сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-87-426

Дао Вонг Дык, Нгуен Тхи Хонг

КОГОМОЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ НА СУПЕРСТРУННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМАХ

1987

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория суперструны [1-4] связывает в единое целое различные идеи и методы физики элементарных частиц. Она имеет замечательную математическую структуру и претендует на то, чтобы стать серьезным кандидатом для последовательной единой теории всех взаимодействий.

Важным шагом по пути приближения теории суперструны к калибровочным теориям поля является недавно развитый подход, при котором калибровочные симметрии и лоренц-ковариантность выступают явным образом [5-9]. Во всех построениях такого рода фундаментальную роль играют духи Фаддеева-Попова и БРСТ-симметрия. По данному направлению больших успехов добились Сигель и Цвилбах [5,6], которые сформулировали лоренц- БРСТ-инвариантную струнную теорию поля. При нахождении инвариантных уравнений для струнного функционала оказывается очень удобным формализм, основанный на когомологическом вычислении в пространстве дифференциальных форм, при этом духи рассматриваются как дифференциалы.

Так, Банксу, Пешкину и другим [7,8-12] удалось вывести уравнения струны, заменяя громоздкую алгебру генераторов Вирасоро и соответствующие супералгебры на связанные с ними когомологические операторы. В частности, ими было показано, что все теории свободной струны могут быть сформулированы как теории струнных дифференциальных форм, определяемых в подходящих пространствах.

Цель настоящей работы - дать общие выражения когомологических операторов для струнных дифференциальных форм произвольного порядка, связанных с алгеброй Вирасоро для бозонных струн и с супералгебрами Неве -Шварца и Рамонда для суперструн.

2. БОЗОННЫЕ СТРУННЫЕ ФОРМЫ

Основным инструментом для изучения калибровочной симметрии теории бозонных струн являются операторы Вирасоро [13] L_0, $L_{\pm n}$/ $n = 1,2,\ldots$/, удовлетворяющие алгебре:

$$[L_n, L_m] = V^k_{nm} L_k ,$$

$$[L_n, L_{-m}] = W^k_{nm} L_k + W^k_{mn} L_{-k} + \eta_{nm}(2L_0 + \frac{D_0}{12}(n^2-1)), \qquad /2.1/$$

$$[L_{-n}, L_{-m}] = V^k_{mn} L_{-k},$$

$$[L_0, L_{\pm m}] = \mp m\, L_{\pm m},$$

где D_0 - число измерений пространства-времени для струны,

$$V^k_{nm} = (n-m)\,\delta_{k,n+m}, \quad W^k_{nm} = (n+m)\,\delta_{k,n-m}, \quad \eta_{nm} = n\,\delta_{nm}. \qquad /2.2/$$

Алгебра /2.1/ приводит к следующим тождествам Якоби:

$$V^q_{nm} V^k_{pq} + V^q_{mp} V^k_{nq} + V^q_{pn} V^k_{mq} = 0, \qquad /2.3/$$

$$V^q_{nm} W^k_{pq} - W^q_{pm} W^k_{qn} + W^q_{pn} W^k_{qm} = 0, \qquad /2.4/$$

$$(W^q_{mp} V^k_{qn} - W^q_{np} V^k_{qm}) - (W^q_{pm} W^k_{nq} - W^q_{pn} W^k_{mq}) - V^q_{mn} W^k_{qp} = \qquad /2.5/$$

$$= 2k(\eta_{mp}\,\delta^k_n - \eta_{np}\,\delta^k_m).$$

Струнная дифференциальная $\binom{p}{q}$-форма определяется выражением [10,12,14]

$$\omega^{(p)}_{(q)} \equiv \omega^{m_1\ldots m_p}_{n_1\ldots n_q}\, e_{m_q} \ldots e_{m_p}\, e^{n_1} \ldots e^{n_q}, \qquad /2.6/$$

где $\{e_m\}$, $\{e^n\}$ - наборы дуальных базисов $\binom{1}{0}$ - и $\binom{0}{1}$-форм соответственно, с правилом умножения

$$e_{m_1} e_{m_2} = -e_{m_2} e_{m_1}, \quad e^{n_1} e^{n_2} = -e^{n_2} e^{n_1}, \quad e_m e^n = -e^n e_m,$$

$\omega^{m_1\ldots m_p}_{n_1\ldots n_q}$ - функционалы от координат струны $x^\mu(\sigma)$, их можно считать полностью антисимметричными по индексам m и по индексам n. Обычное струнное поле ψ рассматривается как $\binom{0}{0}$-форма.

