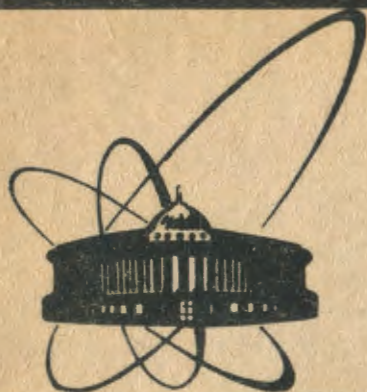


89-84



сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Г 604

P3-89-84

В.В.Голиков, В.К.Игнатович, Ю.В.Никитенко

ДВУХГРУППОВАЯ ДИФфуЗИЯ
УЛЬТРАХОЛОДНЫХ НЕЙТРОНОВ

1989

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена вопросу транспортировки ультракоротких нейтронов (УХН) по нейтроноводам. Обычно используют два подхода к этой задаче: либо моделируют распространение УХН на ЭВМ, задавая индикатрису отражения нейтрона от стенки, либо решают уравнение диффузии при заданном коэффициенте диффузии. Первый способ дает полную информацию о распределении нейтронов внутри нейтроновода, но он чрезвычайно громоздок и уступает в этом отношении аналитическим методам. Второй способ — описание распространения УХН по нейтроноводу с помощью диффузионного уравнения — не позволяет правильно представить угловое распределение нейтронов, которое необходимо учитывать, например, при описании диффузии по разветвленному нейтроноводу^{1/} (рис. 1). Естественно попытаться видоизменить диффузионный подход таким образом, чтобы описать анизотропию углового распределения нейтронов. В настоящей работе предпринимается первый шаг в этом направлении.

В диффузионной теории предполагается, что угловое распределение частиц почти изотропно, и поэтому поток частиц направо или налево (то есть от входного отверстия нейтроновода к выходному и наоборот) представляется следующим выражением:

$$\vec{J} = Nv/4\pi (D/2) dN(x)/dx, \quad (1)$$

где N — число нейтронов на единицу длины, v — скорость нейтрона, D — коэффициент диффузии, а x — координата вдоль оси нейтроновода. Второе слагаемое в выражении (1), которое обусловлено анизотропией, всюду меньше первого и сравнивается с ним только у выходного отверстия. Это означает, что анизотропия почти всюду слаба, однако именно ею определяется величина полного диффузионного потока, равная разности двух противоположно направленных потоков (1).

В простой диффузионной модели пропускание прямого и изогнутого нейтроновода одинаково, а потоки нейтронов на выходе равных ветвей 2 и 3 разветвленного нейтроновода (см. рис. 1) равны. Это противоречит результатам эксперимента^{1/}. Поэтому простая диффузионная теория не отражает реальных процессов распространения УХН по нейтроноводам.

Без учета анизотропии результаты эксперимента^{1/} удастся описать только с помощью феноменологических параметров, которые позволяют различным ветвям нейтроновода приписать разные коэффи-

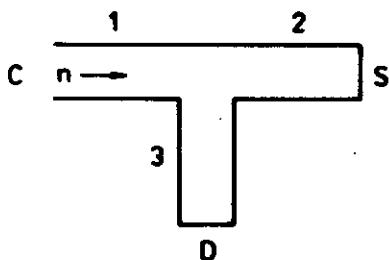


Рис. 1. Упрощенная схема эксперимента^{/1/}: С — источник УХН, D — детектор, S — образец, 1 — магистральный нейтроновод, 2, 3 — ветви нейтроновода, n — нейтроны, стрелка показывает направление их распространения.

циенты диффузии, хотя все участки изготовлены из одного и того же материала^{/2/}. Ясно, что такой подход не может считаться удовлетворительным.

В данной работе мы введем анизотропию явным образом. Для этого разобьем линейную плотность нейтронов $N = N_1 + N_2$ на две группы $N_{1,2}$: одна — с векторами скоростей внутри двух противоположных конусов с углом раствора θ_0 и с осью вдоль оси нейтроновода, а другая — вне этих конусов. Распространение УХН по нейтроноводу теперь будет описываться не одним коэффициентом диффузии, а матрицей 2×2 . Матрица коэффициентов диффузии вычисляется исходя из заданного вида индикатрисы отражения нейтрона от стенки. При этом подгонка к экспериментальным данным позволяет определить характер отражения, а значит, получить представление о качестве стенок нейтроновода, что представляет собой главную задачу с точки зрения контроля и прогнозирования транспортировки УХН.

2. РАЗБИЕНИЕ НЕЙТРОНОВ НА ДВЕ ГРУППЫ

Введем, как указано во введении, полярную ось вдоль оси нейтроновода и угол θ_0 по отношению к ней, который определяет разбиение нейтронов на две группы. Угловое распределение нейтронов представим в виде

$$N(\Omega) = N_1 \Theta(0 \leq \theta \leq \theta_0 \vee \pi - \theta_0 \leq \theta \leq \pi) / 2\Omega_1 + N_2 \Theta(\theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0) / 2\Omega_2, \quad (2)$$

где Θ -функция равна единице при выполнении условия, указанного в ее аргументе, и нулю в противном случае. Нормировочная величина $2\Omega_1$ равна суммарному телесному углу внутри двух конусов с углом раствора θ_0 :

$$\Omega_1 = \int_0^{\theta_0} d\Omega = 2\pi(1 - \cos \theta_0), \quad (3a)$$

а $2\Omega_2$ — полному телесному углу вне конусов:

$$\Omega_2 = \int_{\theta_0}^{\pi/2} d\Omega = 2\pi \cos \theta_0. \quad (36)$$

Полная линейная плотность равна

$$N = \int N(\Omega) d\Omega = N_1 + N_2. \quad (4)$$

Запишем линейную плотность УХН в виде двумерного вектора-столбца

$$\psi = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Введем также стандартный вектор-строку $\psi_0 = (1,1)$, тогда полная плотность $N = N_1 + N_2$ представляется в виде $N = \psi_0 \psi$, где умножение производится по обычным правилам матричной алгебры. Формализм двумерных векторов приводит к математическому аппарату, который ранее был развит для исследования диффузии УХН в магнитных нейтронноводах.

