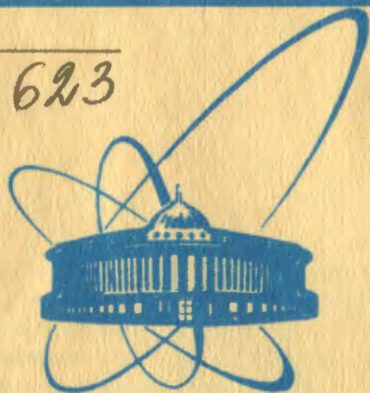


H-623



сообщения
Объединенного
института
ядерных
исследований
Дубна

3572/2-81

20/11-8

P3-81-211

Ю.В.Никитенко, Ю.В.Таран

О РАЗМЫТИИ ФАЗЫ
ЛАРМОРОВСКОЙ ПРЕЦЕССИИ УХН
В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

1981

1. ВВЕДЕНИЕ

В^{1/} классически было рассмотрено размытие фазы $\phi = \gamma \int_0^t H dt$ ларморовской прецессии ультрахолодных нейтронов /УХН/ при их движении в неоднородном магнитном поле магниторезонансного спектрометра накопительного типа /здесь γ - гиромангнитное отношение нейтрона; H - напряженность магнитного поля; t - время наблюдения/. Для относительной дисперсии фазы $\overline{\chi^2} = [\overline{\phi^2} - (\overline{\phi})^2] / (\overline{\phi})^2$ было получено следующее выражение:

$$\overline{\chi^2}(t) = 2\delta_z^2 \frac{\tau_c^2}{t^2} \left(\frac{t}{\tau_c} - 1 + e^{-t/\tau_c} \right), \quad /1/$$

где $\delta_z^2 = [\overline{H_z^2} - (\overline{H_z})^2] / (\overline{H_z})^2$ - относительная дисперсия z-компоненты магнитного поля, вокруг которой осуществляется прецессия /принято, что $H_z \gg H_x, H_y$ /; τ_c - время корреляции, характеризующее скорость изменения магнитного поля в системе координат, связанной с нейтроном. Предельные случаи:

$$\overline{\chi^2} = \delta_z^2 \quad \text{при} \quad t \ll \tau_c, \quad /2/$$

$$\overline{\chi^2} = 2\delta_z^2 \frac{\tau_c}{t} \quad \text{при} \quad t \gg \tau_c. \quad /3/$$

В^{2/} задача была решена квантовомеханически и получены тождественные результаты*.

В обоих случаях была взята корреляционная функция простейшего экспоненциального вида. В^{3/} для проверки теории были проведены расчеты $\overline{\chi^2}(t)$ методом Монте-Карло для магнитного поля соленоидального типа при диффузном отражении монохроматических УХН от стенок цилиндрической накопительной камеры диаметром $\phi = 50$ см и длиной $h = 8$ см. Результаты расчетов находились в согласии с уравнением /1/, однако количественное согласие было получено путем ошибочного отождествления τ_c со средним временем τ_0 свободного пробега УХН в камере.

* С учетом ошибки в уравнении /Б6/^{2/}, в которое необходимо ввести множитель 2, и переобозначения $\tau_c \equiv \ell / \sqrt{2} v$, где v - скорость УХН, ℓ - средний размер областей неоднородности.

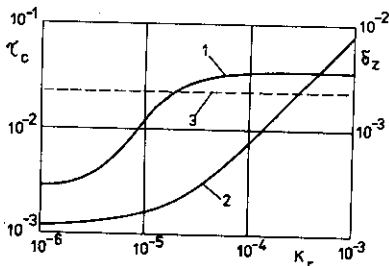


Рис.1. Зависимости τ_c /кривая 1/ и δ_z /кривая 2/ от k_r для поля вида /4/; кривая 3 - среднее время τ_0 свободного пробега УХН.

