ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

6/XII-76

Г-443

4845/2-76

P2 - 9996

Б.С.Гетманов

ОПИСАНИЕ МНОГОСОЛИТОННЫХ СОСТОЯНИЙ В МОДЕЛИ ТЕОРИИ ПОЛЯ φ_2^4

1976

Р2 · 9996

Б.С.Гетманов

ОПИСАНИЕ МНОГОСОЛИТОННЫХ СОСТОЯНИЙ В МОДЕЛИ ТЕОРИИ ПОЛЯ φ_2^4

Направлено в "Physics Letters"

В последнее время значительно возрос интерес к классическим решениям нелинейных уравнений теории поля, обладающим частицеподобными свойствами,- солитонам. В двумерном пространстве и пространстве-времени наряду с так называемыми вполне интегрируемыми системами /например, уравнение "SINE-GORDON"/, обладающими многосолитонными решениями, для которых получено полное аналитическое описание [1], существуют системы, имеющие солитонные решения, но не обладающие свойством полной интегрируемости /например, теория ϕ^4_2 /. В таких /вполне интегрируемых/ системах взаимодействие между солитонами является полностью упругим, и в подходящих переменных теория фактически свободна. В теориях второго типа взаимодействие между солитонами является, вообще говоря, неупругим, и поэтому они представляют больший интерес для построения моделей частиц конечного размера. В численных экспериментах [2] исследование динамики взаимодействия солитонов в теории ϕ^4_2 выявило малость неупругости взаимодействия и высокую регулярность поведения квазистабильных связанных состояний. Известны другие системы [3], в которых взаимодействие между солитонами является слабонеупругим. В силу слабости неупругости взаимодействия солитонов все эти системы можно считать "близкими" к вполне интегрируемым. Изучение систем, близких к вполне интегрируемым, представляет большой интерес с точки зрения приложений. Однако автору известна всего одна попытка [4] последовательного аналитического подхода к проблеме, близкой к обсуждаемой здесь, - асимптотический метод описания нелинейных самолокализованных колебаний при малых амплнтудах. В настоящей работе предлагается метод приближенного описания динамики многосолитонных состояний в теории ϕ_2^4, который оказывается также приложнмым к скалярным теориям более общего вида, рассмотренным Д.В.Ширковым - с потенциалами вида

$$V(\phi/n) = \frac{\phi^2}{2} \frac{\prod\limits_{1\le i\le n} (1-\rho_i\phi^2)^2}{\prod\limits_{1\le j\le m} (1-\gamma_i\phi^2)^2} . \qquad /1/$$

Общая идея метода состоит в том, что коль скоро изучаются системы, близкие к вполне интегрируемым, естественно отталкиваться от известных решений вполне интегрируемых систем /так же, как при исследовании нелинейных колебаний, близких к линейным, в качестве нулевого приближения берутся решения линейных систем/. Естественным образом, теорией, близкой к ϕ_2^4, является уравнение "SINE-GORDON". Однако попытка реализации этой идеи "в лоб", путем построения асимптотического ряда, приводит к значительным трудностям.

Взамен предлагается другой путь, излагаемый ниже. Рассмотрим уравнение "SINE-GORDON":

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + m^2 \sin\phi = 0, \qquad /2/$$

односолитонные решения которого суть

$$\phi = 4\,\mathrm{arctg}\, e^{\pm z}\,;\quad z = m\gamma(x - vt) + \delta;\ \gamma = (1-v^2)^{-1/2} . \qquad /3/$$

Рассмотрим также уравнения теории ϕ_2^4, которые нам удобно записать в следующем виде:

$$\psi_{tt} - \psi_{xx} + m^2\psi(1 - 2\psi^2) = 0 \qquad /4а/$$

/нелинейное уравнение Клейна-Гордона/, и

$$\psi_{tt} - \psi_{xx} - 2m^2(1-\psi^2)\ \psi = 0 \qquad /4б/$$

/уравнение для поля Хиггса/. Безразмерная константа связи в /4/ убрана преобразованием $\lambda\psi \to \psi$.