Поток внутри нейтронновода записывается в виде $J = -\hat{D}(d/dx)\psi$, где \hat{D} — матрица коэффициента диффузии:

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Уравнение диффузии следует из соотношения

$$\text{div} J = -\hat{W}\psi, \quad (7)$$

где \hat{W} — матрица потерь:

$$\hat{W} = \begin{pmatrix} 1/\tau_{11} & -1/\tau_{12} \\ -1/\tau_{21} & 1/\tau_{22} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

τ_{ij} — время жизни нейтронов в группе j до перехода в группу i , τ_{ii} — время жизни нейтрона в группе i ;

$$1/\tau_{ii} = 1/\tau_{0i} + 1/\tau_{ji}, \quad (9)$$

а τ_{0i} — собственное время жизни нейтрона в группе i , обусловленное потерями в нейтронноводе.

Подставив в соотношение (7) выражение для потока, в случае постоянных матриц \hat{D} и \hat{W} получим уравнение

$$(d^2/dx^2)\psi = \hat{k}^2\psi, \quad (10)$$

$$\hat{k}^2 = \hat{D}^{-1}\hat{W}. \quad (11)$$

3. РАСПРОСТРАНЕНИЕ УХН ПО НЕРАЗВЕТВЛЕННОМУ НЕЙТРОНОВОДУ

Рассмотрим полубесконечный нейтронород ($x \geq 0$). Плотность УХН внутри него удовлетворяет уравнению (10), решение которого равно

$$\psi_{in}(x) = \exp(-\hat{k}x)\psi_{in}(0), \quad (12)$$

где вектор $\psi_{in}(0)$ находится из граничных условий, то есть из требований непрерывности плотности и потока на входном отверстии. Сформулируем их.

Плотность нейтронов, падающих на входное отверстие нейтронорода снаружи, обозначим через $\vec{\psi}_0$. Падающие на вход нейтронорода нейтроны частично отражаются. Плотность отраженных нейтронов $\vec{\psi}_r$ и плотность прошедших внутрь $\psi_{in}(0)$ представим соответственно в виде

$$а) \vec{\psi}_r = \hat{\Gamma}\vec{\psi}_0, \quad б) \psi_{in}(0) = \hat{t}\vec{\psi}_0. \quad (13)$$

Величины $\hat{\Gamma}$ и \hat{t} являются матрицами отражения и пропускания входного отверстия. Суммарный поток падающих и отраженных нейтронов равен

$$J_{out} = \int \psi_{out} \cos \theta d\Omega = \hat{V}(I - \hat{\Gamma})\vec{\psi}_0, \quad (14)$$

где

$$\psi_{out} = \vec{\psi}_0 \Theta(0 < \theta < \pi/2) + \vec{\psi}_r \Theta(\pi/2 < \theta < \pi),$$

$\hat{V} = v\hat{a}$ (мы примем пока, что нейтроны монохроматичны), а \hat{a} — диагональная матрица с элементами

$$а) a_{11} = \int \cos \theta \Theta(0 \leq \theta \leq \theta_0) d\Omega / \Omega_1 = (1 + \cos \theta_0) / 2, \quad (15)$$

$$б) a_{22} = \int \cos \theta \Theta(\theta_0 \leq \theta \leq \pi/2) d\Omega / \Omega_2 = \cos \theta_0 / 2.$$

Поток внутри нейтронорода равен

$$J_{in}(x) = -\hat{D} d\psi_{in}(x)/dx = \hat{D} \hat{k} \exp(-\hat{k}x) \psi_{in}(0). \quad (16)$$

Искомые граничные условия определяются двумя соотношениями:

$$а) \psi_{out} = \psi_{in}(0), \quad б) J_{out} = J_{in}(0).$$

Из них следуют два уравнения:

$$а) 1 + \hat{\Gamma} = \hat{t}, \quad б) \hat{a}v(1 - \hat{r}) = \hat{D} \hat{k} \hat{t}, \quad (17)$$

которые имеют решение

$$а) \hat{t} = 2(1 + \hat{q})^{-1}, \quad б) \hat{r} = (1 - \hat{q})(1 + \hat{q})^{-1}, \quad (18)$$

где

$$\hat{q} = (\hat{a}v)^{-1} \hat{D} \hat{k}. \quad (19)$$

В дальнейшем значок $\hat{}$, выделяющий матричные величины, мы для простоты будем опускать.

Отражение R и пропускание T нейтронов конечной длины L были получены в работе ^{3/}. Однако мы получим их еще раз несколько иным и, на наш взгляд, более простым способом.

Представим себе, что рассматриваемый нами полубесконечный нейтронный составлен из отрезка длины L и оставшейся части, которая также является полубесконечной. Введем в месте стыковки двух указанных частей бесконечно узкую воображаемую вакуумную щель. Разобьем нейтроны в этой щели ψ_s на две части: $\psi_s = \vec{\psi}_s + \overleftarrow{\psi}_s$, где стрелочка указывает направление движения нейтронов в щели. Ясно, что $\overleftarrow{\psi}_s = r \vec{\psi}_s$. Для $\vec{\psi}_s$ можно составить самосогласованное уравнение:

$$\vec{\psi}_s = T \vec{\psi}_0 + R r \vec{\psi}_s,$$

из которого следует, что

$$\vec{\psi}_s = (1 - Rr)^{-1} T \vec{\psi}_0. \quad (20)$$

С другой стороны, ясно, что

$$\vec{\psi}_s + \overleftarrow{\psi}_s = (1 + r) \vec{\psi}_s = \exp(-\hat{k}L) (1 + r) \vec{\psi}_0$$

