

9981

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



9981

P2 - 9981

ЭКЗ. ЧИТ. ЗАЛА

А.В.Матвееенко

ПОДРОБНЫЙ РАСЧЕТ ПРОЦЕССА  $H(1s) + \mu^+ \leftrightarrow$   
 $Mu(1s) + p$  ПРИ ТЕПЛОВЫХ ЭНЕРГИЯХ

1976

P2 - 9981

А.В.Матвеевко

ПОДРОБНЫЙ РАСЧЕТ ПРОЦЕССА  $\text{H}(1s) + \mu^+ \longleftrightarrow$   
 $\text{Mu}(1s) + p$  ПРИ ТЕПЛОВЫХ ЭНЕРГИЯХ

*Направлено в "Journal of Physics"*

## 1. Введение

В этой работе мы продолжаем изучение процессов рассеяния в одноэлектронных системах<sup>/1,2/</sup>. Из-за высокой степени симметрии кулоновского взаимодействия в таких системах оказывается возможным точный расчет электронной энергии как функции межъядерного расстояния, а также матричных элементов, которые представляют взаимодействие различных электронных состояний. Такие расчеты приводят к системе уравнений метода возмущенных стационарных состояний /adiaбатическое представление/ для соответствующей задачи рассеяния или задачи на связанные состояния. Мы недавно подробно обсуждали трудности, которые возникают при использовании этого представления<sup>/3/</sup>. Однако в этой работе мы ограничимся простым приближением двух состояний, когда эти трудности не являются принципиальными, а точность метода остается высокой. Будут представлены результаты расчета процесса



для энергий  $10^{-3} \text{ эВ} \leq E \leq 5 \text{ эВ}$  в системе центра масс. Метод позволяет одновременный расчет упругих сечений и сечения перезарядки. Производится анализ колебательной структуры этих сечений.

Ранее<sup>/1/</sup> мы использовали аналогичное представление для расчета процесса перезарядки



хотя в настоящей работе была использована иная модификация метода фазовых функций.

## 2. Уравнения и обозначения

Задача трех тел: протона с массой  $m_p$ ,  $\mu^+$  - мезона с массой  $m_1$  и электрона с массой  $m_e$  может быть сведена в системе центра масс к уравнению Шредингера с гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{2M} \Delta_{\vec{R}} + H_0 \quad /3/$$

$$H_0 = -\frac{1}{2m} \Delta_{\vec{r}} - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{R} \quad /3a/$$

и приведенными массами

$$1/M = 1/m_p + 1/m_1; \quad 1/m = 1/m_e + 1/(m_p + m_1). \quad /36/$$

Здесь  $\vec{r}$  - радиус-вектор электрона по отношению к центру масс ядер, а  $\vec{R}$  - радиус-вектор относительного положения тяжелых частиц. Расстояния электрона до ядер задаются величинами  $r_1$  и  $r_2$ .

Из бесконечного набора решений задачи двух центров

$$H_0 \phi_\alpha(\vec{r}; R) = E_\alpha(R) \phi_\alpha(\vec{r}; R) \quad /4/$$

мы возьмем два:  $1s\sigma$  (gerade) и  $2p\sigma$  (ungerade), которые в пределе  $R \rightarrow \infty$  удобны для представления реакции /1/. Далее решение полной задачи

$$H \Psi(\vec{R}, \vec{r}) = E \Psi(\vec{R}, \vec{r}) \quad /5/$$

ищем в виде

$$\Psi(\vec{R}, \vec{r}) = \psi_1(\vec{R}) [\phi_g + \phi_u] / \sqrt{2} + \psi_2(\vec{R}) [\phi_g - \phi_u] / \sqrt{2}. \quad /6/$$

Подставляя это разложение в уравнение /5/, интегрируя по "электронным" переменным  $\vec{r}$  и производя разложение по парциальным волнам, приходим к системе двух радиальных уравнений:

$$\left[ \frac{d^2}{dR^2} + k_1^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{R^2} \right] \chi_1 = K_{11} \chi_1 + K_{12} \chi_2 + 2Q_{12} \frac{d\chi_2}{dR} \quad /7/$$

$$\left[ \frac{d^2}{dR^2} + k_2^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{R^2} \right] \chi_2 = K_{22} \chi_2 + K_{21} \chi_1 - 2Q_{12} \frac{d\chi_1}{dR}.$$