Мы повторили эти расчеты для прямоугольной камеры с размерами $a \times b \times c = 50 \times 50 \times 10$ см³, заменив для ускорения счета соленоидальное поле близким по топографии полем вида

$$H_z(r, z) \sim (1 + k_r \cdot r) \left[1 + k_z \left(1 - \frac{4}{h} |z| \right) \right], \quad /4/$$

где r , z - цилиндрические координаты; k_r и k_z - произвольные параметры. Для получения значения τ_c при данных k_r и k_z использовалось уравнение /3/. Зависимость τ_c от k_r при $k_z = 1,8 \cdot 10^{-4}$ представлена на рис.1 /кривая 1/. При значении $k_r = 3 \cdot 10^{-4}$ см⁻¹, соответствующем расчетам в /3/, вклад радиальной неоднородности z -компоненты магнитного поля в величину δ_z /кривая 2 на рис.1/ существенно превышает вклад от осевой неоднородности. В этом случае значение τ_c в основном обусловлено движением УХН вдоль камеры, то есть перпендикулярно оси z , в то время как значение τ_0 определяется в основном движением УХН поперек камеры /вдоль оси z /. Близость численных значений τ_c и τ_0 является случайной. Это подтверждается существенной разницей между τ_c и τ_0 при малой радиальной неоднородности.

В связи с изложенным нами было проведено дополнительное рассмотрение задачи о размытии фазы ларморовской прецессии с целью изучения влияния на время корреляции τ_c таких факторов, как конфигурация камеры, топография магнитного поля, характер отражения УХН от стенок, тяготение.

2. ТЕОРИЯ

Пусть вдоль оси z магнитное поле изменяется периодически, так что между противоположными стенками камеры укладывается n периодов. Обозначим средний путь нейтрона при движении вдоль оси z от стенки до стенки через L . Тогда для времени корреляции τ_c можно ввести следующее выражение:

$$\tau_c = \frac{L}{2\pi n v}. \quad /5/$$

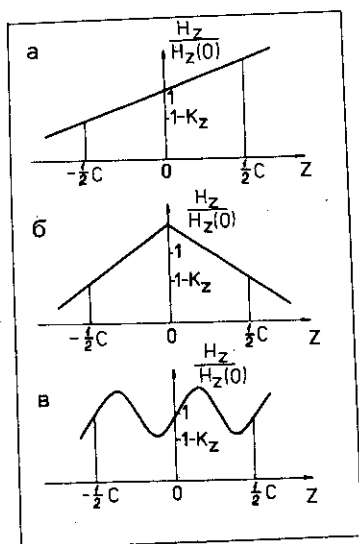


Рис.2. Периодическое магнитное поле с числом периодов n : а/ $n = 0,5$; б/ $n = 1$; в/ $n = 2$.

Как показано в ^{4/}, для цилиндрического нейтроновода с полностью диффузным отражением от его стенок средний путь равен

$$L = h \left(\frac{h}{\phi} + 1 \right). \quad /6/$$

Нетрудно показать, что для прямоугольного нейтроновода со сторонами a и b и длиной c /вдоль оси z / средний путь равен

$$L = c \left(1 + \frac{ab + ac + bc}{2ab} \right). \quad /7/$$

Предельные случаи для уравнения /7/:

1/ $c \gg a = b$ /длинная труба, градиент поля вдоль ее оси/:

$$L = \frac{c^2}{a}; \quad /8/$$

2/ $c \ll a = b$ /плоская камера, градиент поперек камеры/:

$$L = \frac{3}{2} c; \quad /9/$$

3/ $a \ll b = c$ /плоская камера, градиент вдоль камеры/:

$$L = \frac{c^2}{2a}. \quad /10/$$

В случае полностью зеркального отражения от стенок цилиндрического нейтроновода средний путь УХН вдоль его оси равен ^{4/}

$$L = 2h. \quad /11/$$

Эта формула применима и для прямоугольного нейтроновода для любого из трех ортогональных направлений к его стенкам.