Рассмотрим внешний дифференциальный оператор d. Принимая, что

$$d\psi = L_n \psi \cdot e^n,$$

$$de_m = W^\ell_{mk}\, e^k e_\ell, \qquad /2.7/$$

$$de^n = -\frac{1}{2} V^n_{mk}\, e^m e^k$$

и правило Лейбница

$$d[\omega^{(p_1)}_{(q_1)} \cdot \omega^{(p_2)}_{(q_2)}] = d\omega^{(p_1)}_{(q_1)} \cdot \omega^{(p_2)}_{(q_2)} + (-1)^{p_1+q_1}\omega^{(p_1)}_{(q_1)} \cdot d\omega^{(p_2)}_{(q_2)}, \qquad /2.8/$$

нетрудно найти действие d на форму произвольного порядка /2.6/:

$$d\omega^{(p)}_{(q)} = (-1)^{p+q}[L_{n_{q+1}}\omega^{m_1\ldots m_p}_{n_1\ldots n_q} + pW^{m_p}_{kn_{q+1}}\,\omega^{m_1\ldots m_{p-1}k}_{n_1\ldots n_q} - \qquad /2.9/$$

$$-\frac{1}{2}qV^k_{n_{q+1}n_1}\omega^{m_1\ldots m_p}_{kn_2\ldots n_q}]\, e_{m_1}\ldots e_{m_p} e^{n_1}\ldots e^{n_{q+1}}.$$

С помощью /2.3/ и /2.4/ легко доказать нильпотентность оператора d, $d^2 = 0$.

Рассмотрим также оператор $\bar d$, отличающийся от d лишь заменой L_n на $-L_{-n}$ при действии на $\binom{0}{0}$-форму, а именно:

$$\bar d\omega^{(p)}_{(q)} = (-1)^{p+q}[-L_{-n_{q+1}}\omega^{m_1\ldots m_p}_{n_1\ldots n_q} + pW^{m_p}_{kn_{q+1}}\,\omega^{m_1\ldots m_{p-1}k}_{n_1\ldots n_q} - \qquad /2.10/$$

$$-\frac{1}{2}qV^k_{n_{q+1}n_1}\omega^{m_1\ldots m_p}_{kn_2\ldots n_q}]\, e_{m_1}\ldots e_{m_p} e^{n_1}\ldots e^{n_{q+1}}.$$

Как и d, $\bar d$ является нильпотентным, $\bar d^2 = 0$.

Пусть Ω_N - пространство всех $\binom{p}{q}$-форм с $p, q \le N$ и коэффициентами $\omega^{m_1\ldots m_p}_{n_1\ldots n_q}$, удовлетворяющими условию

$$L_{-k_1}\ldots L_{-k_r}\,\omega^{m_1\ldots m_p}_{n_1\ldots n_q} = 0 \qquad /r\text{- любое}/, \qquad /2.11/$$

если хотя бы один из индексов k, m, n принимает значение, превышающее N.

Нетрудно показать, что это определение Ω_N инвариантно относительно оператора $\bar d$, а именно: если $\omega^{(p)}_{(q)} \in \Omega_N$, то $\bar d\omega^{(p)}_{(q)} \in \Omega_N$.

В пространстве Ω_N определим дуальное преобразование $\underset{(N)}{*}$ следующим образом:

$$\underset{(N)}{*}\,\omega^{(p)}_{(q)} = \frac{1}{(N-p)!\,(N-q)!}\,\epsilon_{m_1\dots m_p m_{p+1}\dots m_N}\,\epsilon^{n_1\dots n_q n_{q+1}\dots n_N}\times \qquad /2.12/$$

$$\times\,\omega^{m_1\dots m_p}_{n_1\dots n_q}\, e_{n_{q+1}}\dots e_{n_N}\, e^{m_{p+1}}\dots e^{m_N},$$

где $\epsilon_{m_1\dots m_N}$ ($\epsilon^{n_1\dots n_N}$) – полностью антисимметричный по m(n) с $\epsilon_{12\dots N}$ ($\epsilon^{12\dots N}$) = 1 и равен нулю, если иначе.