или

$$\vec{\psi}_s = (1 + r)^{-1} \exp(-kL) (1 + r) \vec{\psi}_0. \quad (21)$$

Отсюда следует, что плотность нейтронов, летящих направо, убывает по закону $\exp(-qL)$, где

$$q = (1 + r)^{-1} k(1 + r). \quad (22)$$

Из (20) и (21) следует уравнение

$$T = (1 - Rr) \exp(-qL). \quad (23)$$

Второе уравнение для определения R и T получается из очевидного соотношения:

$$r\vec{\psi}_0 = R\vec{\psi}_0 + T\vec{\psi}_s = [R + \text{Tr}(1 + r)^{-1} \exp(-kL)(1 + r)]\vec{\psi}_0,$$

откуда следует

$$r = R + \text{Tr} \exp(-qL). \quad (24)$$

Эти два уравнения имеют решение:

$$\begin{aligned} \text{а) } R &= [r - \exp(-qL)r \exp(-qL)] [1 - r \exp(-qL)r \exp(-qL)]^{-1}, \\ \text{б) } T &= (1 - r^2) \exp(-qL) [1 - r \exp(-qL)r \exp(-qL)]^{-1}. \end{aligned} \quad (25)$$

С помощью обозначения $\hat{e} = \exp(-qL)$ формулы (25) записываются в более компактном виде:

$$R = (r - \hat{e}r\hat{e})(1 - \hat{e}r\hat{e})^{-1}, \quad T = (1 - r^2)\hat{e}(1 - \hat{e}r\hat{e})^{-1}. \quad (26)$$

Таким образом, задача об отражении и пропускании прямого нейтронного пучка длиной L решена.

Рассмотрим теперь нейтронную цепь. Если нейтронный пучок составлен из двух звеньев, обладающих каждое своим пропусканием T_1 и отражением R_1 , то пропускание всей цепи легче всего вычислить, предположив, что между звеньями имеется воображаемая бесконечно узкая щель^{4/}. Такая щель физически никак не может изменить процесс распространения нейтронов, но позволяет забыть об уравнениях диффузии, которые могут быть разными в разных звеньях, и с помощью рекуррентных соотношений выразить пропускание и отражение всей цепи через уже вычисленные R и T отдельных звеньев.

Пусть плотность в этой щели равна $\vec{\psi}_s = \vec{\psi}_s + \vec{\psi}_s$. Очевидно, что для $\vec{\psi}_s$ можно аналогично (20) записать выражение

$$\vec{\psi}_s = (1 - R_1 R_2)^{-1} T_1 \vec{\psi}_0,$$

после чего сразу получаем

$$\text{а) } T_{12} \vec{\psi}_0 = T_2 \vec{\psi}_s, \quad \text{б) } T_{12} = T_2 (1 - R_1 R_2)^{-1} T_1, \quad (27)$$

$$в) R_{12} \vec{\psi}_0 = R_1 \vec{\psi}_0 + T_1 \vec{\psi}_s,$$

$$г) R_{12} = R_1 + T_1 R_2 (1 - R_1 R_2)^{-1} T_1.$$

Последовательно применяя эти формулы, можно рассчитать R и T для сколь угодно длинной цепи. Эта цепь может включать в себя диафрагмы, нейтронотводы разных диаметров и разных качеств, но не должна содержать поворотов, поскольку каждый поворот представляет собой дополнительное сопротивление, рассчитывать которое еще нужно научиться. Чтобы сделать шаг в этом направлении, рассмотрим разветвленные нейтронотводы.

4. РАЗВЕТВЛЕННЫЕ НЕЙТРОНОТВОДЫ

Рассмотрим систему, показанную на рис. 1. В дальнейшем для краткости нейтронотводная система с детектором и образцом, расположенными так, как показано на рисунке, будет называться геометрией 1. Система же с детектором и образцом, переставленными местами, — геометрией 2. В рассматриваемой системе звенья 1 и 2 параллельны, а звено 3 перпендикулярно им. Мы ограничимся только такой конфигурацией, поскольку именно она нас интересует в связи с экспериментом¹¹, но никаких принципиальных трудностей для рассмотрения разветвлений с другими угловыми характеристиками и с большим числом лучей нет. Это будет видно из последующих рассуждений.

Будем считать, что величины R и T для отдельных звеньев известны. Мысленно расчленим лучи, введя в соединяющую их вершину воображаемый вакуумный промежуток. Обозначим объемную плотность нейтронов в центре промежутка через n_v . Заметим, что компоненты плотности n_v характеризуют угловое распределение относительно оси звеньев 1 и 2, но не звена 3. Угловое распределение относительно оси звена 3 получается путем прямого пересчета к другой системе координат.

Плотность n_v можно представить тройким образом. Вблизи звена 2 величину n_v можно разбить на две части: $n_v = \vec{n}_{2v} + \vec{n}_{2v}$, где стрелка указывает на общее направление движения нейтрона в сторону звена 2 или от него. Очевидно, что $\vec{n}_{2v} = R_2 \vec{n}_{2v}$, $\vec{\psi}_2 = \vec{n}_{2v} S_2$, где S_2 — площадь поперечного сечения звена 2, поэтому

$$n_v = \vec{n}_{2v} + \vec{n}_{2v} = (1 + R_2) \vec{\psi}_2 / S_2. \quad (28)$$

Аналогичным образом получаем и два других соотношения:

$$n_v = T_1 \vec{\psi}_0 / S_1 + (1 + R_1) \vec{\psi}_1 / S_1 = (1 + \beta R_3 \beta) \vec{\psi}_3 / S_3. \quad (29)$$

Здесь S_1, S_3 — площади поперечных сечений звеньев 1 и 3 соответственно, а $\vec{\psi}_1, \vec{\psi}_3$ — линейные плотности УХН, падающих на вход звена 1 и 3 соответственно, вычисленные в системе отсчета с осью вдоль звеньев 1 и 2. Матрица β переводит угловое распределение относительно оси