Для проверки указанных соотношений были выполнены численные расчеты τ_c методом Монте-Карло. Использовались следующие конфигурации поля:

$$a/ \quad H(z) \sim 1 + k_z \frac{2z}{c}, \quad /12/$$

что соответствует периодическому полю с $n=0,5$ /рис.2а/;

$$б/ H(z) \sim 1 + k_z \left(1 - \frac{4}{c} |z|\right) \quad /13/$$

с $n = 1$ /рис.2б/;

$$в/ H(z) \sim 1 + k_z \sin 4\pi \frac{z}{c} \quad /14/$$

с $n = 2$ /рис.2в/.

Скорость УХН v принята равной $5,7 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$. Специальные расчеты показали слабое влияние учета спектра УХН на результаты.

Степень согласия между расчетным значением τ_c , полученным методом Монте-Карло, и теоретической оценкой /5/ будем в дальнейшем характеризовать их отношением κ .

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

На рис.3 представлены зависимости времени корреляции τ_c от длины c прямоугольного нейтронотода со сторонами $a = b = 10$ см при диффузном отражении от его стенок для $n = 0,5$ и 1 . Сплошные кривые 1 и 2 построены по уравнению /5/ для случая, описанного соотношением /8/, с подгонкой параметра κ для наилучшего описания численных значений τ_c при больших длинах трубы. Были получены значения $\kappa(n=0,5) = 0,53$ и $\kappa(n=1) = 0,9$. Аналогичные расчеты для $n=2$ дали $\kappa = 0,72$.

Переход от диффузного отражения к зеркальному, показанный на рис.4 для $n=0,5$ при прочих неизменных условиях, приводит к существенному сокращению времени корреляции /в 6-8 раз при больших значениях c /. Согласие численных расчетов с теоретическими оценками достаточно хорошее: $\kappa(n=0,5) = 0,7$.

Результаты расчетов τ_c для плоской диффузной камеры с поперечным и продольным градиентом магнитного поля представлены на рис.5 и 6 соответственно. Для поперечного градиента в соответствии с /9/ величина τ_c не зависит от $a = b$ при их больших значениях; соответствующие значения κ равны $0,83$ ($n=0,5$) и $0,91$ ($n=1$). При этом переход к зеркальному отра-

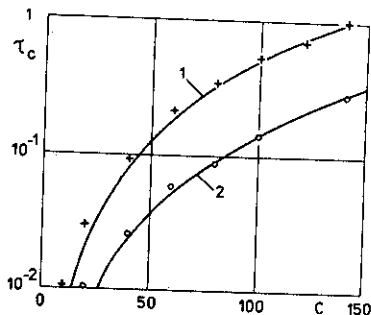


Рис.3. Зависимость τ_c от длины c для диффузного отражения с градиентом магнитного поля вдоль c при $n=0,5$ /крестики и кривая 1/ и $n=1$ /кружки и кривая 2/. $\tau_c = c$, c - см.

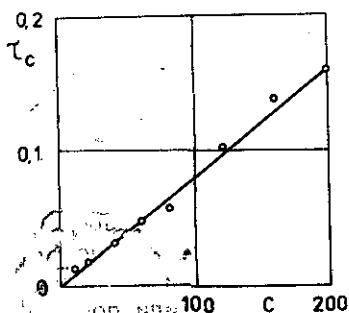


Рис. 4. Зависимость τ_c от длины c для зеркального отражения с градиентом магнитного поля вдоль c при $n=0,5$.