Из определения /2.12/ видно, что под действием $\underset{(N)}{*}$ $\binom{p}{q}$ - форма $\in\Omega_N$ переходит в $\binom{N-q}{N-p}$ -форму $\in\Omega_N$. В частности, имеем

$$\underset{(N)}{*}1 = e_1\dots e_N\, e^1\dots e^N, \qquad \underset{(N)}{*}\, e_1\dots e_N\, e^1\dots e^N = 1.$$

Из /2.12/ следует также

$$\underset{(N)}{*}\,\underset{(N)}{*}\,\omega^{(p)}_{(q)} = (-1)^{(p+q)(N+1)}\,\omega^{(p)}_{(q)}. \qquad /2.13/$$

Определим теперь кодифференциальный оператор D следующим образом:

$$D\omega^{(0)}_{(q)} = 0,$$

$$D\omega^{(p)}_{(q)} = -(-1)^{(p+q)N}\,\frac{1}{p}\,\underset{(N)}{*}\,\bar d\,\underset{(N)}{*}\,\omega^{(p)}_{(q)}. \qquad /2.14/$$

Прямое вычисление дает

$$D\omega^{(p)}_{(q)} = (-1)^{p-1}\Big[L_{-k}\,\omega^{m_1\dots m_{p-1}k}_{n_1\dots n_q} - \frac{1}{2}(p-1)\,V^{m_{p-1}}_{k\ell}\,\omega^{m_1\dots m_{p-2}\,\ell k}_{n_1\dots n_q} + \qquad /2.15/$$

$$+\, q\,W^{\ell}_{n_1 k}\,\omega^{m_1\dots m_{p-1}k}_{\ell n_2\dots n_q}\Big]\, e_{m_1}\dots e_{m_{p-1}}\, e^{n_1}\dots e^{n_q}.$$

Таким образом, D переводит $\binom{p}{q}$-форму в $\binom{p-1}{q}$-форму и его явный вид не зависит от N.

Нильпотентность оператора D, $D^2 = 0$, следует из определения /2.14/, уравнения /2.13/ и нильпотентности $\bar d$.

Если определить внутреннее произведение форм $\alpha^{(p)}_{(q)}$ и $\beta^{(q)}_{(p)}$ как

$$\langle\alpha^{(p)}_{(q)}\cdot\beta^{(q)}_{(p)}\rangle \equiv \big(\alpha^{m_1\dots m_p}_{n_1\dots n_q}\,\big|\,\beta^{n_1\dots n_q}_{m_1\dots m_p}\big) \qquad /2.16/$$

со свойством

$$\big(\alpha^{m_1\dots m_p k}_{n_1\dots n_q}\,\big|\,L_k\,\beta^{n_1\dots n_q}_{m_1\dots m_p}\big) = \big(L_{-k}\,\alpha^{m_1\dots m_p k}_{n_1\dots n_q}\,\big|\,\beta^{n_1\dots n_q}_{m_1\dots m_p}\big), \qquad /2.17/$$

то мы имеем следующее дуальное соотношение:

$$\langle D\alpha^{(p)}_{(q)}\cdot\beta^{(q)}_{(p-1)}\rangle = (-1)^q\,\langle\alpha^{(p)}_{(q)}\cdot d\beta^{(q)}_{(p-1)}\rangle. \qquad /2.18/$$

При значении $D_0 = 26$ имеем следующее антикоммутационное соотношение для d и D [7,10-12]:

$$\{d, D\} = 2KT, \qquad /2.19/$$

где действие K и T на форму $\omega^{(p)}_{(q)}$ определяется по формулам

$$K\omega^{(p)}_{(q)} = \Big(L_0 - 1 + \sum_{i=1}^{p} m_i + \sum_{j=1}^{q} n_j\Big)\,\omega^{m_1\dots m_p}_{n_1\dots n_q}\, e_{m_1}\dots e_{m_p}\, e^{n_1}\dots e^{n_q}, \qquad /2.20/$$

$$T\omega^{(p)}_{(q)} = \omega^{m_1\dots m_p}_{n_1\dots n_q}\,\eta_{m_p k}\, e_{m_1}\dots e_{m_{p-1}}\, e^k e^{n_1}\dots e^{n_q}, \qquad /2.21/$$

K и T коммутируют друг с другом и с d и D,

$$[K, T] = [K, d] = [K, D] = [T, d] = [T, D] = 0. \qquad /2.22/$$

3. КОГОМОЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ В СЕКТОРЕ НЕВЕ -ШВАРЦА