звена 1 в угловое распределение относительно звена 3. Покажем, как это делается. Угловое распределение, соответствующее n_{3v}^\downarrow , относительно оси основного нейтроновода 1 (в данном случае и относительно оси звена 2) по аналогии с представлением (2) можно записать в виде

$$n_{3v}^\downarrow(\Omega) = [n_{31}^\downarrow \Theta(0 \leq \theta \leq \theta_0 \vee \pi - \theta_0 \leq \theta \leq \pi) / \Omega_1 + n_{32}^\downarrow \Theta(\theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0) / \Omega_2] \Theta(|\phi| \leq \pi/2), \quad (30)$$

где n_{3i} ($i = 1, 2$) — две компоненты двумерного вектора n_3^\downarrow , характеризующие плотности двух групп. Заметим, что в знаменателях формулы (30) отсутствует фактор 2. Это связано с тем, что по направлению к звену 3 распространяются не все нейтроны из данной группы, а только половина, азимутальный угол ϕ скорости которых ограничен интервалом $|\phi| \leq \pi/2$, если направление $\phi = 0$ выбрать вдоль звена 3.

Угловое распределение с полярной осью вдоль оси звена 3 (полярный угол θ_3) представляется в аналогичном виде

$$n_3^\downarrow(\Omega) = n_1^\downarrow \Theta(0 \leq \theta_3 \leq \theta_0) / \Omega_1 + n_2^\downarrow \Theta(\theta_0 \leq \theta_3 \leq \pi/2) / \Omega_2. \quad (31)$$

В этой системе плотности групп характеризуются величинами n_i' ($i = 1, 2$).

Матрица β связывает n_{3i}^\downarrow с n_i' : $n_i' = \beta_{ij} n_{3j}^\downarrow$. Матричные элементы определяются следующим образом:

$$а) \beta_{11} = 2 \int d\Omega \Theta(0 \leq \theta_3 \leq \theta_0 \vee 0 \leq \theta \leq \theta_0 \wedge |\phi| \leq \pi/2) / \Omega_1,$$

$$б) \beta_{21} = 1 - \beta_{11},$$

$$в) \beta_{12} = 2 \int d\Omega \Theta(0 \leq \theta_3 \leq \theta_0 \vee \theta_0 \leq \theta \leq \pi/2 \wedge |\phi| \leq \pi/2) / \Omega_2,$$

$$г) \beta_{22} = 1 - \beta_{12}$$

причем угол θ_3 определяется через θ и ϕ с помощью соотношения $\cos \theta_3 = \sin \theta \cos \phi$. Прямое вычисление интегралов при $\theta_0 > \pi/4$ приводит к выражениям

$$а) \beta_{11} = 4(-2 \cos \theta_0 \arccos \mu + \arccos \mu^2) / \Omega_1,$$

$$б) \mu = \operatorname{ctg} \theta_0, \quad (32)$$

$$в) \beta_{12} = 4[\cos \theta_0 (2 \arccos \mu - \pi/2) + \arcsin \mu^2] / \Omega_2.$$

При $\theta_0 \leq \pi/4$ имеем

$$г) \beta_{11} = 0, \quad д) \beta_{12} = 1 / \cos \theta_0 - 1. \quad (32')$$

Для определения всех ψ_i необходимо еще одно уравнение, и это уравнение следует из непрерывности потока

$$\alpha T_1 \psi_{01} = \alpha [(1 - R_1) \overset{\leftarrow}{\psi}_1 + (1 - R_2) \overset{\rightarrow}{\psi}_2] + (\delta - \beta \alpha R_3 \beta) \psi_3 \downarrow. \quad (33)$$

Матрица α определена в (15), а матрица δ диагональна, и ее матричные элементы равны

$$\begin{aligned} \text{а) } \delta_{11} &= 2 \int d\Omega \cos \theta_3 \Theta(0 \leq \theta \leq \theta_0 \wedge |\phi| \leq \pi/2) / \Omega_1 = \\ &= 2(\theta_0 - \sin \theta_0 \cos \theta_0) / \Omega_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \delta_{22} &= 2 \int d\Omega \cos \theta_3 \Theta(\theta_0 \leq \theta \leq \pi/2 \wedge |\phi| \leq \pi/2) / \Omega_2 = \\ &= 2(\pi/2 - \theta_0 + \sin \theta_0 \cos \theta_0) / \Omega_2. \end{aligned}$$

Решение системы уравнений (29), (33) при равных S_i имеет вид

$$\begin{aligned} \text{а) } \psi_1 &= A_1^{-1} M^{-1} (1 - Q_2 - Q_3) T_1 \psi_{01}, & \text{б) } \psi_{2,3} &= A_{2,3}^{-1} M^{-1} (1 + Q_1) T_1 \psi_{01}, \\ \text{в) } M &= Q_1 + Q_2 + Q_3, & \text{г) } Q_i &= B_i A_i^{-1}, & \text{д) } A_{1,2} &= 1 + R_{1,2}, \\ \text{е) } B_{1,2} &= 1 - R_{1,2}, & \text{ж) } A_3 &= 1 + \beta R_3 \beta, & \text{з) } B_3 &= \alpha^{-1} (\delta - \beta \alpha R_3 \beta), \end{aligned} \quad (34)$$

причем верхние значки у ψ_i , которые ранее были введены для наглядности, здесь опущены. Зная плотности нейтронов, падающих на вход звеньев 2 и 3 из разветвления, легко находим потоки нейтронов на детектор: $J_d = \alpha T_3 \beta \psi_3$ — в геометрии 1 и $J_d = \alpha T_2 \psi_2$ — в геометрии 2. Заметим, что поворот нейтронотода можно трактовать как разветвление, рассчитывая, например, общее пропускание T_{13} звеньев 1 и 3 при $R_2 = 1$.

До сих пор спектр нейтронов предполагался монохроматическим. При произвольном спектре $\Phi(v)$ падающих нейтронов скорость счета детектора равна

$$J = \int \Phi(v) J_d(v) v dv / 2. \quad (35)$$

Эта формула будет служить основой для сравнения теории с экспериментом.

