ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 9991

Б.С.Гетманов

СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ СОЛИТОНОВ В МОДЕЛИ ТЕОРИИ ПОЛЯ φ^4_2

1976

P2 - 9991

Б.С.Гетманов

СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ СОЛИТОНОВ В МОДЕЛИ ТЕОРИИ ПОЛЯ φ_2^4

Направлено в "Письма в ЖЭТФ"

Гетманов Б.С. Р2 - 9991

Связанные состояния солитонов в модели теории поля ϕ^4_2

В численных экспериментах обнаружено и изучено новое квазистационарное связанное состояние трех солитонов классического скалярного поля Хиггса. Детально исследовано связанное состояние, найденное в работе [1], и предложено выражение, качественно верно описывающее его динамику. Предсказано и найдено связанное состояние солитонов нелинейного уравнения Клейна-Гордона.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований

Дубна 1976

Getmanov B.S. P2 - 9991

Soliton Bound States in the ϕ^4_2 Field Theory

The new quasistable bound state of three solitons of the classical scalar Higgs field has found and investigated in the computer experiments. The bound state founded by Kudrjavtsev [1], has precisely investigated and described analitically with good accuracy. The new soliton bound state of the Klein-Gordon equation has predicted and found in the computer experiments.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research

Dubna 1976

Недавно [1] было обнаружено квазистабильное долгоживущее осциллирующее связанное состояние двух солитонов в модели теории поля с уравнением движения /уравнение Хиггса/:

$$\psi_{tt} - \psi_{xx} - 2m^2(1 - \lambda^2\psi^2)\psi = 0. \qquad /1/$$

Однако при этом остались невыясненными вопросы о времени жизни этого состояния /"биона"/, о величине граничной скорости "захвата" солитонов /по этому поводу имеются неясные и противоречивые данные [2] /, а также было сделано утверждение об отсутствии других связанных многосолитонных состояний. В настоящей работе описано новое квазистабильное связанное состояние трех солитонов /"тритон"/, детально изучены свойства и выявлена высокая регулярность поведения тритона и биона. Точное локализованное решение уравнения /1/, обладающее частицеподобными свойствами - солитон /"кинк"/ имеет вид

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{th}[m\gamma(x - x_0 - vt)], \quad \gamma = (1 - v^2)^{-1/2} \quad . \qquad /2/$$

Рассмотрим начальное состояние, описывающееся функцией /*рис. 1*/:

$$\psi = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{3}(-1)^{i+1}\,\mathrm{th}[m\gamma_i\,(x - x_{0i})];$$

$$x_{0,j} = x_{0,j-1} + \Delta x_0; \quad v_j = v_{j-1} + \Delta v,\ j = 2,3. \qquad /3/$$

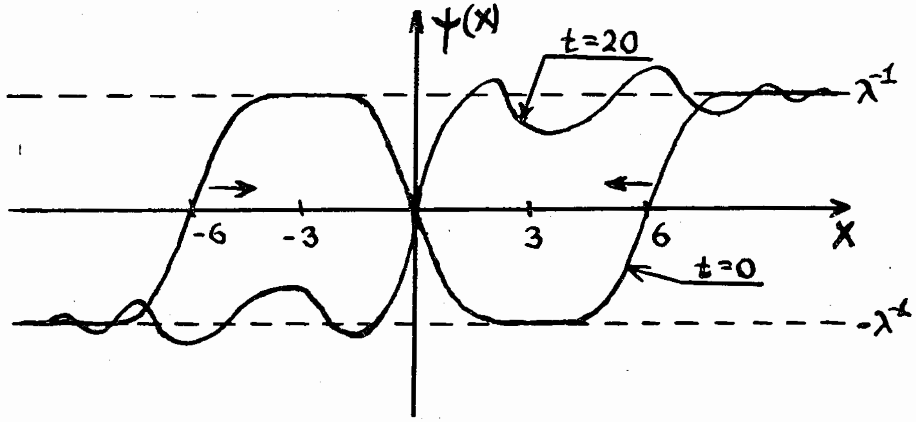

Рис. 1. Тритон при $t=0$ *и* $t=20$ $(v=0{,}6)$.