$$K_{11}(R) = M(W_g + W_u) + (K_{gg} + K_{uu} - K_{gu} - K_{ug})/2$$

$$K_{12}(R) = M(W_g - W_u) + (K_{gg} - K_{ug} + K_{gu} - K_{uu})/2 \quad /8/$$

$$K_{21}(R) = M(W_g - W_u) + (K_{gg} - K_{uu} - K_{gu} + K_{ug})/2$$

$$K_{22}(R) = M(W_g + W_u) + (K_{gg} + K_{uu} + K_{ug} + K_{ug})/2$$

$$Q_{12}(R) = -Q_{gu}.$$

Матричные элементы  $K_{gg}, \dots, K_{uu}, Q_{gu}$  определяются следующим образом:

$$K_{ij} = \langle i | -\Delta_{\vec{R}} | j \rangle \quad /9/$$

$$Q_{ij} = \frac{\vec{R}}{R} \langle i | -\nabla_{\vec{R}} | j \rangle; \quad i, j = g, u.$$

Они могут быть найдены при решении задачи /4/ для волновых функций  $\phi_{g,u}(\vec{r}; R)$  и собственных значений /термов/  $W_{g,u}(R)$ . Из равенств /8/ и граничных условий задачи рассеяния можно получить выражения для импульсов в каналах

$$k_1^2 = k_2^2 + (m_p - m_1)/(m_p + m_1), \quad k_2^2 = 2ME. \quad /10/$$

Матричные элементы /8/ в асимптотической области могут быть найдены аналитически /4/. Буква E обозна-

чает энергию столкновения, кроме того, мы воспользовались единицами  $c = \hbar = m = 1$ .

Система уравнений /7/ с соответствующими граничными условиями позволяет рассчитать процесс /1/. Использованный нами метод расчета включает в себя также некоторые эквивалентные преобразования этой системы /1/. Однако эти преобразования, вызванные удобством при проведении численных расчетов, оказались неудобными, когда дело дошло до физической интерпретации результатов расчета.

### 3. Результаты и обсуждения

Сечение образования мюония в основном состоянии  $\text{Mu}(1s)$  приведено на *рис. 1*. Резкий подъем сечения при малых  $k$  напоминает "1/v закон", который, однако, вступает в силу лишь тогда, когда в сечение дает вклад только s-волна. В действительности, в этой области энергий вклад в образование мюония дают несколько парциальных волн. Характерный минимум имеет место при  $k_2 \approx 0,35$ . Далее следуют осцилляции орбитирования. Это может быть установлено при помощи *рис. 2*, на котором даны примеры эффективных адиабатических потенциалов  $V^\ell(R) = 2M W_{g,u}^\ell(R) + \ell(\ell+1)/R^2$ . Семейство потенциалов  $V_{u,g}^\ell$  для  $\ell \geq 5$  не имеет структуры, но потенциалы  $V_{u,g}^\ell$  обладают ярко выраженным центробежным барьером для  $1 \leq \ell \leq 17$ . Зафиксировав величину  $\ell$ , мы можем найти энергию классического орбитирования  $E_{\text{орб}}$ , а затем определить значение соответствующего импульса орбитирования  $k_\ell = \sqrt{2ME_{\text{орб}}}$ . В *табл. 1* приведены значения  $k_\ell$  и абсциссы экстремумов в сечении перезарядки  $\sigma_{\text{ex}}$ . Из таблицы следует качественное подтверждение нашего предположения. Аналогичный анализ является значительно более убедительным для реакции /2/, что следует из *табл. 2*, которая построена тем же образом, что и *табл. 1*. Для  $\ell = 45$  в случае реакции /2/ и для  $\ell = 18$  для реакции /1/ центробежный барьер исчезает, но его след некоторое время проявляется в сечении перезарядки в виде осцилляций радуги /5/.