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДИФФУЗИОННОЙ МОДЕЛИ

Определим теперь матрицу W потерь. Для этого рассмотрим баланс нейтронов между двумя близкими поперечными сечениями:

$$S n(x + dx, \Omega) v \cos \theta_z = S n(x, \Omega) v \cos \theta_z - r v dx \int d\phi_r [\cos \theta_r n(x, \Omega) \int w(\Omega \rightarrow \Omega') d\Omega' - (1 - \mu) \int \cos \theta_r' n(x, \Omega') w(\Omega' \rightarrow \Omega) d\Omega'] . \quad (36)$$

Здесь θ_z и θ_r — полярные углы соответственно в системе координат с полярной осью вдоль оси нейтроновода x и вдоль нормали n к поверхности стенки в точке отражения с цилиндрической координатой r . Угол ϕ_r — азимутальный угол этой координаты r в цилиндрической системе с осью вдоль x . Слева в (36) указан поток нейтронов с направлением движения Ω через поперечное сечение нейтроновода площадью S , расположенное в точке $x + dx$. Справа первое слагаемое отвечает такому же потоку через сечение в точке x , первое слагаемое в квадратной скобке — потоку, который пересекает кольцо стенки длиной dx , расположенное между двумя сечениями, и рассеивается во всех направлениях Ω' , а второе слагаемое в квадратной скобке — потоку на то же кольцо стенки, который из других направлений Ω' рассеивается в направлении Ω .

Индикатрису отражения примем равной

$$w = (1 - gA) \delta(\Omega - \Omega') + g c A A' \cos \theta_n , \quad (37)$$

где θ_n — угол падения относительно нормали n , множители A — произвольные функции углов Ω падающего на стенку нейтрона, причем A' — такая же функция, но от углов Ω' отраженного нейтрона. Множитель g характеризует вероятность незеркального отражения и будет в дальнейшем называться фактором диффузности, а множитель c определяется условием нормировки, которое для выражения (37) приводится к виду

$$c \int A(\Omega) d\Omega = 1 .$$

Индикатрису (37) совместима с условием детального равновесия^{5/}.

Коэффициент потерь представим в виде $\mu = 2 \eta \cos \theta_n (v/v_{11m})$, где v_{11m} — граничная энергия стенок нейтроновода, а η — приведенный коэффициент потерь^{5/}, то есть отношение мнимой части амплитуды рассеяния ядер среды к действительной. Из (36) следует

$$-dj(x, \Omega) / dx = \int d\phi_r \cos \theta_r \{ (gA + \mu - g\mu A) n(x, \Omega) - c g A (1 - \mu) \int n(x, \Omega') A(\Omega') \cos \theta_n' d\Omega' \} / \pi . \quad (38)$$

Проинтегрируем (38) по $d\Omega$, тогда, поскольку $\cos \theta_r = \sin \theta_z \cos(\phi_z - \phi_r)$, полученное выражение можно, проинтегрировав предварительно по $d\phi_z$, привести к виду

$$-dJ(x) / dx = 2 \int d\Omega \cos \theta_n \{ (gA + \mu - g\mu A) n(x, \Omega) - c g A (1 - \mu) \int n(x, \Omega') A(\Omega') \cos \theta'_n d\Omega' \}. \quad (39)$$

Рассмотрим случай $A = \cos^m \theta_n$, $c = (m + 2) / 2\pi$. Подставим в (39) плотность $n(x, \Omega)$:

$$n(x, \Omega) = N_1 \Theta(0 \leq \theta_z \leq \theta_0 \vee \pi - \theta_0 \leq \theta_z \leq \pi) / 2\Omega_1 + N_2 \Theta(\theta_0 \leq \theta_z \leq \pi - \theta_0) / 2\Omega_2, \quad (40)$$

тогда (39) можно привести к виду $dJ/dx = -WN$, где матричные элементы матрицы W равны

$$\begin{aligned} W_{11} &= [\eta u_{2,1} + g u_{m+1,1} - g \eta u_{m+2,1} - c_m g (u_{m+1,1} - \eta u_{m+2,1}) u_{m+1,1}] / \Omega_1, \\ W_{22} &= [\eta u_{2,2} + g u_{m+1,2} - g \eta u_{m+2,2} - c_m g (u_{m+1,2} - \eta u_{m+2,2}) u_{m+1,2}] / \Omega_2, \\ W_{12} &= [-c_m g (u_{m+1,1} - \eta u_{m+2,1}) u_{m+1,2}] / \Omega_2, \\ W_{21} &= [-c_m g (u_{m+1,2} - \eta u_{m+2,2}) u_{m+1,1}] / \Omega_1 \end{aligned} \quad (41)$$

и введены обозначения

$$u_{k,i} = \int \cos^k \theta_n d\Omega_i, \quad (42)$$

причем интегрирование по $d\Omega_i$ производится в пределах телесных углов групп Ω_i . Эти обозначения можно еще более усовершенствовать:

$$u_{k,1} = 2\pi \alpha_k / (k+1), \quad u_{k,2} = 2\pi(1 - \alpha_k) / (k+1). \quad (43)$$

При этом матрица W приобретает вид

$$\begin{aligned} W_{11} &= \{ \eta \alpha_2 / 3 + g [\alpha_{m+1} / (m+2) - \eta \alpha_{m+2} / (m+3)] (1 - \alpha_{m+1}) \} / \Omega_1, \\ W_{12} &= -g [\alpha_{m+1} / (m+2) - \eta \alpha_{m+2} / (m+3)] (1 - \alpha_{m+1}) / \Omega_2, \\ W_{21} &= -g [(1 - \alpha_{m+1}) / (m+2) - \eta (1 - \alpha_{m+2}) / (m+3)] \alpha_{m+1} / \Omega_1, \\ W_{22} &= \{ \eta (1 - \alpha_2) / 3 + g [(1 - \alpha_{m+1}) / (m+2) - \eta (1 - \alpha_{m+2}) / (m+3)] \alpha_{m+1} \} / \Omega_1, \end{aligned} \quad (44)$$