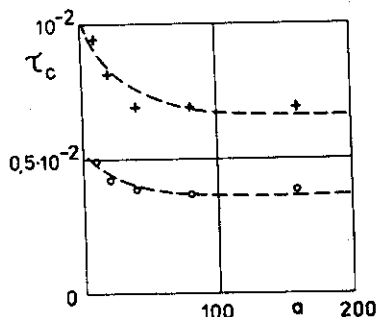
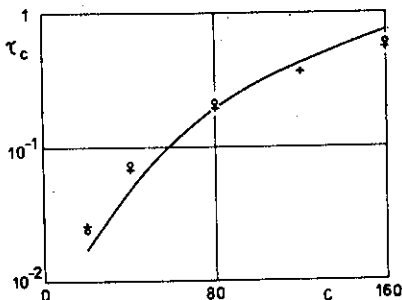


Рис. 5. Зависимость τ_c от размеров $a=b$ для диффузного отражения при $c=10$ см с поперечным /по c / градиентом магнитного поля при $n=0,5$ /крестики/ и l /кружки/.

Рис. 6. Зависимость τ_c от размеров $b=c$ для диффузного отражения при $a=10$ см с вертикальным продольным /по c / градиентом магнитного поля ($n=0,5$) без учета гравитации /крестики/ и с ее учетом /кружки/.



жению, как это видно из сравнения /9/ и /11/, должен приводить к увеличению τ_c в $4/3$ раза. Численные расчеты подтвердили это предсказание. Для продольного градиента зависимость τ_c от $b=c$ удовлетворительно описывается уравнением /10/ при κ ($n=0,5$) = 0,94. Замена диффузного отражения от стенок плоской камеры на зеркальное, как и в случае длинной трубы, приводит к сильному уменьшению времени корреляции τ_c , результаты численных расчетов которого, представленные на рис. 7, удовлетворительно описываются /11/ при κ ($n=0,5$) = 0,66.

В случае плоской камеры, для которой наименьшая сторона направлена горизонтально /вертикальная ориентация плоской камеры/, было интересно выяснить влияние гравитационного поля на размытие фазы. Как и ожидалось, такое влияние для диффузного отражения практически не наблюдается при любом направлении градиента магнитного поля /для продольного градиента, совпа-

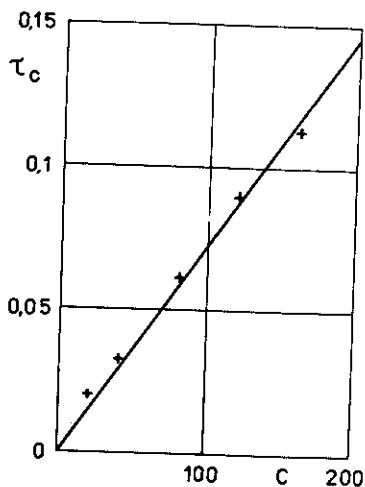


Рис. 7. Зависимость τ_c от размеров $b=c$ для зеркального отражения при $a = 10$ см с продольным /по c / градиентом ($n=0,5$) без учета гравитации.

дающего по направлению с силой тяготения, результаты расчетов времени корреляции τ_c показаны на рис. 6. При зеркальном отражении и горизонтальном /продольном или поперечном/ градиенте магнитного поля влияние гравитации также отсутствует. Однако при вертикальном продольном градиенте учет гравитации качественно изменяет картину усреднения магнитного поля движущимся нейтроном,

которая на рис. 8 иллюстрируется расчетной зависимостью $(\bar{\chi}^2)^{1/2}$ от $t^{-1/2}$ для камеры с размерами $a=10$ см и $b=c=80$ см при $n=0,5$ /кривая 1/. Только при малых временах наблюдения $t < 0,5$ с /эта зависимость описывается уравнением /1/. При $t > 0,5$ с наблюдается существенное отклонение от теоретической зависимости и даже насыщение при больших временах t /для сравнения там же приведена соответствующая кривая 2 без учета гравитации, которая хорошо описывается уравнением /1/ для любых значений t /.

