ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 9929

И.Лукач

О ПОЛНЫХ НАБОРАХ НАБЛЮДАЕМЫХ НА СФЕРЕ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ЭВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1976

P2 - 9929

И.Лукач*

О ПОЛНЫХ НАБОРАХ НАБЛЮДАЕМЫХ НА СФЕРЕ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ЭВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Направлено в ТМФ

* Институт физики Словацкой Академии наук.

Введение

Группа движений (вращений) сферы R_3, определяемой в четырёхмерном эвклидовом пространстве уравнением

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 = 1 , \qquad (\text{I})$$

в современной теоретической физике встречается довольно часто. Так, например, широко известная в настоящее время скрытая симметрия атома водорода, установленная Фоком /I/ и исследованная в дальнейшем многими авторами /2-6/, реализуется в пространстве (I). Волновые функции в импульсном представлении для квантовомеханической задачи атома водорода, полученные Фоком /I/ и Баргманном /2/, тесно связаны с двумя из возможных ортогональных систем гармонических функций в пространстве R_3. Возникает закономерный вопрос: сколько ортогональных систем гармонических функций существует в R_3, т.е. сколько неэквивалентных полных наборов наблюдаемых имеется в указанном пространстве? Если это число больше двух, то из этого следует и другой вопрос: каким волновым функциям квантовомеханической задачи атома водорода в координатном представлении соответствуют эти другие системы ортогональных функций в R_3?

Хорошо известно, что групповым пространством группы трёхмерных вращений O(3) является именно поверхность сферы в четырёхмерном эвклидовом пространстве. Матрицу вращения g_{ik}, $i,k = 1,2,3$ трёхмерного пространства можно записать в виде

$$g_{ik} = (2\xi_4 - 1)\delta_{ik} + 2(\xi_i\xi_k + \xi_4 e_{ikl}\xi_l),^{*} \qquad (2)$$

---

*В формуле (2) и в дальнейшем по дважды повторяющимся латинским (греческим) индексам подразумевается суммирование от единицы до трёх (четырёх).

где параметры ξ_α, $\alpha = 1,2,3,4$, связаны соотношением (I), и, таким образом, каждое трёхмерное вращение определено точкой в пространстве R_3. Функции Вигнера $\mathcal{D}^j_{mm'}(\alpha,\beta,\gamma)$, реализующие представления группы трёхмерных вращений $O(3)$, как известно, представляют собой ортонормированную систему функций (базис в R_3), причём углы Эйлера α, β, γ выражаются через ξ_α следующим образом:

$$\xi_1 + i\xi_2 = i\sin\beta/2\, \exp[i(\alpha-\gamma)/2], \quad \xi_3 + i\xi_4 = i\cos\beta/2\, \exp[-i(\alpha+\gamma)/2].$$

Так как в пространстве R_3 существуют также другие базисы, то представляет интерес разложение функций $\mathcal{D}^j_{mm'}(\alpha,\beta,\gamma)$ по этим базисам. Такие разложения могут явиться удобными и полезными, например, в некоторых задачах ядерной физики, когда имеем дело с определёнными суммами от функций Вигнера или их произведений, так как существует вероятность того, что эти суммы могут быть выражены через другие известные функции в пространстве R_3 (см. /7/).

Определение всех возможных (неэквивалентных) полных наборов наблюдаемых в R_3 можно рассматривать как обобщение аналогичной задачи в пространстве R_2, т.е. на обычной сфере в трёхмерном эвклидовом пространстве, а также как промежуточный этап в решении общей задачи нахождения полных наборов наблюдаемых в пространстве R_{N-1}, представляющем собой сферу в N-мерном эвклидовом пространстве. В пространстве R_2 существует всего два набора наблюдаемых /8/, связанных с полярной и эллиптической си-

стемами координат в этом пространстве /9/. Следовательно, для группы трёхмерных вращений $O(3)$ существует два ортогональных базиса, реализуемых, соответственно, сферическими и сфероконическими функциями. Оба эти базиса находят применение в физических задачах /10/.

Точка в пространстве R_3 определяется тремя независимыми координатами, и полный набор линейно независимых взаимно коммутирующих операторов состоит, соответственно, из трех операторов, которые обозначим через $\hat{\mathcal{L}}_1$, $\hat{\mathcal{L}}_2$, $\hat{\mathcal{L}}_3$. Собственные значения этих операторов λ_1, λ_2 и λ_3, называемые полным набором квантовых чисел, служат для классификации собственных волновых функций в этом пространстве. В данном случае можем написать

$$(\hat{\mathcal{L}}_1 - \lambda_1)\Psi_{[\lambda_1\lambda_2\lambda_3]}(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) = 0,$$

$$(\hat{\mathcal{L}}_2 - \lambda_2)\Psi_{[\lambda_1\lambda_2\lambda_3]}(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) = 0, \qquad (3)$$

$$(\hat{\mathcal{L}}_3 - \lambda_3)\Psi_{[\lambda_1\lambda_2\lambda_3]}(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) = 0,$$