Градуированную алгебру Вирасо для сектора Неве -Шварца составляют "четные" генераторы L_0, $L_{\pm n}$ /n = 1,2,.../ и "нечетные" генераторы $G_{\pm\lambda}$($\lambda = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$), удовлетворяющие коммутационным и антикоммутационным соотношениям:

$$[L_n, L_m] = V^k_{nm}\,L_k,$$

$$[L_n, L_{-m}] = W^k_{nm} L_k + W^k_{mn} L_{-k} + \eta_{nm}\left(2L_0 + \frac{D_0}{8}(n^2 - 1)\right),$$

$$[L_{-n}, L_{-m}] = V^k_{mn} L_{-k},$$

$$[L_0, L_{\pm m}] = \mp m L_{\pm m},$$

$$\{G_\lambda, G_\sigma\} = V^k_{\lambda\sigma} L_k,$$

$$\{G_\lambda, G_{-\sigma}\} = W^k_{\lambda\sigma} L_k + W^k_{\sigma\lambda} L_{-k} + \delta_{\lambda\sigma}\left(2L_0 + \frac{D_0}{2}\left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right)\right),$$

$$\{G_{-\lambda}, G_{-\sigma}\} = V^k_{\sigma\lambda} L_{-k}, \qquad /3.1/$$

$$[L_n, G_\lambda] = V^\tau_{n\lambda} G_\tau,$$

$$[L_n, G_{-\lambda}] = W^\tau_{n\lambda} G_\tau + W^\tau_{\lambda n} G_{-\tau},$$

$$[G_\lambda, L_{-n}] = W^\tau_{\lambda n} G_\tau + W^\tau_{n\lambda} G_{-\tau},$$

$$[L_{-n}, G_{-\lambda}] = -V^\tau_{n\lambda} G_{-\tau},$$

$$[L_0, G_{\pm\lambda}] = \mp\lambda G_{\pm\lambda},$$

где

$$V^p_{\lambda\sigma} = 2\delta_{p,\lambda+\sigma}, \quad V^\tau_{n\lambda} = -V^\tau_{\lambda n} = \left(\frac{n}{2} - \lambda\right)\delta_{\tau,n+\lambda},$$

$$/3.2/$$

$$W^p_{\lambda\sigma} = 2\delta_{p,\lambda-\sigma}, \quad W^\tau_{n\lambda} = \left(\frac{n}{2} + \lambda\right)\delta_{\tau,n-\lambda}, \quad W^\tau_{\lambda n} = \left(\frac{n}{2} + \lambda\right)\delta_{\tau,\lambda-n}.$$

Вводя суперииндексы $A \equiv n, \lambda$ и супергенераторы F_A с идентификацией $F_n \equiv L_n$, $F_\lambda \equiv G_\lambda$, перепишем /3.1/ в следующем компактном виде:

$$[F_A, F_B]_{-(A,B)} = V^C_{AB} F_C,$$

$$[F_A, F_{-B}]_{-(A,B)} = W^C_{AB} F_C + W^C_{BA} F_{-C} + \eta_{AB}\mathcal{F}(A), \qquad /3.3/$$

$$[F_{-A}, F_{-B}]_{-(A,B)} = V^C_{BA} F_{-C}, \quad [L_0, F_{\pm A}] = \mp A F_{\pm A}.$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$[F_A, F_B]_{-(A,B)} \equiv F_A F_B - (A,B) F_B F_A, \ldots,$$

$$(A) \equiv (-1)^{[A]}, \quad (A,B) \equiv (-1)^{[A]\cdot[B]},$$

$$(A_1 A_2 \ldots, B_1 B_2 \ldots) \equiv (-1)^{([A_1]+[A_2]+\ldots)\cdot([B_1]+[B_2]+\ldots)},$$

$[A]$ - градуировка индекса A, а именно: $[n] = 0$, $[\lambda] = 1$,

$$\mathcal{F}(A) \equiv 2L_0 + \frac{D_0}{8}[A^2\delta(A) - 1],$$

$$\delta(A) = \begin{cases} 1, & A = n, \\ 4, & A = \lambda, \end{cases} \qquad /3.4/$$

$$\eta_{nm} = n\delta_{nm}, \quad \eta_{\lambda\sigma} = \delta_{\lambda\sigma}, \quad \eta_{n\lambda} = \eta_{\lambda n} = 0.$$

Ненулевые значения структурных констант даны в /2.2/ и /3.2/.