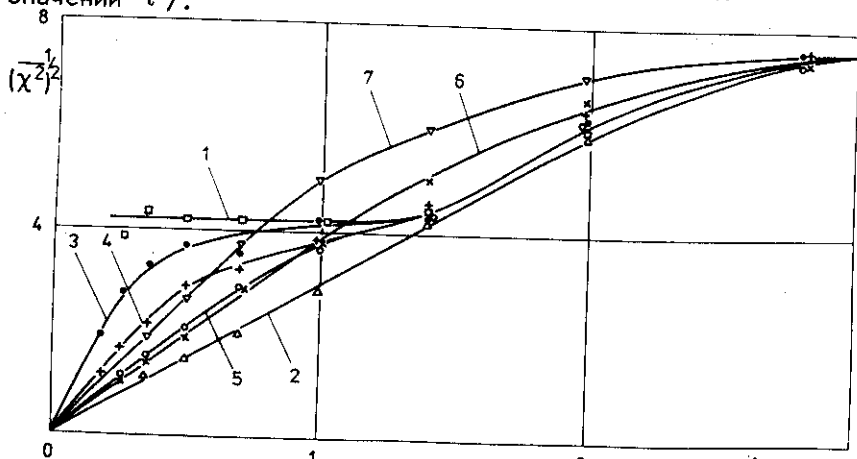


Рис. 8. Зависимость $(\bar{\chi}^2)^{1/2}$ /в ед. 10^{-4} / от $t^{-1/2}$ для магнитного поля вида /1/ с градиентом, направленным вертикально и вдоль стороны c : 1/ с учетом гравитации, $\epsilon \sim 0$; 2/ без учета гравитации, $\epsilon = 0$; 3-7/ с учетом гравитации, $\epsilon = 10^{-2}$; $3 \cdot 10^{-2}$; 10^{-1} ; $3 \cdot 10^{-1}$; 1 соответственно.

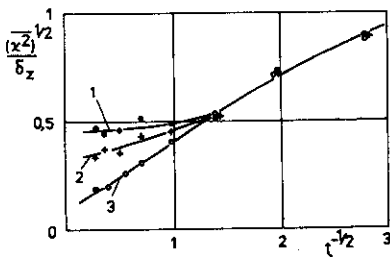
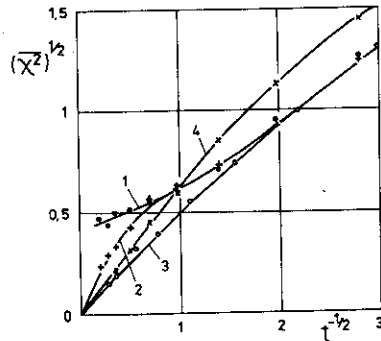


Рис. 10. Зависимость величины $(\bar{\chi}^2)^{1/2} / \delta_z$ / в ед. 10^{-3} / от $t^{-1/2}$ для магнитного поля вида /4/ при $k_r = 3 \cdot 10^{-4}$ и $k_z = 1,8 \cdot 10^{-4}$ /сторона с направлена вертикально/ с учетом гравитации при значениях ϵ : 1/ 0; 2/ 10^{-2} ; 3/ 10^{-1} ; 4/ 1.

Рис. 9. Зависимость величины $(\bar{\chi}^2)^{-1/2}$, нормированной на δ_z , от $t^{-1/2}$ с учетом гравитации для зеркального отражения и магнитного поля вида /15/ при значениях $k_z = 0,35 \cdot 10^{-4}$ и k_y : 1/ $0,11 \cdot 10^{-4}$; 2/ $0,35 \cdot 10^{-4}$; 3/ $1,1 \cdot 10^{-4}$.



Отмеченный эффект насыщения может быть понят, если учесть, что при зеркальном отражении для каждого нейтрона имеется своя область значений действующего на него магнитного поля и свое среднее по времени значение этого поля. Это приводит к конечной дисперсии действующего на ансамбль нейтронов магнитного поля, не зависящей, начиная с определенного момента, от времени.