Качественно ясно, что такое состояние - "деформированный кинк" - нестабильно; в силу того, что взаимодействие между солитонами разного знака носит характер притяжения, выгодным /во всяком случае при малой Δv / является переход в состояние /2/ с испусканием избытка энергии в виде волн малой амплитуды /что возможно, поскольку система /1/ не является вполне интегрируемой/. Эволюцию состояния /3/ удобно изучать в системе центра инерции, при $v_2=0$, $x_{0,2}=0$. Кроме того, преобразование $\lambda\psi\to\psi$, $mx\to x$, $mt\to t$ делает уравнение /1/ инвариантным относительно параметров λ, m. Соответственно инвариантны и результаты численного счета в безразмерных переменных. В численных экспериментах /ч.э./ обнаружено, что при скорости $v=v_1=-v_3<v_{гр.}$, $v_{гр.}=0{,}75\pm0{,}03$ эволюция состояния /3/ приводит к образованию пульсирующего связанного состояния. Пульсации носят вполне регулярный характер и сопровождаются мощным /на начальной стадии/ излучением, что приводит к плавному уменьшению частоты и амплитуды пульсаций. При $t\to\infty$ период пульсаций стремится к $T_{min}=\frac{\pi}{m}$. Обработка результатов ч.э. показала, что уменьшение энергии тритона за счет потерь на излучение на регулярной стадии процесса можно описать формулой /отклонение от экспериментальной кривой не превышает 5% на интервале $t=400$/:

$$E(t)=E_0+2E_0\exp(-\delta_1 t), \qquad /4/$$

где $E_0=M=\frac{4m^2}{3\lambda^2}$ - масса солитона, $\delta_1=(3\pm0.1)\cdot10^{-2}m$.

Отсюда интенсивность излучения

$$I(t)=\frac{dE}{dt}=-8\cdot10^{-2}\cdot2\frac{m^2}{\lambda^2}\exp(-\delta_1 t). \qquad /5/$$

Таким образом, тритон оказывается относительно долгоживущим образованием.

Теперь рассмотрим динамику состояния, задаваемого начальной функцией /1/

$$\psi=\frac{1}{\lambda}\{\operatorname{th}[m\gamma(x+x_0)]-\operatorname{th}[m\gamma(x-x_0)]-1\}. \qquad /6/$$

В тщательно поставленных численных экспериментах найдена граничная скорость солитонов /ниже которой происходит образование биона/, оказавшаяся равной $v_{гр.}=0{,}2\pm0{,}01$. Кроме того, выяснилось, что бион является значительно более долгоживущим образованием, чем тритон, и что на установившейся стадии колебаний последние обладают исключительной регулярностью. График осцилляций амплитуды поля $A(t)$ в точке $x=0$ имеет характерную форму, изображенную на *рис. 2*. Имеет

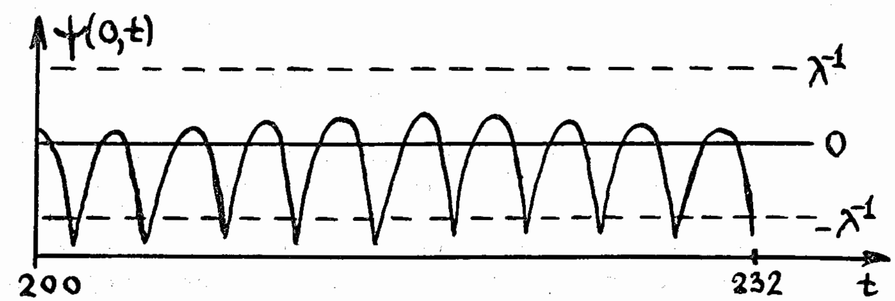

Рис.2. Колебания поля в центре биона в установившемся режиме.

место также слабая модуляция основной частоты, с периодом, значительно большим основного, и сложным образом зависящим от времени. Малость декремента затухания колебаний биона, некоторое нарушение регулярности процесса на начальной стадии, обусловленное "высвечиванием" избытка кинетической энергии солитонов, и отмеченная выше модуляция сильно затрудняют определение величины декремента затухания и "времени жизни" биона. Последнее удалось определить только после того, как нами было найдено аналитическое выражение, с весьма удовлетворительной точностью описывающее динамику биона:

$$\psi = \frac{1}{\lambda}\,\frac{\mathrm{tg}^2\alpha\,\mathrm{sech}^2(m\sin\alpha\cdot x)\cos^2(m\cos\alpha\cdot t)-1}{\mathrm{tg}^2\alpha\,\mathrm{sech}^2(m\sin\alpha\cdot x)\cos^2(m\cos\alpha\cdot t)+1}. \qquad /7/$$