где

$$\alpha_k = [(k+1)! 2^k / (2k-1)!! 2\pi] \int_{X_0}^1 (1-x^2)^{k/2} dx, \quad x_0 = \cos \theta_0.$$

Частные значения α_k для $k = 1, 2, 3, 4$ указаны ниже:

$$\alpha_1 = 2(\theta_0 - \sin \theta_0 \cos \theta_0) / \pi, \quad \alpha_2 = (1 - \cos \theta_0)^2 (2 + \cos \theta_0) / 2, \quad (45)$$

$$\alpha_3 = (4/3 \pi) [3 \theta_0 / 2 - \sin(2 \theta_0) - (1/8) \sin(4 \theta_0)],$$

$$\alpha_4 = (15/8) [(1 - \cos \theta_0) - 2 (1 - \cos^3 \theta_0) / 3 + (1 - \cos^5 \theta_0) / 5].$$

Найдем теперь матрицу коэффициента диффузии. Составим уравнение для объемной плотности нейтронов $n(x, \rho, \Omega)$ в точке с координатами $x\rho$ в цилиндрической системе координат нейтроновода:

$$\begin{aligned} n(x, \rho, \Omega) &= \int n_w(x - x_1(\rho, \Omega), \Omega') \cos \theta'_n w(\Omega', \Omega) d\Omega' / \cos \theta_n = \\ &= \epsilon n(x - x_1(\rho, \Omega) - x_2(\rho, \Omega), \rho, \Omega) + gAc \int n_w(x - x_1(\rho, \Omega), \Omega') \cos \theta'_n A(\Omega') d\Omega' = \\ &= (1 - \mu) \{ (1 - gA) \{ n(x, \rho, \Omega) - [x_1(\rho, \Omega) + x_2(\rho, \Omega)] n'(x, \rho, \Omega) \} + \\ &+ gAc \int [n_w(x, \Omega') - x_1(\rho, \Omega) n'_w(x, \Omega')] A' \cos \theta'_n d\Omega' \}, \end{aligned} \quad (46)$$

где введено обозначение: $\epsilon = (1 - \mu)(1 - gA)$.

Поскольку

$$\begin{aligned} x_1(\rho, \Omega) + x_1(\rho, -\Omega) &= x_1(\rho, \Omega) + x_2(\rho, \Omega) = x_0(\rho, \Omega) = \\ &= 2 \operatorname{ctg} \theta_z \sqrt{1 - (\rho/r)^2 \sin^2 \phi_z}, \end{aligned} \quad (47)$$

то из (46) следует

$$\begin{aligned} n(x, \rho, \Omega) &= \{ 1 / (1 - \epsilon) \} \{ -x_0(\rho, \Omega) \epsilon n'(x, \rho, \Omega) + \\ &+ (1 - \mu) gAc \int [n_w(x, \Omega') - x_1(\rho, \Omega) n'_w(x, \Omega')] A' \cos \theta'_n d\Omega' \}. \end{aligned} \quad (48)$$

Вычислим поток через заданное сечение:

$$J = \int \cos \theta_z \Theta(0 \leq \theta \leq \pi/2) [n(x, \rho, \Omega) - n(x, \rho, -\Omega)] d\Omega dS. \quad (49)$$

Поскольку

$$x_1(\rho, \Omega) + x_1(\rho, -\Omega) = x_0,$$

то, подставив (48) в (49), для $A = \cos^m \theta_n$ получим потоки $J_{1,2}$ разных групп в виде

$$\begin{aligned} J_1 &= -N'_1 \int dS d\Omega_1 (1 - \mu) [2(1 - Ag) + cgAu_{m+1,1}] x_0 \cos \theta_z / (1 - \epsilon) 2\Omega_1 - \\ &- N'_2 \int dS d\Omega_1 (1 - \mu) cgAu_{m+1,2} x_0 \cos \theta_z / (1 - \epsilon) 2\Omega_2, \\ J_2 &= -N'_2 \int dS d\Omega_2 (1 - \mu) [2(1 - Ag) + cgAu_{m+1,2}] x_0 \cos \theta_z / (1 - \epsilon) 2\Omega_2 - \\ &- N'_1 \int dS d\Omega_2 (1 - \mu) cgAu_{m+1,1} x_0 \cos \theta_z / (1 - \epsilon) 2\Omega_1. \end{aligned} \quad (50)$$

Введем обозначение:

$$j_{\ell,i}^m = \int dS \cos^{\ell} \theta \frac{x}{n_0} \cos \theta_z d\Omega_i / (1 - \epsilon_m), \quad i=1, 2. \quad (51)$$

Тогда систему уравнений можно привести к виду

$$J = -D \Delta N / dx, \quad (52)$$

где

$$\begin{aligned} D_{11} &= [j_{0,1}^m - \eta j_{1,1}^m - g j_{m,1}^m (1 - \alpha_{m+1} / 2) + \eta g j_{m+1,1}^m] / \Omega_1, \\ D_{12} &= g(1 - \alpha_{m+1}) (j_{m,1}^m - \eta j_{m+1,1}^m) / 2\Omega_2, \\ D_{21} &= g\alpha_{m+1} (j_{m,2}^m - \eta j_{m+1,2}^m) / 2\Omega_1, \\ D_{22} &= [j_{0,2}^m - \eta j_{1,2}^m - g j_{m,2}^m (1 + \alpha_{m+1}) / 2 + \eta g j_{m+1,2}^m] / \Omega_2. \end{aligned} \quad (53)$$

Поскольку

$$\cos \theta_n = \sin \theta_z \sqrt{1 - (\rho/r)^2 \sin^2 \phi_z},$$

то величины j можно представить в виде

$$j_{\ell,i}^m = 4\pi \int_0^{\theta_0} d\theta_z \cos^2 \theta_z \sin^{\ell-1} \theta_z \int d\phi_z (\sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \phi_z})^{\ell-1} \rho d\rho / [\eta + g f(\phi_z, \rho)], \quad (54)$$

