).

Известно, что решение задачи о спине нейтрона в однородном магнитном поле допускает два собственных состояния с определенной проекцией спина на выделенную ось:

$$\Psi_+(\theta, \phi) = e^{-i\omega_L t} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \cdot e^{-i\phi} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$\Psi_-(\theta, \phi) = e^{i\omega_L t} \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \cdot e^{-i\phi} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где θ и ϕ — соответственно полярный и азимутальный углы оси квантования (\vec{H}) в выбранной системе координат, $\omega_L = 2\mu H/\hbar$ — частота ларморовской прецессии, μ — абсолютное значение магнитного момента нейтрона, $H = |\vec{H}|$.

Как отмечалось выше, решение задачи об эволюции спина при произвольных движениях вектора напряженности магнитного поля требует разработки общих методов (численного) интегрирования. Однако поведение спина нейтрона в магнитном поле уникально тем, что при переходе от (13), (14) к рассмотрению решений в прецессирующем магнитном поле соответствующее временное уравнение Шредингера (уравнение Паули), как известно, также точно решается [10].

2. Прецессирующее магнитное поле

Рассмотрим с точки зрения геометрической фазы поведение спина нейтрона в магнитном поле, которое, оставаясь постоянным по величине, равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг оси z , образуя с ней угол θ :

$$H_x = H \sin \theta \cos(\omega t + \phi),$$

$$H_y = H \sin \theta \sin(\omega t + \phi),$$

$$H_z = H \cos \theta.$$

Уравнение Паули имеет вид

$$i\hbar\dot{\Psi} = 2\mu\vec{H}\hat{s}\Psi.$$

Опуская детали решения, приведем вид волновой функции:

$$\Psi(t) = C_+\Psi_+(t) + C_-\Psi_-(t), \quad |C_+|^2 + |C_-|^2 = 1, \quad (15)$$

$$\Psi_+(t) = e^{-i(\Lambda-\omega)t/2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\Theta}{2} e^{-i\Phi} \\ \sin \frac{\Theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$$\Psi_-(t) = e^{i(\Lambda+\omega)t/2} \begin{pmatrix} -\sin \frac{\Theta}{2} e^{-i\Phi} \\ \cos \frac{\Theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где $\Phi = \omega t + \phi$,

$$\cos \frac{\Theta}{2} = \sqrt{\frac{\Lambda + \omega_L \cos \theta - \omega}{2\Lambda}}, \quad (18)$$

$$\Lambda = \sqrt{(\omega - \omega_L \cos \theta)^2 + \omega_L^2 \sin^2 \theta}. \quad (19)$$

Отметим, что состояния Ψ_{\pm} ортогональны:

$$(\Psi_+, \Psi_-) = 0,$$

и соответствуют состояниям с проекцией спина на ось z :

$$(\Psi_{\pm}, s_z \Psi_{\pm}) = \pm \frac{1}{2} \cos \Theta.$$

Чему равна в этой задаче геометрическая фаза?

Компоненты векторов $\vec{A}_{\pm\pm}$ в сферических координатах равны:

$$\vec{A}_{++} = i(\psi_+, \vec{\nabla}\psi_+) = \left(0, 0, \frac{1}{2H \sin \theta} \cos^2 \frac{\Theta}{2}\right), \quad (20)$$

$$\vec{A}_{--} = i(\psi_-, \vec{\nabla}\psi_-) = \left(0, 0, \frac{1}{2H \sin \theta} \sin^2 \frac{\Theta}{2}\right). \quad (21)$$

Далее, согласно (10),

$$\gamma_{\pm\pm} = \int_{\Sigma_c} \text{rot}(\vec{A}_{\pm\pm}) d\vec{s}. \quad (22)$$

Вычислив роторы

$$\text{rot}\vec{A}_{\pm\pm} = \left(\mp \frac{1}{2H^2} \left(\frac{\sin \Theta}{\sin \theta}\right) \frac{d\Theta}{d\theta}, 0, 0\right), \quad (23)$$

получим для $\gamma_{\pm\pm}$ следующие выражения:

$$\gamma_{\pm\pm} = \mp \frac{1}{2} [\Omega(\Theta) - \Omega(\Theta_0)]. \quad (24)$$

Здесь $\Omega(\Theta) = 2\pi(1 - \cos \Theta)$ и

$$\Theta(\omega, \theta) = \arccos\left(\frac{\omega_L \cos \theta - \omega}{\Lambda}\right), \quad (\Theta_0 = \Theta(\omega, 0)). \quad (25)$$

Выпишем функцию $\Omega(\Theta_0)$ в явном виде:

$$\Omega(\Theta_0) = \begin{cases} 0, & \omega_L > \omega, \\ 4\pi, & \omega_L \leq \omega. \end{cases} \quad (26)$$

Выражение (24) является обобщением фазы Берри для прецессии с конечной угловой скоростью ω , когда условие адиабатичности $\omega/\omega_L \ll 0$ не соблюдается. При $\omega/\omega_L \rightarrow 0$ она совпадает с известным выражением (11):

$$\gamma_{\pm} = \mp \frac{1}{2} \Omega(\theta).$$

Поэтому именно $\gamma_{\pm\pm}$ было бы правильно называть неадиабатической фазой Берри. Однако в литературе часто этот термин употребляют по отношению к рассматриваемой ниже полной неадиабатической геометрической фазе (фазе Ааронова – Анандана). Чтобы вычислить полную геометрическую фазу в неадиабатике, необходимо в дополнение к (20), (21) определить недиагональные векторные поля:

$$\vec{A}_{+-} = i(\psi_+, \vec{\nabla}\psi_-) = \left(0, 0, -\frac{1}{2H \sin \theta} \sin \frac{\Theta}{2} \cos \frac{\Theta}{2}\right), \quad (27)$$

$$\vec{A}_{-+} = \vec{A}_{+-}, \quad (28)$$

подставить найденные матричные элементы в (4) и решить соответствующую систему двух дифференциальных уравнений первого порядка. Система этих уравнений для прецессирующего поля разрешима, но мы здесь не будем останавливаться на ходе решения. Получим выражения для полных неадиабатических геометрических фаз, основываясь на подходе Ааронова – Анандана.