где через $\Psi_{[\lambda_1\lambda_2\lambda_3]}(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)$ обозначена система собственных волновых (гармонических) функций, соответствующая данному набору диагональных операторов. Заметим, что в общем случае собственные значения λ_1, λ_2 и λ_3 операторов $\hat{\mathcal{L}}_1$, $\hat{\mathcal{L}}_2$ и $\hat{\mathcal{L}}_3$ необязательно должны выражаться некоторыми числами, а могут быть определёнными функциями некоторых параметров, характеризующих эту систему операторов. Самые простые собственные значения – это действительно определённые числа (например, собственные значения оператора квадрата полного момента количества движения или изотопического спина).

Итак, нашей задачей является построение всех возможных неэквивалентных наборов диагональных операторов $\hat{\mathscr{L}}_1$, $\hat{\mathscr{L}}_2$ и $\hat{\mathscr{L}}_3$ в пространстве R_3. При этом эквивалентной системой диагональных операторов называется система операторов $\hat{\mathscr{L}}_1'$, $\hat{\mathscr{L}}_2'$, $\hat{\mathscr{L}}_3'$, которые представляют собой некоторую линейную комбинацию операторов $\hat{\mathscr{L}}_1$, $\hat{\mathscr{L}}_2$, $\hat{\mathscr{L}}_3$ (матрица этого линейного преобразования должна быть невырожденной). Обе эквивалентные системы диагональных операторов имеют одну и ту же систему собственных волновых функций. Перейдем к отысканию в трехмерном пространстве постоянной положительной кривизны всех неэквивалентных наборов диагональных операторов, построенных из генераторов группы движения этого пространства.

Полные наборы наблюдаемых в R_3

Точка в пространстве (I) определяется тремя независимыми параметрами (координатами). Произвольное перемещение этой точки в пространстве R_3 определяется шестью параметрами, и группа четырехмерных вращений O(4) имеет, соответственно, шесть генераторов, которые обозначим через $\hat{M}_{\alpha\beta} = -\hat{M}_{\beta\alpha}$, $\alpha,\beta = 1,2,3,4$, где

$$\hat{M}_{\alpha\beta} = -i\left(\xi_\alpha \frac{\partial}{\partial \xi_\beta} - \xi_\beta \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\right).$$

Вместо шести генераторов $\hat{M}_{\alpha\beta}$ введём операторы $\hat{L}_i$ и $\hat{N}_j$ ($i,j = 1,2,3$) согласно формуле

$$\hat{M}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{L}_3 & -\hat{L}_2 & \hat{N}_1 \\ -\hat{L}_3 & 0 & \hat{L}_1 & \hat{N}_2 \\ \hat{L}_2 & -\hat{L}_1 & 0 & \hat{N}_3 \\ -\hat{N}_1 & -\hat{N}_2 & -\hat{N}_3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

т.е. положим $\hat{L}_i = \frac{1}{2} e_{ijk} \hat{M}_{jk}$, $\hat{N}_i = \hat{M}_{i4}$. Генераторы $\hat{M}_{\alpha\beta}$ удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[\hat{M}_{\alpha\beta}, \hat{M}_{\gamma\delta}] = i\left(\delta_{\alpha\gamma}\hat{M}_{\beta\delta} + \delta_{\beta\delta}\hat{M}_{\alpha\gamma} - \delta_{\alpha\delta}\hat{M}_{\beta\gamma} - \delta_{\beta\gamma}\hat{M}_{\alpha\delta}\right).$$

Коммутационные соотношения для операторов $\hat{L}_i$ и $\hat{N}_j$, соответственно, имеют вид

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i e_{ijk}\hat{L}_k, \quad [\hat{N}_i, \hat{N}_j] = [\hat{L}_i, \hat{N}_j] = i e_{ijk}\hat{N}_k.$$

Группа четырёхмерных вращений O(4), как известно, имеет два оператора Казимира, а именно

$$\hat{\mathscr{L}}_1 = \frac{1}{2}\hat{M}^2_{\alpha\beta} = \hat{L}_i^2 + N_i^2, \qquad (5)$$

$$\hat{\hat{\mathscr{L}}}_1 = \frac{1}{8} e_{\alpha\beta\gamma\delta}\hat{M}_{\alpha\beta}\hat{M}_{\gamma\delta} = \hat{L}_i\hat{N}_i = \hat{N}_i\hat{L}_i.$$