Отметим, что V^C_{AB} обладает свойством симметрии

$$V^C_{AB} = -(A,B)\, V^C_{BA}, \qquad /3.5/$$

в то время как

$$U_{AB,C} \equiv \frac{1}{2}(A,B)\,\eta_{CD} V^D_{AB} + \eta_{BD} W^D_{CA} \qquad /3.6/$$

обладает обратной симметрией:

$$U_{AB,C} = (A,B)\, U_{BA,C}. \qquad /3.7/$$

Применяя обобщенное тождество Якоби для супергенераторов F_A /15/

$$[F_C, [F_A, F_B]_{-(A,B)}]_{-(AB,C)} + (AB,C)\,[F_A, [F_B, F_C]_{-(B,C)}]_{-(BC,A)} +$$

$$/3.8/$$

$$+ (CA,B)\,[F_B, [F_C, F_A]_{-(C,A)}]_{-(CA,B)} = 0$$

к алгебре /3.3/, можно вывести следующие тождества для структурных констант:

$$V^D_{AB} V^E_{CD} + (AB,C)\, V^D_{BC} V^E_{AD} + (CA,B)\, V^D_{CA} V^E_{BD} = 0, \qquad /3.9/$$

$$V_{CA}^{D}W_{BD}^{E}-W_{BA}^{D}W_{DC}^{E}+(A,C)W_{BC}^{D}W_{DA}^{E}=0\,, \qquad /3.10/$$

$$V_{CD}^{E}W_{AB}^{D}-(A,C)V_{AD}^{E}W_{CB}^{D}-V_{CA}^{D}W_{DB}^{E}+W_{CD}^{E}W_{BA}^{D}-$$

$$-(A,C)W_{AD}^{E}W_{BC}^{D}=2E[(A,C)\eta_{CB}\delta_{A}^{E}-\eta_{AB}\delta_{C}^{E}]\,, \qquad /3.11/$$

$$\eta_{BD}V_{CA}^{D}-\eta_{CD}W_{BA}^{D}+(A,C)\eta_{AD}W_{BC}^{D}=0\,, \qquad /3.12/$$

$$\eta_{BD}V_{CA}^{D}B^{2}\delta(B)-\eta_{CD}W_{BA}^{D}C^{2}\delta(C)+(A,C)\eta_{AD}W_{BC}^{D}A^{2}\delta(A)=0. \qquad /3.13/$$

Отметим также полезное тождество

$$(C,D)W_{AC}^{D}W_{BD}^{C}=\frac{1}{4}\eta_{AB}[5A^{2}\delta(A)-8A-1]. \qquad /3.14/$$

Суперструнные формы определяются как обобщение /2.6/:

$$\omega_{(q)}^{(p)}\equiv\omega_{B_1\ldots B_q}^{A_1\ldots A_p}\,e_{A_1}\ldots e_{A_p}\,e^{B_1}\ldots e^{B_q}\,, \qquad /3.15/$$

где дуальные базисы $\{e_A\}$, $\{e^B\}$ подчиняются правилу умножения:

$$e_{A_1}e_{A_2}=-(A_1,A_2)\,e_{A_2}e_{A_1}\,,\quad e^{B_1}e^{B_2}=-(B_1,B_2)\,e^{B_2}e^{B_1}\,,\quad e_A e^B=-(A,B)e^B e_A,$$

ввиду чего всегда можно считать, что функционалы $\omega_{B_1\ldots B_q}^{A_1\ldots A_p}$ обладают свойством симметрии:

$$\omega_{\ldots B_j B_{j+1}\ldots}^{\ldots A_i A_{i+1}\ldots}=-(A_i,A_{i+1})\,\omega_{\ldots B_j B_{j+1}\ldots}^{\ldots A_{i+1} A_i\ldots}=-(B_j,B_{j+1})\,\omega_{\ldots B_{j+1} B_j\ldots}^{\ldots A_i A_{i+1}\ldots}\,.$$

Дифференциальный оператор d определяется его действием на $\binom{0}{0}$-форму и на базисы e_A, e^B:

$$d\psi=F_A\psi\cdot e^A\,,$$

$$de_A=(B,C)W_{AB}^{C}e^B e_C\,, \qquad /3.16/$$

$$de^A=-\frac{1}{2}V_{BC}^{A}e^B e^C\,,$$

и правилом Лейбница /2.8/.

Результат вычисления приводит к следующей общей формуле:

$$d\omega_{(q)}^{(p)}=(-1)^{p+q}(B_1\ldots B_q,B_{q+1})[(A_1\ldots A_p,B_{q+1})F_{B_{q+1}}\omega_{B_1\ldots B_q}^{A_1\ldots A_p}+$$

$$+pW_{CB_{q+1}}^{A_p}\omega_{B_1\ldots B_q}^{A_1\ldots A_{p-1}C}-\frac{1}{2}qV_{B_{q+1}B_1}\omega_{CB_2\ldots B_q}^{A_1\ldots A_p}]e_{A_1}\ldots e_{A_p}e^{B_1}\ldots e^{B_{q+1}}\,, \qquad /3.17/$$

которая является обобщением /2.9/. Нильпотентность оператора d доказывается с помощью /3.9/ и /3.10/.