3. Фаза Ааронова–Анандана

Как показали Ааронов и Анандан [6], существует метод непрямого вычисления неадиабатической геометрической фазы. Вернемся к вводимым рассуждениям в пункте 1. Вместо предположения о прохождении через цепочку "стационарных" состояний, рассмотрим квантовую систему, гамильтониан которой обладает свойством цикличности:

$$\hat{H}(T) = \hat{H}(0).$$

Тогда волновая функция в момент времени T с точностью до фазы совпадает с начальной волновой функцией:

$$\Psi(T) = e^{i\alpha} \Psi(0).$$

Представим волновую функцию в виде

$$\Psi(t) = e^{i\alpha(t)} \tilde{\Psi}(t),$$

$$\tilde{\Psi}(T) = \tilde{\Psi}(0) = \Psi(0).$$

Подставив эту волновую функцию в уравнение Шредингера, получим

$$-\frac{\partial \alpha}{\partial t} = -i(\tilde{\Psi}, \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Psi}) + \frac{1}{\hbar}(\tilde{\Psi}, \hat{H} \tilde{\Psi}),$$

или после интегрирования от 0 до T имеем

$$\gamma = i \int_0^T (\tilde{\Psi}, \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{\Psi}) d\tau = \alpha + \frac{1}{\hbar} \int_0^T (\tilde{\Psi}, \hat{H} \tilde{\Psi}) d\tau. \quad (29)$$

Второе слагаемое в правой части есть динамическая фаза β волновой функции Ψ , γ – есть неадиабатическая геометрическая фаза Ааронова – Анандана. Заметим, что этот подход легко обобщается и на случай нециклических эволюций [13].

Подход Ааронова – Анандана дает возможность вычислить геометрическую фазу в общем случае прецессии с произвольным ω .

Волновые функции (16), (17) обладают свойством цикличности. Действительно, нетрудно убедиться, что

$$\Psi_{\pm}(T) = e^{i\pi(1 \mp \frac{\Lambda}{\omega})} \Psi_{\pm}(0), \quad (30)$$

где $T = 2\pi/\omega$ – период эволюции. Следовательно, общее изменение фазы к моменту времени T для этих функций

$$\alpha_{\pm} = \pi(1 \mp \frac{\Lambda}{\omega}). \quad (31)$$

Интегрируя выражение для динамической фазы

$$\beta_{\pm} = -\frac{1}{\hbar} \int_0^T (\Psi_{\pm}, H \Psi_{\pm}) d\tau,$$

используя (16), (17), получим

$$\beta_{\pm} = \pm \frac{\pi \omega_L}{\Lambda \omega} (\omega \cos \theta - \omega_L) = \mp \frac{\pi}{\omega} (\Lambda + \omega \cos \Theta). \quad (32)$$

Разность фаз α и β дает выражение неадиабатической геометрической фазы Ааронова – Анандана для каждой из функций Ψ_{\pm} :

$$\gamma_{\pm} = \alpha_{\pm} - \beta_{\pm} = \pi(1 + \cos \Theta) = 2\pi - \frac{1}{2}\Omega(\Theta), \quad (33)$$

$$\gamma_- = \alpha_- - \beta_- = \pi(1 - \cos \Theta) = \frac{1}{2}\Omega(\Theta). \quad (34)$$

Сравнивая (33), (34) и (24), мы приходим к заключению, что фаза Ааронова - Анандана для прецессирующего поля не совпадает с $\gamma_{\pm\pm}$ (неадиабатической фазой Берри). Разность этих двух фаз может быть записана в виде

$$\delta_+ = \gamma_+ - \gamma_{++} = 2\pi - \frac{1}{2}\Omega(\Theta_0), \quad (35)$$

$$\delta_- = \gamma_- - \gamma_{--} = \frac{1}{2}\Omega(\Theta_0). \quad (36)$$

Как влияет геометрическая фаза на поляризацию нейтронов при прохождении прецессирующего поля?

Вычислим компоненты вектора конечной поляризации - поляризации в момент времени $T = 2\pi/\omega$. Для простоты положим коэффициенты смешивания в (15) равными $(C_+, C_-) = (1/\sqrt{2}, i/\sqrt{2})$ и $\phi = 0$.

Получим

$$P_x = -\cos \Theta \sin(\alpha_- - \alpha_+), \quad (37)$$

$$P_y = \cos(\alpha_- - \alpha_+), \quad (38)$$

$$P_z = \sin \Theta \sin(\alpha_- - \alpha_+). \quad (39)$$

Анализ поведения фаз волновых функций и графики вектора конечной поляризации в широком интервале значений длины волны нейтрона

$$\lambda(\text{Å}) = 3970 \cdot T(s)/L(m) = 3970 \cdot 2\pi/L\omega$$

(L и T - расстояние и время пролета нейтрона через неколлинеарное магнитное поле) и при различных значениях угла наклона (полярного угла) θ магнитного поля к оси прецессии z приведены в приложении.