Таблица 1 (H+ $\mu^+$ )

угловой момент $\ell$	11	12	13	14	15	16	17	18
классический импульс орбитирования $k_\ell$ (рис. 2)	1.09	1.23	1.37	1.53	1.69	1.86	2.05	-
абсцисса экстремума $\sigma_{ex}$ (рис. 1)	-	1.25	1.38	1.58	1.72	1.92	2.12	2.25

Таблица 2 (D+p)

$\ell$	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	45	46
$k_\ell$	1.45	1.56	1.67	1.79	1.91	2.03	2.15	2.28	2.40	2.53	2.66	2.80	5.48	-
положение экстремумов (рис. 1)	-	1.57	1.65	1.79	1.88	2.02	2.10	2.24	2.35	2.52	2.66	2.74	5.26	5.6

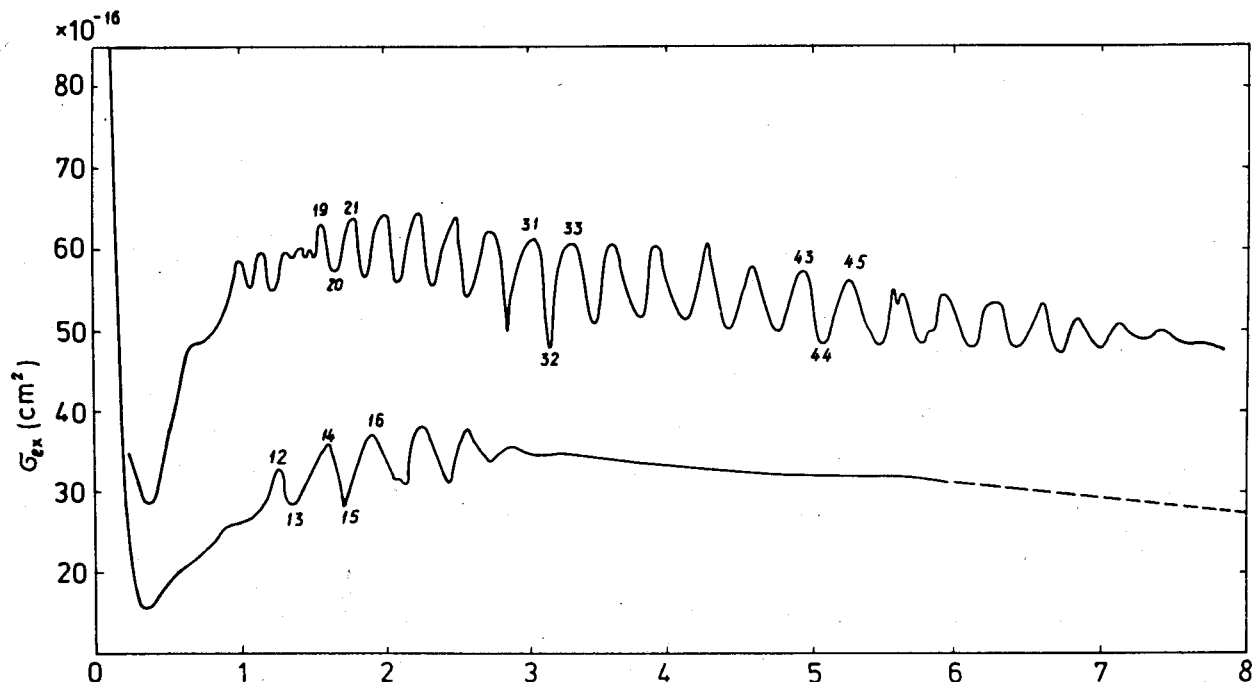


Рис. 1. Сечение образования  $Mu(1s)$  мезоатома /перезарядки/ в реакции /1/ /нижняя кривая/ в сравнении с сечением образования  $H(1s)$  в реакции /2/ /верхняя кривая/. Импульс  $k = 9,5 \sqrt{E[\text{эВ}]}$  для верхней кривой и  $k_2 = 3,7 \sqrt{E[\text{эВ}]}$  для нижней кривой. Указаны угловые моменты орбитирования.