Односолитонные решения /4/ имеют вид

$$\psi = \pm\, \mathrm{sech}\, z\,; \qquad /5а/$$

$$\psi = \pm\, \mathrm{th}\, z . \qquad /5б/$$

Рассмотрим теперь преобразования

$$\psi = \pm \sin\frac{\phi}{2}, \qquad /6а/$$

$$\psi = \mp \cos\frac{\phi}{2}. \qquad /6б/$$

Эти преобразования переводят односолитонное решение /3/ уравнения /2/ в решения /5/ уравнений /4/. Решающий шаг состоит в предположении, что преобразования /6/, примененные к точным многосолитонным решениям /2/, дают в первом приближении, с точностью до малых эффектов неупругости, описание соответствующих многосолитонных состояний /4/. Причем пока наиболее надежным критерием справедливости этого предположения нам представляется сравнение с результатами численных экспериментов.

Рассмотрим примеры. Состояние, представляющее пару "солитон-антисолитон" уравнения /2~~4~~1/ в системе центра инерции, дается выражением ?

$$\phi = 4\,\mathrm{arctg}\, g, \qquad /7/$$

$$g = v^{-1}\mathrm{sh}\, m\gamma vt\ \mathrm{sech}\, m\gamma x . \qquad /8/$$

Преобразование /6~~в~~б/ дает выражение

$$\frac{\mathrm{sh}^2 m\gamma vt \;-\; v^2\mathrm{ch}^2\, m\gamma x}{\mathrm{sh}^2 m\gamma vt \;+\; v^2\,\mathrm{ch}^2\, m\gamma x}, \qquad /9/$$

качественно верно описывающее упругое столкновение пары "кинк-антикинк" /5в/. В пределе $t \to \pm\infty$

$$\psi \to \pm\,[\mathrm{th}[m\gamma(x-vt)+\delta) - \mathrm{th}[m\gamma(x+vt)-\delta] \pm 1],\ \delta = \ln v .$$

Численные эксперименты [2] дают картину, весьма близкую к описываемой /9/ при $v > v_{\text{гр.}} = 0{,}2$ с точностью до мелкой "ряби" на гладкой функции /эффекты неупругости/. При $v < v_{гр.}$ излучение, возникающее в момент столкновения, уносит энергию большую, чем суммарная кинетическая энергия сталкивающихся солитонов, и образуется квазистабильное осциллирующее связанное состояние [2].

Преобразование /6а/ солитон-антисолитонного состояния /7/ дает выражение

$$\psi = \frac{2v\,\mathrm{sh}(m\gamma vt)\,\mathrm{sech}(m\gamma x)}{v^2 + \mathrm{sh}^2(m\gamma vt)\,\mathrm{sech}^2(m\gamma x)}, \qquad /10/$$

описывающее упругое рассеяние солитонов /5а/. В пределе

$$t \to \pm\infty,\ \psi \to \pm[\mathrm{sech}[m\gamma(x-vt)+\delta) + \mathrm{sech}[m\gamma(x+vt)-\delta]].$$

Однако состояние /10/ ненаблюдаемо в численных экспериментах, так как солитоны /5а/ неустойчивы [5].

Наибольший интерес, на наш взгляд, представляет возможность описывать с помощью /6/ квазистабильные осциллирующие связанные состояния. Связанное состояние солитон-антисолитон уравнения /2/ в системе покоя ("breather") описывается выражением

$$\phi = 4\,\mathrm{arctg}\,f,\quad f = \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{sech}(m\sin\alpha\cdot x)\sin(m\cos\alpha t-\delta),\ 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}. \qquad /11/$$

Преобразование /6в/ дает выражение

$$\psi = \frac{f^2-1}{f^2+1}, \qquad /12/$$

которое в первом приближении удивительно хорошо описывает эволюцию связанного состояния, исследованного в [3] на всем интервале $-\infty < t < \infty$, , если считать параметр α медленно убывающей от $\pi/2$ до 0 функцией времени.