Рассмотрим нашу задачу во вращающейся вокруг оси z с частотой ω_e , близкой к частоте прецессии поля ω , системе координат (система Раби). Известно, что решение задачи о спине нейтрона в такой системе координат сводится к введению эффективного магнитного поля \vec{H}_e с компонентами

$$(H_e)_x = H \sin \theta \cos((\omega - \omega_L)t + \phi),$$

$$(H_e)_y = H \sin \theta \sin((\omega - \omega_L)t + \phi),$$

$$(H_e)_z = H \cos \theta - \frac{\hbar\omega_e}{2\mu} = H_e \cos \theta_e,$$

где

$$H_e = |\vec{H}_e| = \sqrt{H^2 \sin^2 \theta + (H \cos \theta - \frac{\hbar\omega_e}{2\mu})^2}.$$

Ларморовская частота прецессии вокруг этого эффективного поля ω_L^e и угол θ_e его наклона относительно оси z равны

$$\omega_L^e = \frac{2\mu}{\hbar\omega_e} H_e = \sqrt{\omega_L^2 \sin^2 \theta + (\omega_L \cos \theta - \omega_e)^2},$$

$$\theta_e = \arccos\left(\frac{\omega_L \cos \theta - \omega_e}{\omega_L^e}\right).$$

Сравнивая эти выражения с (19) и (25), имеем в пределе $\omega - \omega_e \rightarrow 0$

$$\omega_L^e \rightarrow \Lambda,$$

$$\theta_e \rightarrow \Theta(\omega, \theta).$$

Волновые функции при этом имеют асимптотическое представление, аналогичное (16) и (17):

$$\Psi_+^e(t) = e^{-i(\Lambda_e - (\omega - \omega_e))t/2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\Theta}{2} e^{-i\Phi_e} \\ \sin \frac{\Theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (40)$$

$$\Psi_-^e(t) = e^{i(\Lambda_e + (\omega - \omega_e))t/2} \begin{pmatrix} -\sin \frac{\Theta}{2} e^{-i\Phi_e} \\ \cos \frac{\Theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (41)$$

где $\Phi_e = (\omega - \omega_e)t + \phi$,

$$\begin{aligned} \Lambda_e &= \sqrt{(\omega - \omega_e - \Lambda \cos \Theta)^2 + \Lambda^2 \sin^2 \Theta} \approx \\ &\approx \Lambda \left[1 - \frac{\omega - \omega_e}{\Lambda} \cos \Theta + O\left(\frac{(\omega - \omega_e)^2}{\Lambda^2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Задача становится формально адиабатической. Как следствие, для полных фаз за цикл $T = 2\pi/(\omega - \omega_e)$ имеем

$$\alpha_{\pm} = ((\omega - \omega_e) \mp \Lambda_e)t/2 \approx \pi \mp \frac{\pi\Lambda}{\omega - \omega_e} \pm \pi \cos \Theta.$$

Соответственно геометрические фазы в этой системе координат равны

$$\gamma_{\pm} = \mp \frac{1}{2}\Omega(\Theta). \quad (42)$$

Это обстоятельство означает, что фазы Ааронова - Анандана (33), (34) для прецессирующего поля совпадают с фазами Берри (42) во вращающейся системе координат.

4. Измерения геометрической фазы

Посмотрим на проблему геометрической фазы с точки зрения возможности ее наблюдения в нейтронно-оптических экспериментах. Прежде всего обратим внимание на то, что вообще любая фаза волновой функции в наблюдаемых величинах проявляется как аргумент некоторой экспериментально измеряемой функции, которая может зависеть кроме фазы и от других параметров (например, от параметров, характеризующих начальное состояние поляризации пучка). Поэтому, как и в обычном фазовом анализе, можно ставить вопрос только о косвенном измерении геометрической фазы, дающей, наряду с динамической фазой, вклад в непосредственно наблюдаемые величины. В экспериментах с поляризованными нейтронами такими величинами являются компоненты конечного вектора поляризации. В этих экспериментах применяют методику „spin-rotation”, которая заключается в том, что в начальной точке траектории нейтрона вектор поляризации направляется перпендикулярно магнитному полю, а в конечной точке, на основе измерения проекции вектора поляризации на одну из осей в плоскости, перпендикулярной полю, может быть определена полная фаза волновой функции.

Разделение полной фазы на динамическую и геометрическую части основано на некоторых дополнительных соображениях. В частности,

для адиабатической эволюции спина при пролете нейтроном участка L в неколлинеарном (как и в коллинеарном) поле динамическая фаза определяется, согласно (32), выражением

$$\beta = A \frac{2\pi}{\omega} = AT,$$

где A пропорциональна среднему значению модуля магнитного поля $\langle |\vec{H}| \rangle$, действующему на спин нейтрона за время пролета $T = L/v$ (v — скорость нейтрона), или, поскольку $v \sim 1/\lambda$, динамическая фаза прямо пропорциональна длине волны нейтрона:

$$\beta = A'\lambda.$$

При этом измеряемые компоненты вектора поляризации есть, как и (37)-(39), синусы или косинусы от разности полных фаз $\Delta\alpha$. О геометрическом вкладе

$$\Delta\gamma = const$$

в полную фазу, используя анализ поляризации и метод времени пролета на полихроматическом пучке, можно судить по сдвигу фазы в осциллирующей зависимости $P_i(\lambda)$:

$$P_i \sim \cos(\Delta\alpha) = \cos(\Delta\beta + \Delta\gamma) = \cos(A'\lambda + \Delta\gamma).$$

(см. приложение). Если же анализ поляризации проводить на монохроматическом пучке нейтронов ($\lambda = const$), то адиабатическую фазу Берри можно выделить, построив зависимость полной фазы от среднего значения магнитного поля на контуре ($A' \sim \langle \vec{H} \rangle$), сохраняя при этом геометрию контура неизменной при каждом значении $\langle \vec{H} \rangle$. Именно эта методика была использована Биттером и Дубберсом в 1987 году в первом эксперименте по измерению фазы Берри с помощью монохроматических поляризованных нейтронов на реакторе института Лауэ - Ланжевена [11]. На рисунке 2 приведены схема установки и полученная Биттером и Дубберсом зависимость поляризации и полной фазы от силы тока, пропускаемого через геликоидальную катушку. Были использованы два соленоида: геликоидальный, для вращения вектора магнитного поля вдоль траектории нейтрона, и коаксиальный ему, для компоненты поля вдоль траектории. Этот эксперимент продемонстрировал справедливость закона равенства фазы

Берри телесному углу, описываемому геликоидальным магнитным полем. Примечательно, что измерения полной фазы в неадиабатической области в рамках этого метода позволяют наблюдать фазы, кратные 2π (см. рис. 2б).