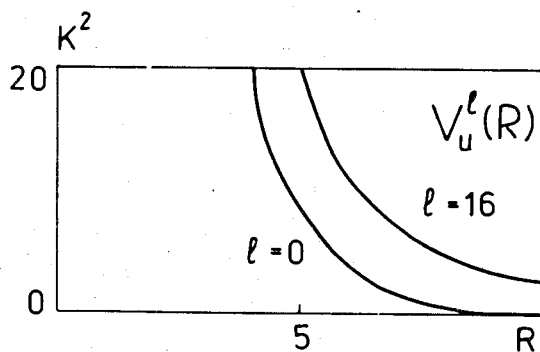
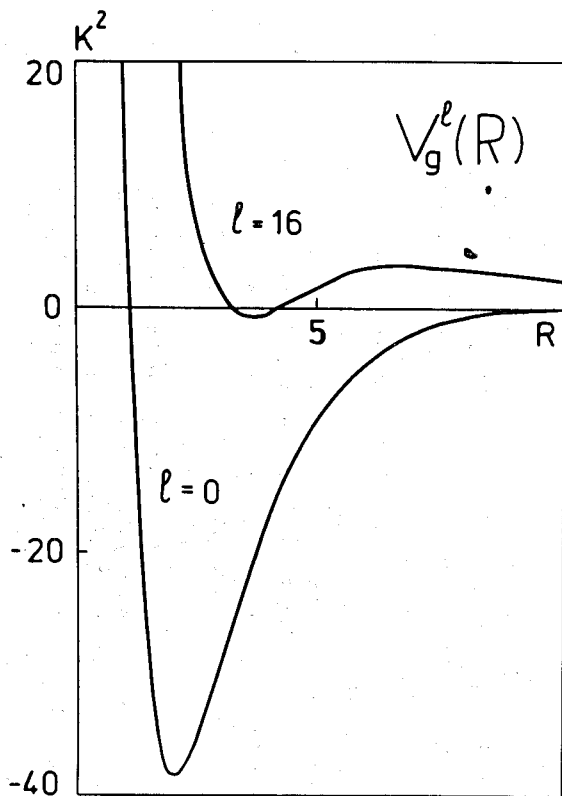


Рис. 2. Адиабатические эффективные потенциалы  $V_{g,u}^l = 2M W_{g,u}^l + l(l+1)/R^2$ .  $V_g^l(R)$  для  $1 \leq l \leq 17$  имеет центробежный барьер, на вершине которого,  $k_l$ , происходит орбитирование. Форма потенциала  $V_g^l(R)$  приводит также к появлению ореола.

В целом ситуация представляется довольно своеобразной, т.к. с одной стороны квазиклассический расчет оказывается несостоятельным для области орбитирования <sup>5/</sup>, а с другой - классический анализ этого явления позволяет объяснить и предсказать некоторые особенности точного квантовомеханического расчета.

С ростом энергии столкновения осцилляции вырождаются и кривая сечения довольно плавно убывает. Это, по-видимому, должно продолжаться до энергии открытия канала образования атома водорода в возбужденном состоянии  $H(n=2)$ . Следует также отметить, что проведенный анализ вполне подходит и для сечения перезарядки реакции <sup>2/</sup>.

Сечение упругого рассеяния в канале  $Mu(1s)+p$  дано на *рис. 3*. Можно ожидать, что осцилляции, которые проявляются здесь, являются квантовым аналогом эффекта ореола <sup>5/</sup>. Для проверки этого предположения мы рассчитали фазовые сдвиги  $\delta_g^l = \delta^l(\rho)$  на потенциалах  $V_g^l$  для  $k = 1,4$  и  $k = 2,3$ , которые соответствуют двум соседним максимумам в упругом сечении. Известно, что потенциалы такого типа приводят к эффекту ореола в сечении рассеяния  $\sigma \sim \sum (2l+1) \sin^2 \delta^l$  для соответствующей одномерной задачи <sup>6/</sup>. Для  $k=1,4$  расчет дал  $\delta_g(5) = 20,375 = 13 \frac{\pi}{2}$  и для  $k=2,3$ ,  $\delta_g(7) = 17,237 = 11 \frac{\pi}{2}$ , в точках максимумов функций  $\delta_g^l(\rho)$ . Таким образом, положение максимумов ореола в сечении одномерной задачи совпадает с положением максимумов в сечении рассеяния  $Mu(1s)$  на протонах для точного решения <sup>2,5/</sup>. Это подтверждает наше предсказание.

Упругое сечение из *рис. 3* примерно в три раза больше сечения  $\sigma_{ex}$  образования  $Mu(1s)$  атомов из *рис. 1*. Сечение  $\sigma_{ex}$  было вычислено в работе <sup>7/</sup> по порядку величины. Результат этой работы для величины сечения  $\sigma_{ex} \sim 10^{-15} \text{ см}^2$  не противоречит нашим расчетам, однако их же оценка для положения максимума /или лучше минимума/ в сечении без учета осцилляций,  $E_{max} \sim 5,5 \text{ эВ}$ , оказалась явно завышенной. Следует специально отметить удивительно сильную интерференцию двухканальной системы для процессов <sup>1/</sup> и <sup>2/</sup>, которая приводит к появлению этого минимума.