Учет диффузного отражения приводит к исчезновению насыщения /кривые 3-7 на рис. 8, рассчитанные для относительной доли ϵ диффузных отражений 10^{-2} ; $3 \cdot 10^{-2}$; 10^{-1} ; $3 \cdot 10^{-1}$ и 1 соответственно/. Вид кривых при $\epsilon < 0,1$, по-видимому, свидетельствует о наличии второго времени корреляции, характеризующего изменение среднего во времени магнитного поля, действующего на нейтрон. Этот вопрос нуждается в дополнительном исследовании. Только при $\epsilon > 0,3$ расчетные кривые $\bar{\chi}^2(t)$ могут быть удовлетворительно описаны уравнением /1/ и может быть определено время корреляции τ_c .

В реальной топографии магнитного поля имеются градиенты и по другим направлениям. На рис. 9 представлены расчетные зависимости $(\bar{\chi}^2)^{1/2}$ от $t^{-1/2}$ для зеркальной камеры с теми же размерами, что и на рис. 8, но с полем вида

$$H(y, z) \sim (1 + k_y \frac{2y}{b})(1 + k_z \frac{2z}{c}). \quad /15/$$

Параметр k_z был тот же, что и на рис. 8, величина k_y варьировалась так, что отношение k_y/k_z принимало значение $3 \cdot 10^{-1}$.

1 и 3 /кривые 1-3 на рис.9/. Введение горизонтального продольного градиента расширяло диапазон времен t , при которых расчетные зависимости описываются уравнением /1/. Однако насыщение неизбежно наступало, но только при больших временах t . При этом можно ожидать, что введение значительно меньшего, чем на рис.8, диффузного параметра ϵ нормализовало бы зависимость $\overline{\chi^2}(t)$.

С этой целью были проведены расчеты для квазисолеоидальной топографии магнитного поля вида /4/ с $k_1 = 3 \cdot 10^{-4}$ и $k_2 = 1,8 \cdot 10^{-4}$ и для камеры с размерами $10 \times 50 \times 50$ см, установленной вертикально. Похожая ситуация реализована в установке "Трис-том" /8/.

Из рис.10 видно, что при $\epsilon \geq 0,1$ зависимость $\overline{\chi^2}(t)$ не имеет аномалий, при этом время корреляции τ_c меньше его диффузного значения.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты численного моделирования движения УХН в неоднородном магнитном поле показали, что простые соотношения /5-11/ для оценки времени корреляции τ_c имеют точность, достаточную для практических целей, в частности, для проведения необходимых расчетов параметров магниторезонансного спектрометра на УХН при его конструировании.

Сопоставление результатов расчета τ_c для диффузного и зеркального отражений показывает выгоду использования зеркальной камеры с точки зрения понижения требований к однородности магнитного поля, если гравитационные эффекты малы /например, для горизонтальной плоской камеры/. При вертикальном расположении плоской камеры идеальная зеркальность недопустима. Однако реальная поверхность, как бы тщательно она не была обработана, отражает УХН и диффузно*, что в сочетании с реальной топографией магнитного поля может существенно подавить влияние гравитации на процесс усреднения магнитного поля ультрахолодными нейтронами.

Авторы пользуются случаем поблагодарить В.К.Игнатовича, прочитавшего рукопись и сделавшего ряд полезных замечаний.

Согласно ^{5/} вероятность диффузного отражения для электрополированной меди составляет несколько процентов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Таран Ю.В. ОИЯИ, РЗ-7147, Дубна, 1973.
2. Ефимов В.Н., Игнатович В.К. ОИЯИ, Р4-8253, Дубна, 1974.
3. Таран Ю.В. ОИЯИ, РЗ-7149, Дубна, 1973.
4. Франк И.М. ОИЯИ, РЗ-9846, Дубна, 1976.
5. Steyerl A. Nucl.Instr.Meth., 1972, 101, p.295.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 марта 1981 года.