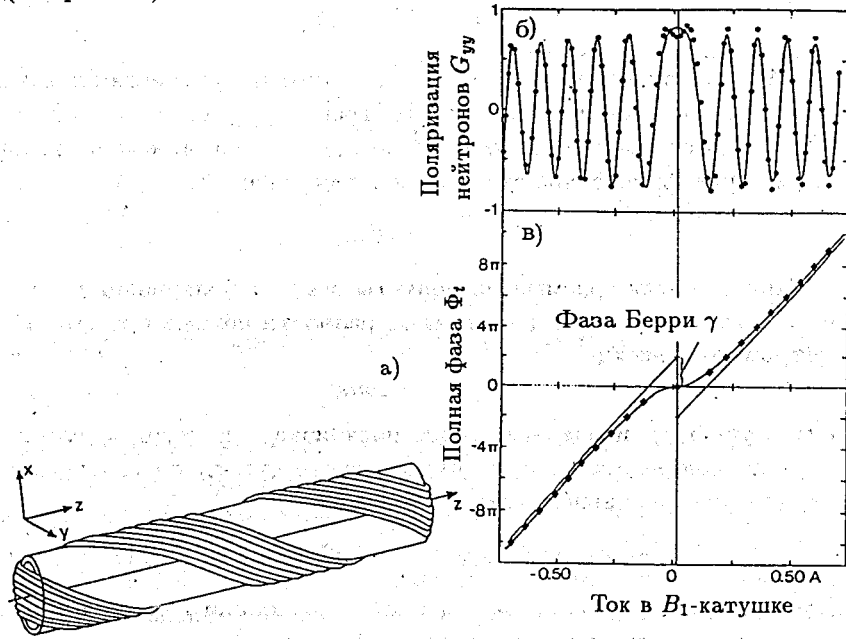


Рис. 2. Эксперимент Биттера и Дубберса.

а) Геликоидальная катушка для правовращающегося магнитного поля B_1 . Нейтронный пучок направлен вдоль оси z . Соленоид аксиального поля не показан. б) Зависимость перпендикулярной полю компоненты вектора поляризации от параметра адиабатичности V_1 . в) Наблюдаемый и вычисленный фазовый сдвиг Φ_i .

Мы опустим здесь обсуждение экспериментов Ричардсона [12], а также Вейнфуртера и Бадурека [13], отсылая читателя непосредственно к оригинальным публикациям. Отметим только, что эти работы подтвердили принципиальную возможность наблюдения геометрических эффектов в нейтронно-оптических экспериментах.

Обсудим недавний эксперимент, проведенный в ЛНФ ОИЯИ [14]. В отличие от предыдущих экспериментов измерения фазы Берри на полихроматическом пучке от реактора ИБР-2 методом времени пролета с экспериментальной точки зрения предпочтительны, поскольку не требуют изменения величины магнитного поля и свободны от неконтролируемых изменений геометрии поля. Стационарная конфигурация магнитного поля (контур), созданная вдоль траектории пролета нейтронов, изображена на рис. 3а.

Измеряемая компонента вектора поляризации с учетом конкретных параметров эксперимента имеет вид

$$P = a \cos(\Delta\beta(\lambda) \pm \Delta\gamma(\lambda)) + b. \quad (43)$$

Сегодня постановка задачи об экспериментальном определении неадиабатической фазы $\Delta\gamma(\lambda)$ является корректной только для случая равномерно прецессирующих магнитных полей с постоянной амплитудой. На основе точных решений уравнения Паули могут быть получены точные формулы для $\Delta\gamma$ и $\Delta\beta$ (см. (32)–(34)). Эти выражения, подставленные в (43), позволили провести подгонку экспериментальных данных. Параметры подгонки: среднее значение поля $\langle \vec{H} \rangle$, половина угла раствора конуса θ , параметры a, b . В обсуждаемом эксперименте измеряемый спектр $P(\lambda)$ содержал как область глубокой неадиабатики $1 \text{ \AA} < \lambda < 2 \text{ \AA}$ (параметр адиабатичности $\omega_L/\omega \ll 1$), так и область слабой неадиабатики $2 \text{ \AA} < \lambda < 7 \text{ \AA}$ ($\omega_L/\omega \sim 1$). Результаты подгонки экспериментальных данных на участке $2 \text{ \AA} < \lambda < 7 \text{ \AA}$ приведены на рисунке 3б. При увеличении λ зависимость $\Delta\gamma(\lambda)$ выходит на постоянное значение, которое соответствует адиабатическому пределу Берри, наступающему в области $\lambda > 20 \text{ \AA}$. Асимптотическое по параметру ω/ω_L значение $\Delta\gamma$, получаемое из подгонки на основе модели прецессирующего поля, отличается от значения телесного угла Ω , измеренного магнитометром, на величину $\delta \approx 1.43$, т.е. описание сложного контура моделью прецессирующего поля в широком интервале значений ω/ω_L приводит к "модельному" смещению оценки величины адиабатической фазы Берри.