Для кодифференциального оператора D мы получаем следующее обобщение /2.15/:

$$D\omega_{(q)}^{(p)}=(-1)^{p-1}[F_{-C}\,\omega_{B_1\ldots B_q}^{A_1\ldots A_{p-1}C}-\frac{1}{2}(p-1)V_{CD}^{A_{p-1}}\omega_{B_1\ldots B_q}^{A_1\ldots A_{p-2}DC}+$$

$$+(C,DA_1\ldots,A_{p-1})qW_{B_1C}^{D}\omega_{DB_2\ldots B_q}^{A_1\ldots A_{p-1}C}]e_{A_1}\ldots e_{A_{p-1}}e^{B_1}\ldots e^{B_q}\,. \qquad /3.18/$$

При значении $D_0=10$ имеем антикоммутационное соотношение /2.19/:

$$\{d,D\}=2KT. \qquad /3.19/$$

При этом

$$K\omega_{(q)}^{(p)}=(L_0-\frac{1}{2}+\sum_i A_i+\sum_j B_j)\,\omega_{B_1\ldots B_q}^{A_1\ldots A_p}\,e_{A_1}\ldots e_{A_p}e^{B_1}\ldots e^{B_q}\,, \qquad /3.20/$$

$$T\omega_{(q)}^{(p)}=(A_1\ldots A_{p-1},A_p)\,\omega_{B_1\ldots B_q}^{A_1\ldots A_p}\eta_{A_pC}\,e_{A_1}\ldots e_{A_{p-1}}e^{C}e^{B_1}\ldots e^{B_q}\,, \qquad /3.21/$$

K и T по-прежнему коммутируют друг с другом и с d и D.

4. КОГОМОЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ В СЕКТОРЕ РАМОНДА

Супералгебра Вирасо для сектора Рамонда состоит из четных генераторов L_0, $L_{\pm n}$ /$n=1,2,\ldots$/ и нечетных генераторов G_0, $G_{\pm n}$, удовлетворяющих коммутационным и антикоммутационным соотношениям:

$$[L_n,L_m]=V_{nm}^{k}L_k\,,$$

$$[L_n, L_{-m}] = W^k_{nm} L_k + W^k_{mn} L_{-k} + \eta_{nm}\left(2L_0 + \frac{D_0}{8} n^2\right),$$

$$[L_{-n}, L_{-m}] = V^k_{mn} L_{-k},$$

$$\{G_{\underline{n}}, G_{\underline{m}}\} = V^k_{\underline{nm}} L_k,$$

$$\{G_{\underline{n}}, G_{-\underline{m}}] = W^k_{\underline{nm}} L_k + W^k_{\underline{mn}} L_{-k} + \delta_{nm}\left(2L_0 + \frac{D_0}{2} n^2\right),$$

$$\{G_{-\underline{n}}, G_{-\underline{m}}] = V^k_{\underline{nm}} L_{-k},$$

$$\{G_0, G_{\pm\underline{m}}\} = 2L_{\pm m}, \qquad G_0^2 = L_0,$$

$$[L_n, G_{\underline{m}}] = V^{\underline{k}}_{n\underline{m}} G_{\underline{k}},$$

$$[L_n, G_{-\underline{m}}] = W^{\underline{k}}_{n\underline{m}} G_{\underline{k}} + W^{\underline{k}}_{\underline{m}n} G_{-\underline{k}} + \delta_{nm}\frac{3n}{2} G_0, \qquad /4.1/$$

$$[G_{\underline{m}}, L_{-n}] = W^{\underline{k}}_{\underline{m}n} G_{\underline{k}} + W^{\underline{k}}_{n\underline{m}} G_{-\underline{k}} + \delta_{mn}\frac{3n}{2} G_0,$$

$$[L_{-n}, G_{-\underline{m}}] = -V^{\underline{k}}_{n\underline{m}} G_{-\underline{k}},$$

$$[L_0, G_{\pm\underline{m}}] = \mp m G_{\pm\underline{m}},$$

$$[G_0, L_{\pm m}] = \mp\frac{m}{2} G_{\pm\underline{m}},$$

$$[G_0, L_0] = 0,$$

где

$$V^k_{\underline{nm}} = 2\delta_{k,n+m}, \quad V^{\underline{k}}_{n\underline{m}} = -V^{\underline{k}}_{\underline{m}n} = \left(\frac{n}{2} - m\right)\delta_{k,n+m},$$

$$W^k_{\underline{nm}} = 2\delta_{k,n-m}, \quad W^{\underline{k}}_{n\underline{m}} = \left(\frac{n}{2} + m\right)\delta_{k,n-m}, \quad W^{\underline{k}}_{\underline{m}n} = \left(\frac{n}{2} + m\right)\delta_{k,m-n}. \qquad /4.2/$$