Предложенный метод позволяет предсказывать существование связанных состояний солитонов, допускающих преобразование типа /6/ к /3/, и дает для них явное аналитическое выражение в первом приближении. Преобразование /6а/ связанного состояния уравнения /2/ дает выражение

$$\psi = \frac{2f}{f^2+1}, \qquad /13/$$

которое должно описывать связанное состояние солитонов уравнения /4а/. Это состояние действительно было обнаружено нами в численных экспериментах при подстановке в /4а/ начальных условий, получаемых из /13/. Замечательно то, что состояние /13/ нельзя получить традиционным путем столкновения солитонов /5а/ ввиду неустойчивости последних. Однако это состояние оказалось устойчивым при $\sin\alpha \le 0{,}2$; его поведение во времени весьма удовлетворительно описывается выражением /13/, если считать α медленно убывающей функцией времени. Колебания /13/ сопровождаются слабым излучением, интенсивность которого сильно растет с ростом амплитуды.

Уравнение Клейна-Гордона с потенциалом $V=\frac{1}{2}\psi^2(\psi^2-1)^2$ /частный случай /1// имеет решения

$$\psi = \pm(1+e^{\pm 2z})^{-1/2}. \qquad /14/$$

Эти решения получаются из /3/ преобразованиями

$$\psi = \pm\sin\frac{\phi}{4};\qquad \psi = \pm\cos\frac{\phi}{4}. \qquad /15/$$

Результат применения /15/ к /11/ - предсказание существования двух связанных состояний

$$\psi_1 = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}},\quad \psi_2 = \frac{1}{\sqrt{1+f^2}}. \qquad /16/$$

Одно из них, по предварительным данным, уже обнаружено в численных экспериментах группой В.Г.Маханькова, в существовании второго у нас нет сомнений. Легко найти преобразования типа /6/, /15/ для других уравнений с потенциалами вида /1/.

Решения типа /9/, /12/ описывают динамику многосолитонных состояний в нулевом приближении с точностью до малых эффектов неупругости. Поэтому весьма важными являются вопросы оценки точности этого приближения и возможности его улучшения. ~~Эти вопросы~~ находя~~тся~~ сейчас в стадии исследования. Намечаемый путь состоит в следующем. В качестве примера рассмотрим уравнение /4а/, которое при преобразовании, обратном /6а/, трансформируется в

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + m^2 \sin\phi = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\phi}{2}\left(\phi_t^2 - \phi_x^2 + 4m^2 \sin^2\frac{\phi}{2}\right). \qquad /17/$$

Подстановка /11/ в /17/ дает уравнение для $a(t)$, которое оказывается, однако, весьма громоздким. Знание явного вида $a(t)$ позволит выяснить ряд важных деталей поведения связанных состояний, например, оценить их "время жизни". На следующем этапе можно искать решение /17/ в виде $\phi = \phi_0 + \epsilon\phi_1$, $\epsilon \ll 1$, где ϕ_0 дается /11/, если считать правую часть /17/ пропорциональной ϵ.

Мы надеемся, что, во всяком случае, идеи, высказанные в настоящей работе, могут оказаться полезными при изучении других систем, близких к вполне интегрируемым.

Автор глубоко признателен Д.В.Ширкову за многочисленные плодотворные обсуждения, конструктивную критику и поддержку.

Литература

1. *Л.А.Тахтаджян, Л.Д.Фаддеев. ТМФ, 21, 160 /1974/.*
   P.I.Caudrey, I.C.Eilbeek, I.D.Bibbon. Nuovo Cim., 25B, 497,1975.
   R.Hirota. J.Phys.Soc.Japan, 33, 1459, 1972.
2. *А.Г.Кудрявцев. Письма в ЖЭТФ, 22, 178 /1975/.*
   Б.С.Гетманов. ОИЯИ, Р2-9991, Дубна, 1976.
3. *Kh.O.Abdulloev, I.L.Bogolubsky, V.G.Makhankov. Phys.Lett., 56A, 427, 1976.*
4. *А.С.Ковалев, А.М.Косевич. ЖЭТФ, 67, 1793 /1974/.*
5. *В.Г.Маханьков и др. ОИЯИ, Р2-9673, Дубна, 1976.*

Рукопись поступила в издательский отдел
28 июля 1976 года.