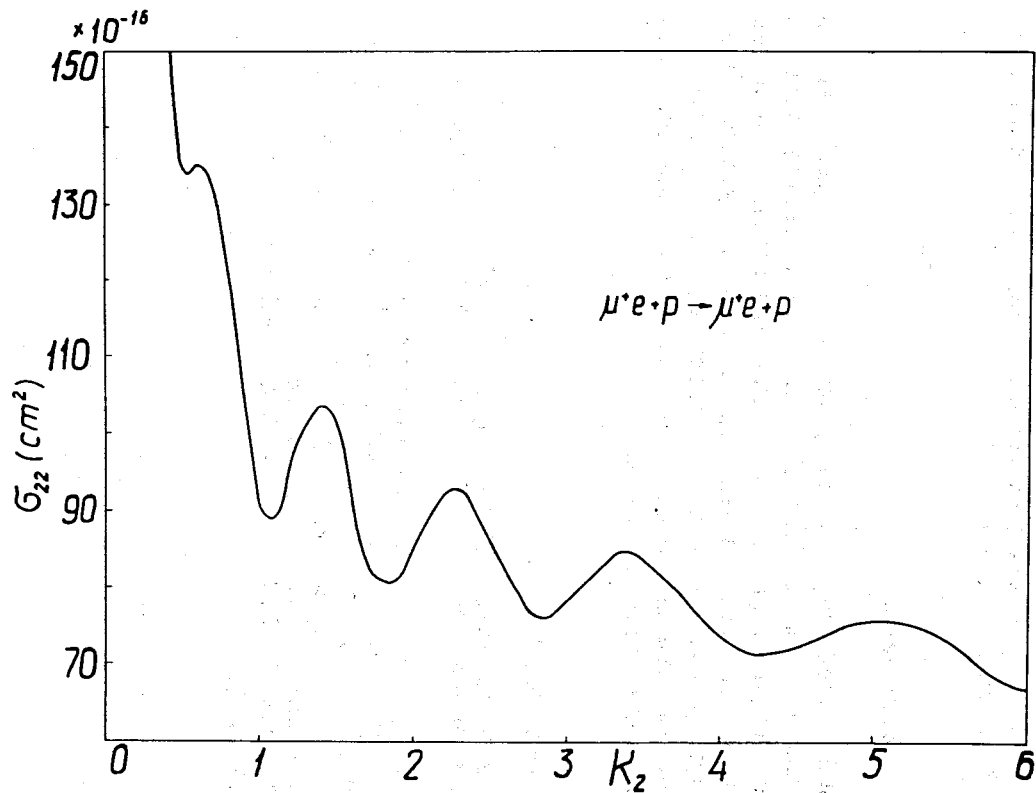


Рис. 3. Сечение упругого рассеяния  $\text{Mu}(1s)$  на протонах. Положение экстремумов на рисунке соответствует положению экстремумов явления ореола для потенциала  $V_g(R)$ .

Упругое сечение рассеяния  $\mu^+$  на атомах водорода автоматически получалось при решении системы уравнений /7/. Это сечение имеет сложную структуру с нерегулярными максимумами и минимумами. По порядку величины оно в среднем больше упругого сечения из рис. 3 процентов на 10.

#### 4. Заключение

Мы надеемся, что подробный расчет рассеяния в простых системах типа /1/ или /2/ позволит развить аналитические методы для вычисления сечений при более сложных задачах. Эта надежда значительно укрепляется, если еще раз напомнить, что простые чисто классические аргументы оказываются полезными в случае довольно тонких квантовых расчетов.

#### Литература

1. А.В.Матвеевко. ЖЭТФ, 65, 2167 /1973/.
2. А.В.Матвеевко, Л.И.Пономарев. ЖЭТФ, 68, 920 /1975/.
3. A.V. Matveenko, J.Phys. B: Atom. Molec. Phys., 9, 1419 (1976).
4. С.И.Виницкий, Л.И.Пономарев, М.П.Файфман. ОИЯИ, Р4-9312, Дубна, 1975.
5. R.J. Munn, E.A. Mason and F.J. Smith. J. Chem. Phys., 41, 3978 (1964).
6. R.B. Bernstein, J. Chem. Phys., 34, 361 (1961).
7. R.K. Tanev, D.S. Belhic. J.Phys. B: Atom. Molec. Phys., 5, L237 (1972).

Рукопись поступила в издательский отдел  
21 июля 1976 года.