Введя обозначения: $A \equiv n, \underline{n}$, $F_n \equiv L_n$, $F_{\underline{n}} \equiv G_{\underline{n}}$, перепишем /4.1/ в следующем виде:

$$[F_A, F_B]_{-(A,B)} = V^C_{AB} F_C,$$

$$[F_A, F_{-B}]_{-(A,B)} = W^C_{AB} F_C + W^C_{BA} F_{-C} + \eta_{AB}\mathcal{F}(A) + \lambda_{AB} G_0,$$

$$[F_{-A}, F_{-B}]_{-(A,B)} = V^C_{BA} F_{-C},$$

$$[L_0, F_{\pm A}]_- = \mp A F_{\pm A}, \qquad /4.3/$$

$$[G_0, F_A]_{-(A)} = \tau^B_A F_{-B}, \qquad [F_A, G_0]_{-(A)} = \tau^B_A F_B,$$

$$[L_0, G_0]_- = 0, \qquad G_0^2 = L_0,$$

где

$$\mathcal{F}(A) \equiv 2L_0 + \frac{D_0}{8} A^2 \delta(A),$$

$$\delta(A) = \begin{cases} 1, & A = n, \\ 4, & A = \underline{n}, \end{cases} \qquad [A] = \begin{cases} 0, & A = n, \\ 1, & A = \underline{n}, \end{cases} \qquad /4.4/$$

$$\eta_{nm} = n\delta_{nm}, \quad \eta_{\underline{nm}} = \delta_{nm}, \quad \eta_{n\underline{m}} = \eta_{\underline{m}n} = 0,$$

$$\lambda_{n\underline{m}} = \lambda_{\underline{m}n} = \frac{3}{2} n\delta_{nm}, \quad \lambda_{nm} = \lambda_{\underline{nm}} = 0,$$

$$\tau^{\underline{n}}_m = \frac{m}{2}\delta_{mn}, \quad \tau^n_{\underline{m}} = 2\delta_{mn}, \quad \tau^n_m = \tau^{\underline{n}}_{\underline{m}} = 0.$$

Ненулевые структурные константы даны в /2.2/ и /4.2/.

Свойства симметрии /3.5/ - /3.7/ остаются в силе и в этом секторе. Остаются без изменения и тождества /3.9/, /3.10/, /3.12/, /3.13/, а вместо /3.11/ имеем

$$V^E_{CD} W^D_{AB} - (A,C) V^E_{AD} W^D_{CB} - V^D_{CA} W^E_{DB} + W^E_{CD} W^D_{BA} - (A,C) W^E_{AD} W^D_{BC} =$$
$$= 2E[(A,C)\eta_{CB}\delta^E_A - \eta_{AB}\delta^E_C] + (A,C)\lambda_{CB}\tau^E_A - \lambda_{AB}\tau^E_C. \qquad /4.5/$$

Кроме того, имеем

$$V^D_{CA}\lambda_{BD} - W^D_{BA}\lambda_{CD} + (A,C) W^D_{BC}\lambda_{AD} = 0. \qquad /4.6/$$

Для практических вычислений полезно использовать также следующие тождества:

$$(C,D)\, W^{D}_{AC} W^{C}_{BD} = \frac{5}{4}\eta_{AB}\, \delta(A)\, A(A-1)\,,$$

$$\lambda_{AB}\lambda_{BC} = \frac{9}{4} A^2 \delta_{AC}\,, \qquad r^{D}_{B}\, r^{A}_{D} = A\delta^{A}_{B}\,,$$

$$\lambda_{AB} = \frac{3}{4} r^{C}_{A}\eta_{CB}\, \delta(C)\,, \qquad \delta(A)\lambda_{AB} = 3 r^{C}_{A}\eta_{CB}\,,$$

$$r^{A}_{D}\lambda_{AB} = \frac{3}{4}\eta_{DB} B\delta(B)\,, \qquad (A)\, r^{A}_{D}\lambda_{AB} = -\frac{3}{4}(B)\,\eta_{DB} B\delta(B)\,,$$

$$\delta(A)\, r^{A}_{D}\lambda_{AB} = 3\eta_{BD} B\,,$$

$$(B_1 B_2 \ldots B_r, A)(B_1)(B_2)\ldots(B_r)\lambda_{AC} = (B_1 B_2 \ldots B_r, C)\lambda_{AC}\,, \qquad /4.7/$$