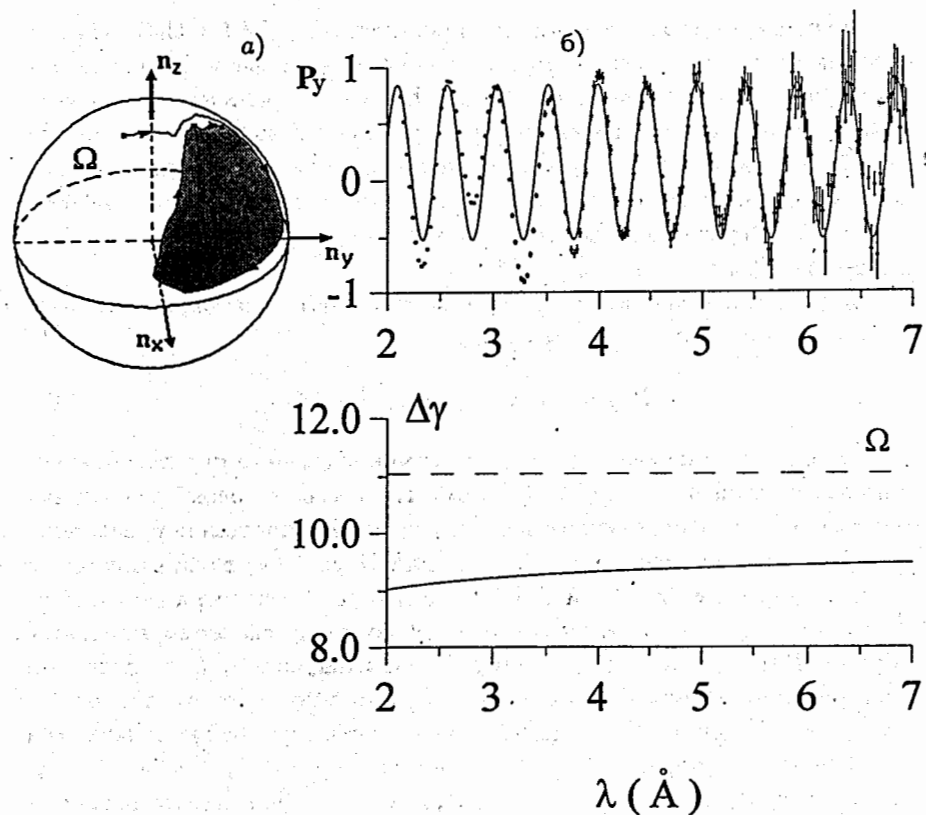


Рис. 3. а) Контур на сфере Пуанкаре, соответствующий конфигурации магнитного поля, реализованной во времяпролетном эксперименте [14], б) результаты подгонки на основе модели прецессирующего поля

Для более точного анализа этого эксперимента просто знания модели прецессирующего поля явно недостаточно. Необходим более детальный анализ, дающий алгоритм вычисления геометрической фазы в случае произвольных конфигураций магнитного поля.

Заключение

Итак, фаза Берри не есть абстрактно - теоретическое понятие. Влияние на фазу волновой функции геометрических свойств пространства параметров, от которых зависит гамильтониан квантовой системы, — экспериментально наблюдаемое явление. С точки зрения нейтронной оптики предсказание Берри для адиабатической эволюции спина нейтрона (1/2) в простых геликоидальных полях подтверждается экспериментально в виде сдвига компоненты вектора поляризации, перпендикулярной полю, на угол, равный величине телесного угла, описываемого вектором магнитного поля:

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos\theta) \cdot n,$$

где θ - угол и n - число оборотов геликоида. Сейчас ясно, что пренебрежение геометрической фазой в определенных случаях может приводить к систематической ошибке при интерпретации экспериментов с поляризованными нейтронами, в основу которых положен метод спиновой прецессии (метод спинового эха, 3-мерный анализ поляризации). Вместе с тем нейтронные эксперименты ставят на повестку дня новые вопросы, связанные с измерением геометрических фаз для случая магнитных полей сложной геометрии с учетом неадиабатических эффектов.

Авторы признательны С. И. Виницкому, В. К. Игнатовичу и В. М. Тер-Антоняну за полезные обсуждения и замечания. Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант No 2517).

Приложение

Рассмотрим поведение фаз волновых функций в асимптотических режимах эволюции спина нейтрона. В адиабатическом пределе, когда $\omega/\omega_L \ll 1$, имеем

$$\Lambda \approx \omega_L \left(1 - \frac{\omega}{\omega_L} \cos \theta\right), \quad (44)$$

или

$$\begin{aligned} \alpha_{\pm} &\rightarrow \pi(1 \mp \omega_L/\omega \mp \cos \theta), \\ \beta_{\pm} &\rightarrow \mp \pi \omega_L/\omega, \\ \gamma_{\pm} &\rightarrow \delta_{\pm} \mp \Omega(\theta)/2, \\ \delta_{\pm} &= \begin{cases} 2\pi \\ 0 \end{cases}. \end{aligned} \quad (45)$$

Как следствие, для конечного вектора поляризации имеем следующее асимптотическое поведение:

$$P_x \rightarrow -\cos \theta \sin\left(\frac{2\pi\omega_L}{\omega} + \Omega(\theta)\right), \quad (46)$$

$$P_y \rightarrow \cos\left(\frac{2\pi\omega_L}{\omega} + \Omega(\theta)\right), \quad (47)$$

$$P_z \rightarrow \sin \theta \sin\left(\frac{2\pi\omega_L}{\omega} + \Omega(\theta)\right). \quad (48)$$

Наиболее простой вид компоненты вектора конечной поляризации имеют в системе координат с осью z' , совпадающей с направлением магнитного поля:

$$P'_x \rightarrow -\sin\left(\frac{2\pi\omega_L}{\omega} + \Omega(\theta)\right), \quad (49)$$

$$P'_y \rightarrow \cos\left(\frac{2\pi\omega_L}{\omega} + \Omega(\theta)\right), \quad (50)$$

$$P'_z \rightarrow 0. \quad (51)$$

Аналогично может быть рассмотрен неадиабатический предел: $\omega/\omega_L \gg 1$ и

$$\Lambda \approx \omega \left(1 - \frac{\omega_L}{\omega} \cos \theta\right). \quad (52)$$

Для фаз и компонент поляризации в этой асимптотике имеем

$$\alpha_{\pm} \rightarrow \gamma_{\pm} \rightarrow \delta_{\pm} = \begin{cases} 0 \\ 2\pi \end{cases}, \quad (53)$$

$$\beta_{\pm} \rightarrow 0,$$

$$P_x, P'_x \rightarrow 0, P_y, P'_y \rightarrow 1, P_z, P'_z \rightarrow 0. \quad (54)$$

Что мы имеем при переходе к обратному вращению ($\omega \rightarrow -\omega$)?