Если считать α медленно убывающей /в силу слабости излучения/ функцией времени в интервале $t\in[\frac{\pi}{2},0]$, то формула /7/ дает качественное описание эволюции начального состояния при $v<v_{\text{гр}}$ в <u>пренебрежении излучением</u>, вплоть до трансформации биона в малые колебания около нижнего вакуума $\psi=-\frac{1}{\lambda}$ при $\alpha\to 0$. Спектр этих колебаний имеет вид $\omega^2_{\text{лин.}}=k^2+4m^2$; из /7/ видно, что частота локализованных колебаний лежит в запрещенной области спектра гармонических колебаний, и при $\alpha\to 0$ частота $\omega_{\text{нел.}}=2m\cos\alpha\to 2m$, т.е. к нижней границе спектра. При этом амплитуда колебаний стремится к нулю, а область пространственной локализации - к бесконечности.

С помощью /7/, выбирая произвольное $\alpha\in[\frac{\pi}{2},0]$, в ч.э. с большой точностью задается начальное состояние биона в соответствующий момент его жизни, и изучаемая система сразу входит в самосогласованный регулярный режим.

В итоге зависимость энергии биона от времени на регулярной стадии удалось описать с помощью формулы

$$E(t)=2M\exp(-\delta_2 t), \quad \delta_2=(4\pm 0.3)\cdot 10^{-4}m. \qquad /8/$$

Таким образом, время "полураспада" /уменьшения энергии вдвое/ равно $\simeq 1750\,m^{-1}$!

Метод получения формулы /7/ /фактически метод приближенного описания многосолитонных состояний в некотором классе двумерных полиномиальных моделей теории поля/, а также более детальное сравнение /7/ с результатами ч.э. будут изложены в другом месте. Отметим здесь только, что с помощью этого метода /основанного на факте "близости" рассматриваемых уравнений к уравнению "SINE-GORDON"/, нами также предсказано, а затем обнаружено в ч.э. связанное состояние солитонов нелинейного уравнения Клейна-Гордона

$$\psi_{tt}-\psi_{xx}+m^2(1-2\lambda^2\psi^2)\psi=0, \qquad /9/$$

близкое по свойствам к /7/ и описываемое выражением

$$\psi=\frac{1}{\lambda}\,\frac{2\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{sech}(m\sin\alpha\cdot x)\cos(m\cos\alpha\cdot t)}{\mathrm{tg}^2\alpha\,\mathrm{sech}^2(m\sin\alpha\, x)\cos^2(m\cos\alpha\cdot t)+1},\ \alpha\in[\frac{\pi}{2},0]. \qquad /10/$$

Замечательно то, что состояние /10/ нельзя получить в ч.э. по столкновению солитонов уравнения /9/, так как последние неустойчивы относительно малых возмущений начальных данных. Однако оно оказалось устойчивым в области $\sin\alpha\leq 0{,}2$, причем интенсивность его излучения сильно растет с ростом амплитуды. Таким образом, уже на классическом уровне уравнения модели ϕ^4_2 обладают богатым спектром частицеподобных решений с нетривиальной динамикой.

Достоверность приведенных в настоящей работе экспериментальных данных гарантировалась сохранением во всех ч.э. интеграла движения - полной энергии - с точностью, не хуже 10^{-4}, а также надежно установленным фактом отсутствия влияния на результаты эффектов, связанных с граничными условиями /по поводу важности внимания к этим эффектам см., в частности, работу [3]/.

Автор искренне благодарен Д.В.Ширкову за весьма ценные и стимулирующие беседы, внимание и поддержку,

а также И.Л.Боголюбскому и В.Г.Маханькову за полезные обсуждения.

Литература

1. *А.Е.Кудрявцев. Письма в ЖЭТФ, 22, 17в /1975/.*
2. *П.П.Кулиш. Доклад на II школе по физике элементарных частиц, София, 1975.*
3. *Х.О.Абдуллоев, И.Л.Боголюбский, В.Г.Маханьков. ОИЯИ, Р9-7992, Дубна, 1974.*

Рукопись поступила в издательский отдел
26 июля 1976 года.