$$(B_1 B_2 \ldots B_r, A)(B_1)(B_2)\ldots(B_r)\, r^{C}_{A} = (B_1 B_2 \ldots B_r, C)\, r^{C}_{A}\,,$$

$$V^{A}_{BE} r^{E}_{C} + (C)\, V^{A}_{EC} r^{E}_{B} - r^{A}_{E} V^{E}_{BC} = 0\,,$$

$$W^{A}_{BE} r^{E}_{C} - W^{A}_{EC} r^{E}_{B} + (C)\, r^{A}_{E} W^{E}_{BC} = 0\,,$$

$$r^{C}_{B}\eta_{CA} - r^{C}_{A}\eta_{CB} = (A)\lambda_{AB} = -(B)\lambda_{AB}\,.$$

В силу того, что тождества /3.9/ и /3.10/ остаются без изменения, нильпотентные операторы d и D можно по-прежнему определить по формулам /3.17/ и /3.18/. Однако антикоммутатор $\{d, D\}$ теперь отличается от /3.19/, а именно /при значении $D_0 = 10$/:

$$\{d, D\} = 2kT + SR\,, \qquad /4.8/$$

где

$$K\omega^{(p)}_{(q)} = (L_0 + \Sigma A_i + \sum_j B_j)\,\omega^{A_1\ldots A_p}_{B_1\ldots B_q}\, e_{A_1}\ldots e_{A_p} e^{B_1}\ldots e^{B_q}\,,$$

$$R\omega^{(p)}_{(q)} = [(A_1)\ldots(A_p)(B_1)\ldots(B_q)\, G_0\, \omega^{A_1\ldots A_p}_{B_1\ldots B_q} +$$

$$/4.9/$$

$$+ p(B_1)\ldots(B_q)\, r^{A_1}_{D}\,\omega^{DA_2\ldots A_p}_{B_1\ldots B_q} + q\, r^{D}_{B_q}\,\omega^{A_1\ldots A_p}_{B_1\ldots B_{q-1}D}]\, e_{A_1}\ldots e_{A_p} e^{B_1}\ldots e^{B_q}\,,$$

$$S\omega^{(p)}_{(q)} = (A_1\ldots A_{p-1}, A_p)(A_p)(B_1)\ldots(B_q)\,\omega^{A_1\ldots A_p}_{B_1\ldots B_q}\,\lambda_{A_pC}\, e_{A_1}\ldots e_{A_{p-1}} e^{C} e^{B_1}\ldots e^{B_q}\,,$$

T по-прежнему определяется уравнением /3.21/.

Имеют место следующие соотношения коммутации:

$$R^2 = K\,, \quad [R, T] = S\,, \quad \{S, R\} = 0\,,$$

$$/4.10/$$

$$[d, S] = [D, S] = [d, R] = [D, R] = 0\,,$$

K и T по-прежнему коммутируют друг с другом и с d и D.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schwartz J.H. - Phys.Rep., 1982, 89C, p.223.
2. Polyakov A.M. - Phys.Lett., 1981, 103B, p.207, 211.
3. Green M.B., Schwartz J.H. - Phys.Lett., 1984, 149B, p.117.
4. Gross D.J. et al. - Nucl.Phys., 1985, B256, p.253.
5. Siegel W. - Phys.Lett., 1985, 151B, p.391, 396.
6. Siegel W., Zwielbach B. - Nucl.Phys., 1986, B263, p.105.
7. Banks T., Peskin M. - Nucl.Phys., 1986, B264, p.513.
8. Neveu A., Nikolai H., West P.C. - Phys.Lett., 1986, 167B, p.303; Nucl.Phys., 1986, B264, p.573.
9. Neveu A., West P.C. - Nucl.Phys., 1986, B268, p.126.
10. Floratos E.G., Kazama Y., Tamvakis K. - Phys.Lett., 1986, 166B, p.295.
11. Pfeffer D., Ramond P., Rodgers V.G.J. Preprint UFTP 85-19, 1985.
12. Aratyn H., Zimerman A.H. - Phys.Lett., 1986, B168, p.75.
13. Virasoro M. - Phys.Rev., 1970, D1, p.2933.
14. Kazama Y. CERN Preprint TH 4518/86, 1986.
15. Dao Vong Duc, Nguyen Thi Hong. - Ann.Inst.Henri Poincare, 1982, v.36, p.211.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 июня 1987 года.