Вращение магнитного поля в обратном направлении соответствует замене во всех выражениях, приведенных выше, $\omega \rightarrow -\omega$, в частности,

$$\Lambda \rightarrow \tilde{\Lambda} = \sqrt{(\omega + \omega_L \cos \theta)^2 + \omega_L^2 \sin^2 \theta}.$$

В адиабатическом пределе, когда $|\omega|/\omega_L \ll 1$, нетрудно получить следующие асимптотики:

$$\tilde{\Lambda} \approx \omega_L \left(1 + \frac{|\omega|}{\omega_L} \cos \theta\right), \quad (55)$$

как следствие,

$$\tilde{\alpha}_{\pm} \rightarrow -\pi(1 \mp \omega_L/|\omega| \mp \cos \theta),$$

$$\tilde{\beta}_{\pm} \rightarrow \mp \pi \omega_L/|\omega|,$$

$$\tilde{\gamma}_{\pm} \rightarrow \tilde{\delta}_{\pm} \mp \Omega(\pi - \theta)/2, \quad (56)$$

$$\tilde{\delta}_{\pm} = \begin{cases} 0 \\ -2\pi \end{cases}.$$

В высокочастотном пределе $|\omega|/\omega_L \gg 1$, когда

$$\tilde{\Lambda} \approx |\omega| \left(1 + \frac{\omega_L}{|\omega|} \cos \theta\right), \quad (57)$$

для фаз имеем

$$\tilde{\alpha}_{\pm} \rightarrow \tilde{\gamma}_{\pm} \rightarrow \tilde{\delta}_{\pm} = \begin{Bmatrix} -2\pi \\ 0 \end{Bmatrix}, \beta_{\pm} \rightarrow 0. \quad (58)$$

Мы не будем здесь приводить асимптотические выражения для конечного вектора поляризации в случае обратного вращения; их легко получить из приведенных фазовых асимптотик. Обратим внимание на разности фаз типа $\alpha_{\pm} - \tilde{\alpha}_{\pm}$; при $|\omega| \rightarrow 0$ эти разности указывают на скачки фазы:

$$\alpha_{\pm} - \tilde{\alpha}_{\pm} \rightarrow 2\pi.$$

Приведем ряд графиков, иллюстрирующих поведение фаз волновых функций и компонент конечного вектора поляризации.

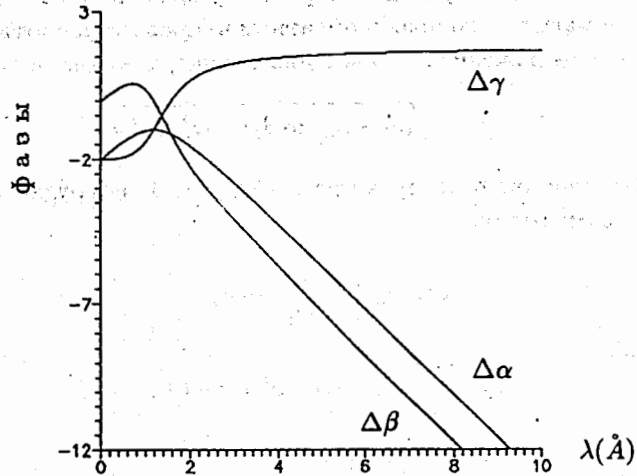


Рис. П1. Спектральное поведение фаз волновой функции (15): $\Delta\alpha = \alpha_+ - \alpha_-$ — разность полных фаз (в единицах π), входящая в выражения для компонент вектора конечной поляризации (37)-(39), $\Delta\beta = \beta_+ - \beta_-$ — соответствующая разность динамических фаз, $\Delta\gamma = \gamma_+ - \gamma_-$ — разность геометрических фаз ($C_+ = 1/\sqrt{2}$, $C_- = i/\sqrt{2}$, $\phi = 0$, $\theta = 30^\circ$, $L = 1\text{ м}$, $|\vec{H}| = 1 \text{ Э}$)