где

$$f(\phi, \rho) = \sin^{m-1} \theta_z (\sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \phi_z})^{m-1} - \eta \sin^m \theta_z (\sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \phi_z})^m.$$

Последний интеграл путем замены переменных $y = \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \phi_z}$ приводится к виду

$$I = 4 \int_0^{\pi/2} (d\phi / \sin^2 \phi) \int_0^1 \frac{x^{\ell} dx}{\cos \phi} / [\eta + g \sin^{m-1} \theta_z x^{m-1} (1 - \eta \sin \theta_z x)].$$

Изменив порядок интегрирования, получим

$$I = 4 \int (x / \sqrt{1 - x^2}) x^{\ell} dx / [\eta + g \sin^{m-1} \theta_z x^{m-1} (1 - \eta \sin \theta_z x)]. \quad (55)$$

Подставив (55) в (54) и сделав замену переменных $y = \sin \theta_z$, получим окончательное выражение

$$j_{\ell,i}^m = 16 \pi y^{\ell-1} \int_0^1 \frac{dy}{y} \sqrt{1 - y^2} \int_0^1 \frac{x^{\ell+1} dx}{x} / [\eta + g y^{m-1} x^{m-1} (1 - \eta y x)], \quad (56)$$

где интегрирование dy_1 распространяется на соответствующий конус углов, и во избежание расходимостей интегрирование при малых θ следует проводить только до значения $y = \sqrt{rG/v} = 0,1$, обусловленного гравитацией (G — ускорение свободного падения). При конкретных значениях ℓ и m интегралы можно взять в явном виде. При $m = 0$ имеем

$$j_{0,1}^0 = 2\pi^3 a_{00}^3 / g, \quad j_{0,2}^0 = 2\pi^3 (1 - a_{00}^3), \quad a_{00} = 2(\theta_0 - \sin\theta_0 \cos\theta_0) / \pi,$$

$$j_{1,1}^0 = 64\pi a_{10} / 9g, \quad j_{1,2}^0 = 64\pi(1 - a_{10}) / 9g.$$

6. СОПОСТАВЛЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

В эксперименте, подробная схема которого представлена на рис. 2, измерялась скорость счета детектора, установленного на конце звена 3 (или 2) при изменении поглощения образца, установленного на конце звена 2 (или 3). Магистральный нейтроновод был составлен из отдельных прямолинейных отрезков труб различных диаметров и содержал четыре резких поворота: один на 90° и три — на 60° . В отдельных случаях в магистральном нейтроноводе недалеко от разветвления помещалась диафрагма из меди с площадью отверстия S_d . Отрезки нейтроново-

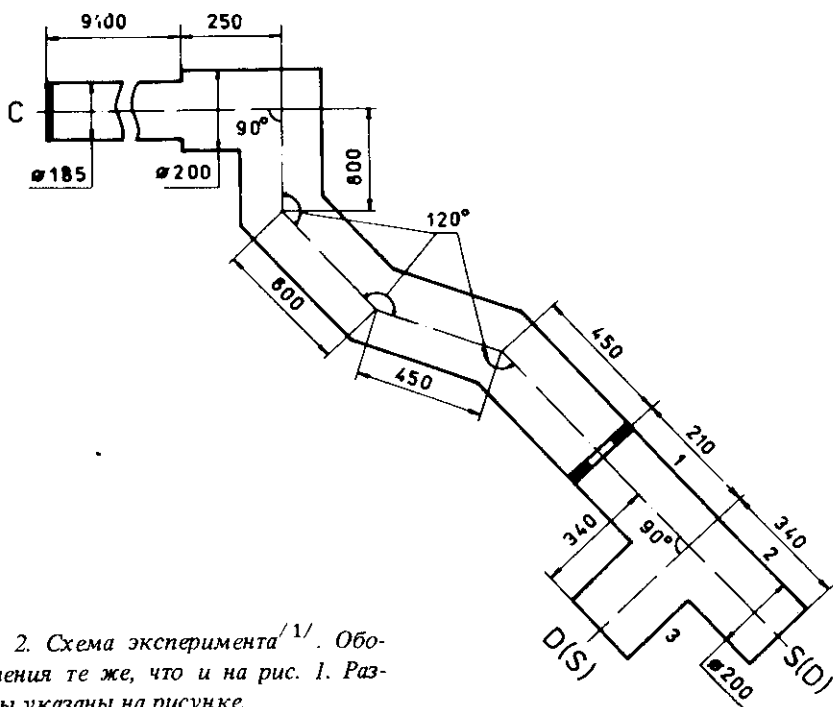
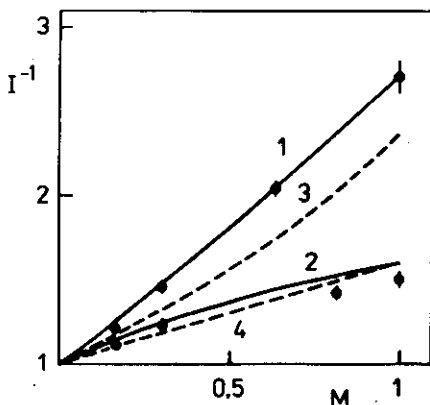


Рис. 2. Схема эксперимента^{1/1}. Обозначения те же, что и на рис. 1. Размеры указаны на рисунке.

Рис. 3. Зависимость обратной скорости счета детектора ($1/J$) от площади поглотителя (полиэтилена) $^{1/1}$: 1, 3 – в геометрии 1; 2, 4 – в геометрии 2. Точки – экспериментальные данные, нормированные на единицу при нулевой площади поглотителя, кривые – теоретический расчет: 1, 2 – при параметрах $\eta = 0,035$, $g = 0,8$, $m = 1$; 3, 4 – при параметрах $\eta = 10^{-2}$, $g = 0,12$, $m = 0$.