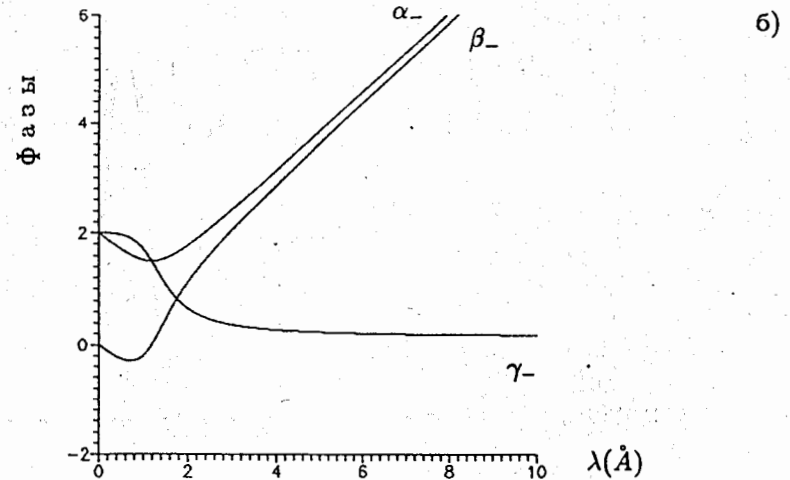
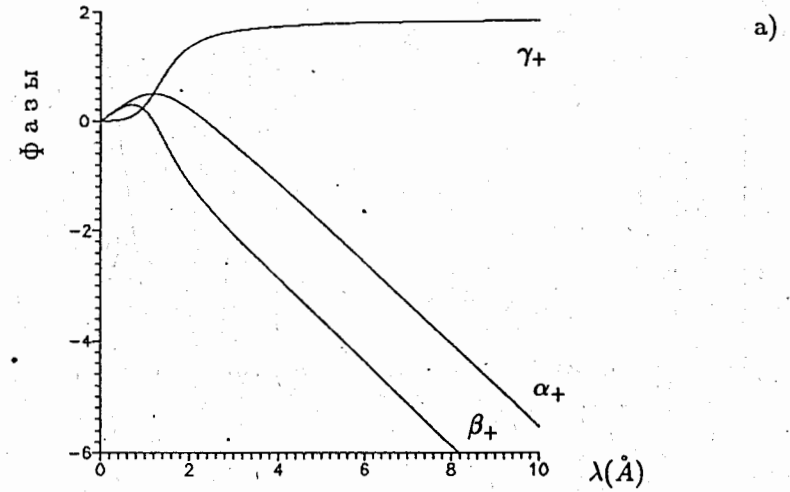


Рис. П2. "Парциальные" фазы волновой функции ($\theta = 30^\circ$, $|\vec{H}| = 1 \text{ Э}$), соответствующие: а) положительной проекции спина на направление поля; б) отрицательной проекции спина

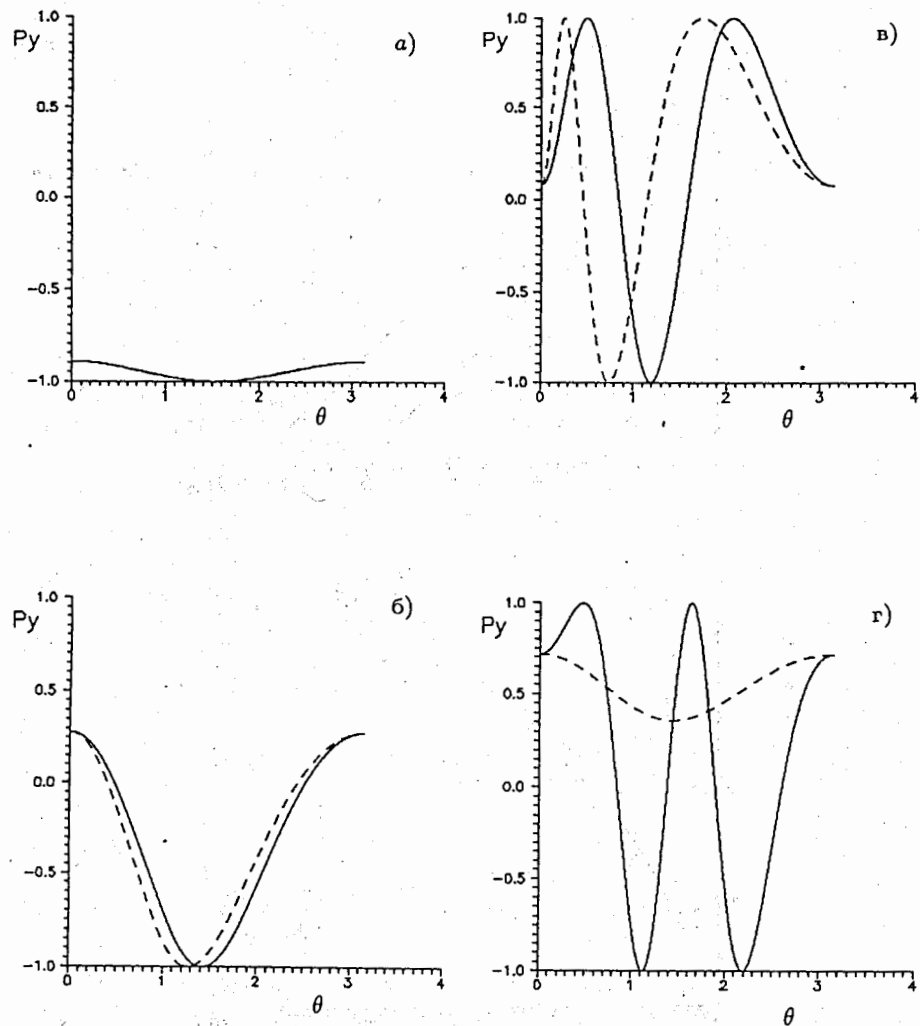


Рис. ПЗ. Зависимость от полярного угла θ (наклона магнитного поля относительно оси z) P_y -компоненты вектора конечной поляризации при фиксированных длинах волн:
 а) $\lambda = 0,1 \text{ \AA}$, б) $\lambda = 0,4 \text{ \AA}$, в) $\lambda = 1 \text{ \AA}$, г) $\lambda = 10 \text{ \AA}$

Здесь и на рис. П4 пунктирные кривые соответствуют поведению, обусловленному набором только динамической фазы, сплошные кривые соответствуют реальному поведению с учетом геометрической фазы.

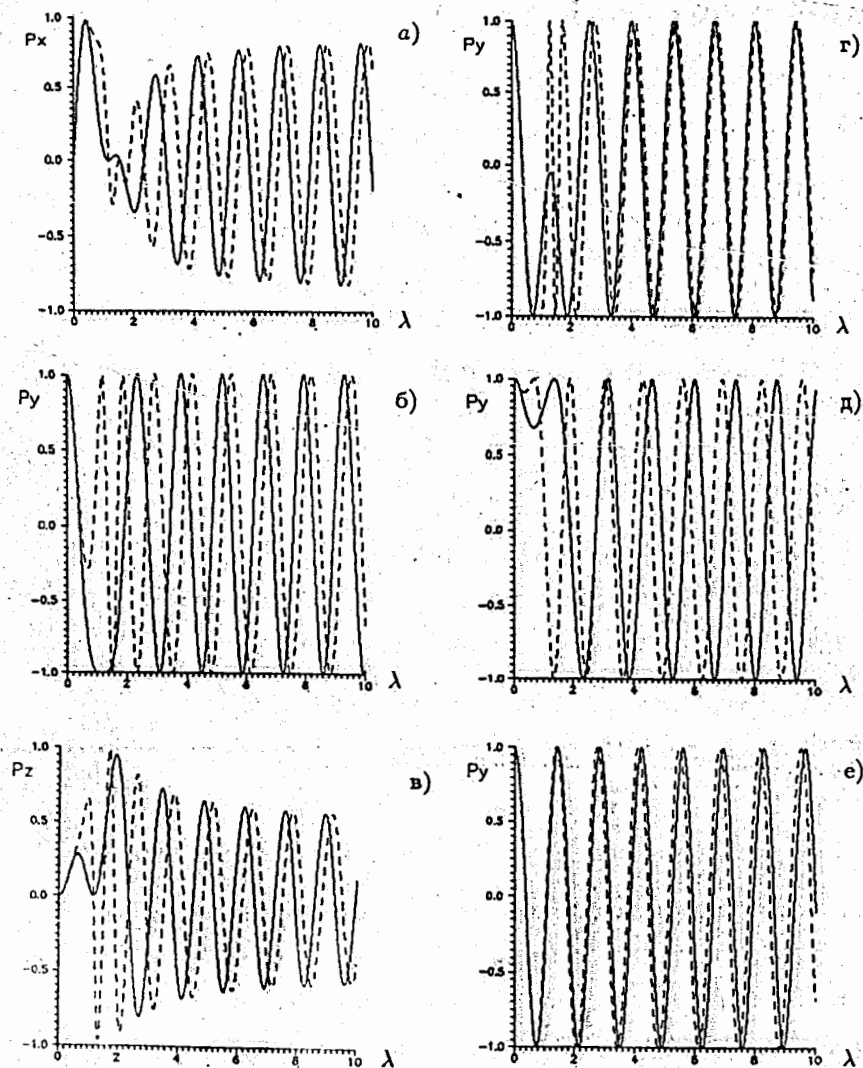


Рис. П4. Компоненты вектора конечной поляризации при значении полярного угла θ равном 30° (а,б,в); P_y -компонента вектора конечной поляризации при углах наклона θ магнитного поля относительно оси z , соответственно равных $15^\circ, 60^\circ, 150^\circ$. При $\omega \rightarrow -\omega$ имеем $\theta \rightarrow \pi - \theta$ (г,д,е)

Список литературы

- [1] O. Halpern, T. Holstein, Phys. Rev. **59**, 960-981 (1941)
- [2] M.V. Berry, Proc. Roy. Soc. London A **392**, 45-57 (1984)
- [3] С.М. Рытов, ДАН СССР, **28**, 263 (1938); В.В. Владимирский, ДАН СССР, **31**, 222 (1941); S. Pancharatnam, Proc. Indian Acad. Sci. **A44**, 247; **A46**, 1 (1956)
- [4] M. Berry, Physics Today, Dec. p.34-40 (1990)
- [5] С.И. Виноцкий, В.Л. Дербов, В.М. Дубовик и др. УФН **160**(6), 1-49 (1987); Д.Н. Клышко, УФН **163**(11), 1-18 (1993)
- [6] Y. Aharonov, J. Anandan, Phys. Rev. Lett. **58**, 1593 (1987). D.J. Moore, Phys. Rep. **210**(1), (1991)
- [7] N. Mukunda, R. Simon, Ann. of Phys. **228**, 205-268 (1993) (ref. therein)
- [8] J.H. Hannay, J. Phys. A: Math. Gen. **18**, 221-230 (1985)
- [9] M.V. Berry, J. Phys. A: Math. Gen. **18**, 15-27 (1985)
- [10] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Квантовая механика. М., Физматгиз, 1963.
- [11] T. Bitter, D. Dubbers, Phys. Rev. Lett. **59**, 251 (1987)
- [12] D.J. Richardson, A.I. Kilvington, K. Green, S.K. Lamoreaux, Phys. Rev. Lett. **61**, 2030 (1988)
- [13] H. Weinfurter, G. Badurek, Phys. Rev. Lett. **64**, 1318 (1990)
- [14] D.A. Korneev, V.I. Bodnarchuk, L.S. Davtyan, contributed paper to Int. Conf. Neut. Scat. '94, Sendai, Japan
- [15] А.С. Бакай, Ю.П. Степановский, Адиабатические инварианты. Киев, "Наукова Думка", 1981

Рукопись поступила в издательский отдел
29 марта 1995 года.

Боднарчук В.И., Давтян Л.С., Корнеев Д.А.
Эффекты геометрической фазы в нейтронной оптике

P3-95-164

Цель данной работы — на примере известной точно решаемой задачи о поведении спина нейтрона в прецессирующем магнитном поле дать, по возможности, краткое и доступное введение в круг основных утверждений, связанных с понятием геометрической фазы (фазы Берри) и ее измерениями в нейтронной оптике.

Работа выполнена в Лаборатории нейтронной физики им. И.М. Франка ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1995

Перевод авторов

Bodnarchuk V.I., Davtyan L.S., Korneev D.A.
Geometrical Phase Effects in Neutron Optics

P3-95-164