дов после разветвления были невелики. Это необходимо отметить, поскольку применение диффузионного подхода к коротким нейтроноводам до некоторой степени проблематично. Детектором служил пропорциональный счетчик с алюминиевым окном площадью 130 см^2 . Образец представлял собой медную диафрагму, наложенную на полиэтиленовый диск, площадь которого составляла $S_p = 314 \text{ см}^2$. При площади отверстия диафрагмы, равной S , вероятность поглощения нейтрона образцом равна $M = S/S_p$.

На рис. 3 представлены нормированные на единицу при $M = 0$ зависимости $J^{-1}(M)$ для двух геометрий образца и детектора. Наблюдаемое различие в скоростях счета в двух геометриях обусловлено анизотропией углового распределения УХН в точке разветвления.

При сравнении теории с экспериментом в расчете принималась индикатриса отражения вида (37) с $A(\Omega) = \cos^m \theta$. Параметр θ_0 полагался равным $\pi/4$. Вообще же варьирование θ_0 в пределах $\pi/6 \leq \theta_0 \leq \pi/3$ слабо влияет на результаты расчета. Спектр УХН полагался максвелловским с границами 3,37 м/с (граничная скорость магниевого конвертора) и 5,67 м/с (граничная скорость медного нейтроновода).

Наилучшее согласие расчета с экспериментом по зависимостям $J^{-1}(M)$ (кривые 1 и 2 на рис. 3), а также по пропусканию и отношению величин $J(0)$ в двух геометриях достигалось при параметрах $\eta = 0,035$, $g = 0,8$ и $m = 1$. Несколько удивляет завышенное значение η , которое в совокупности с параметром $m = 1$ все же не приводит к сильному уменьшению пропускания.

Чувствительность расчетов к параметру m демонстрируется кривыми 3 и 4 на рис. 3. Здесь $m = 0$, и описать экспериментальные данные не удастся даже при наилучших значениях $\eta = 10^{-2}$ и $g = 0,12$. Таким образом, двухгрупповая модель позволяет извлекать из экспериментов не только усредненные параметры диффузного отражения, но и судить о форме индикатрисы отражения УХН от стенок нейтроновода.

На рис. 4 приведена зависимость $J^{-1}(M)$ с полученными ранее параметрами $\eta = 0,035$, $g = 0,8$ и $m = 1$ для случая, когда в магистральном нейтроноводе на расстоянии 21 см от разветвления устанавливалась

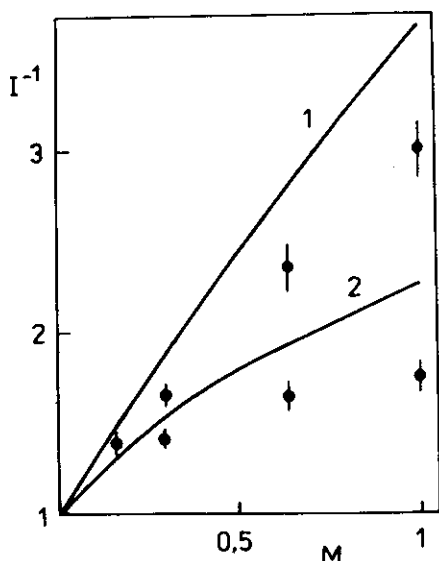


Рис. 4. Зависимость обратной скорости счета детектора от площади поглотителя при наличии в магистральном нейтроноводе диафрагмы, показанной на рис. 2. Обозначения те же, что и на рис. 3.

новод и к большему (на 30%) падению пропускания, чем это следует из расчета.

На рис. 5 приведена зависимость $J^{-1}(0, \ell)$ от длины ℓ звена 3 при тех же параметрах $\eta = 0,035$, $g = 0,8$ и $m = 1$. Согласие расчета с экспериментальными данными удовлетворительное.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Экспериментальные данные, которые используются в настоящей работе для проверки возможностей двухгрупповой теории диффузии, были получены для иных целей, не связанных с проверкой данной теории, и поэтому их количество и качество недостаточно благоприятно для такой проверки. Тем не менее результаты сравнения являются достаточно обнадеживающими. Они показывают, что модель двухгрупповой диффузии позволяет с помощью небольшого числа единичных для заданной нейтроноводной системы параметров описать диффузию УХН в различных участках разветвленного нейтроновода и по экспериментальным данным определить не только интегральные характеристики

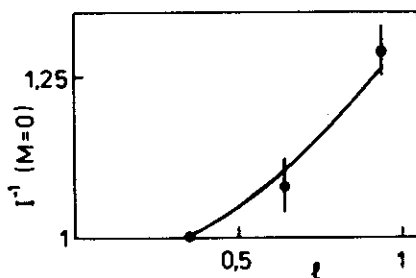


Рис. 5. Обратная скорость счета детектора в зависимости от длины ℓ звена 3 (рис. 2) при нулевой площади поглотителя. Точки — экспериментальные данные, кривая — теоретический расчет при параметрах $\eta = 0,035$, $g = 0,8$, $m = 1$.

медная диафрагма с площадью отверстия 20 см^2 . Хотя качественно расчет правильно отображает ход зависимости, но количественного согласия нет. Наличие диафрагмы приводит к большему оттоку УХН от точки разветвления в магистральный нейтро-

отражения нейтронов от стенки, но в определенной степени извлечь и форму индикатрисы отражения. Однако для этого требуется провести дополнительные измерения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голиков В.В., Кулагин Е.Н., Никитенко Ю.В. – Сообщение ОИЯИ РЗ-85-286, Дубна, 1985.
2. Голиков В.В., Игнатович В.К., Никитенко Ю.В. – Сообщение ОИЯИ РЗ-88-48, Дубна, 1988.
3. Игнатович В.К., Никитенко Ю.В. – Препринт ОИЯИ Р4-87-205, Дубна, 1987.
4. Ignatovich V.K. – JINR Preprint E4-87-326, Dubna, 1987.
5. Игнатович В.К. – Физика ультрахолодных нейтронов. М.: Наука, 1986.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 февраля 1989 года.