Поскольку нас интересуют возможные базисы для представлений группы O(4), то первый оператор в (5) совпадает с оператором Лапласа $-\Delta$ в пространстве R_3 (его собственные значения равны $f(f+2)$, $f = 0,1,2\ldots$) и собственные значения второго оператора в (5) тождественно равны нулю. Если мы хотим сконструировать полный набор коммутирующих операторов в R_3, т.е. набор операторов, которые диагональны на системе собственных волновых функций, то кроме оператора Лапласа

$$\hat{\mathscr{L}}_1 = -\Delta = \hat{L}_1^2 + \hat{L}_2^2 + \hat{L}_3^2 + \hat{N}_1^2 + \hat{N}_2^2 + \hat{N}_3^2$$

необходимо построить из генераторов $\hat{L}_i$, $\hat{N}_j$ еще два других (диагональных) оператора $\hat{\mathscr{L}}_2$ и $\hat{\mathscr{L}}_3$. В общем случае эти операторы должны представлять собой некоторые симметричные полиномы, квадратичные в генераторах группы O(4). При их построении будем исходить из следующих теоретико-групповых соображений.

Шестипараметрическая группа O(4) имеет четыре трёхпараметрические подгруппы O(3) и, кроме того, шесть однопараметрических подгрупп O(2). Каждая подгруппа группы O(4) имеет свой оператор Казимира (оператор Лапласа). Эти операторы обозначим соответственно Δ_α, $\Delta_{\alpha\beta} = \Delta_{\beta\alpha}$, $\alpha, \beta = 1,2,3,4$. Явный вид этих операторов, записанный через генераторы группы O(4), нетрудно получить: для Δ_α необходимо вычеркнуть в (4) строку и столбец под номером α и оставшиеся генераторы возвести в квадрат; аналогично, для $\Delta_{\alpha\beta}$ необходимо в (4) вычеркнуть строки и столбцы под номерами α и β и оставшиеся генераторы возвести в квадрат. Конкретно, в данном случае имеем

$$-\Delta_1 = \hat{L}_1^2 + \hat{N}_2^2 + \hat{N}_3^2, \quad -\Delta_2 = \hat{L}_2^2 + \hat{N}_3^2 + \hat{N}_1^2, \qquad (6)$$
$$-\Delta_3 = \hat{L}_3^2 + N_1^2 + N_2^2, \quad -\Delta_4 = \hat{L}_1^2 + \hat{L}_2^2 + \hat{L}_3^2,$$

$$-\Delta_{12} = \hat{N}_3^2, \quad -\Delta_{23} = N_1^2, \quad -\Delta_{31} = \hat{N}_2^2, \qquad (7)$$
$$-\Delta_{14} = \hat{L}_1^2, \quad -\Delta_{24} = \hat{L}_2^2 \quad -\Delta_{34} = \hat{L}_3^2.$$

Поскольку, как известно из теории групп, оператор Казимира каждой из подгрупп некоторой группы коммутирует с операторами Казимира этой группы, то имеет место

$$[\Delta, \Delta_\alpha] = 0, \quad [\Delta, \Delta_{\alpha\beta}] = 0.$$

Следовательно, два искомых диагональных оператора $\hat{\mathcal{L}}_2$ и $\hat{\mathcal{L}}_3$ можно выбрать в виде некоторой линейной комбинации операторов Казимира подгрупп группы O(4):

$$\hat{\mathcal{L}}_2 = -\sum_\alpha a_\alpha \Delta_\alpha = (a_1 + a_4)\hat{L}_1^2 + (a_2 + a_4)\hat{L}_2^2 + (a_3 + a_4)\hat{L}_3^2 + (a_2 + a_3)\hat{N}_1^2 + (a_3 + a_1)\hat{N}_2^2 + (a_1 + a_2)\hat{N}_3^2, \qquad (8)$$

$$\hat{\mathcal{L}}_3 = -\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}{}' a_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\beta} = a_{14}\hat{L}_1^2 + a_{24}\hat{L}_2^2 + a_{34}\hat{L}_3^2 + a_{23}\hat{N}_1^2 + a_{31}\hat{N}_2^2 + a_{12}\hat{N}_3^2, \qquad (9)$$

причём десять параметров a_α и $a_{\alpha\beta}$ представляют собой некоторые постоянные, которые не являются независимыми. Чтобы определить связь a_α с $a_{\alpha\beta}$, необходимо учесть факт, что операторы (8) и (9) должны коммутировать, т.е. необходимо коммутатор этих операторов приравнять нулю:

$$[\hat{\mathcal{L}}_2, \hat{\mathcal{L}}_3] = \sum_{\alpha,\beta,\gamma}{}' a_\alpha \cdot a_{\beta\gamma} [\Delta_\alpha, \Delta_{\beta\gamma}] = 0. \qquad (10)$$

Прежде чем расписать коммутаторы в (10), докажем, что имеет место следующее соотношение для коммутаторов квадратов генераторов $\hat{M}_{\alpha\beta}$ группы O(4):

$$[\hat{M}_{\alpha\beta}^2, \hat{M}_{\beta\gamma}^2] = [\hat{M}_{\beta\gamma}^2, \hat{M}_{\gamma\alpha}^2] = [\hat{M}_{\gamma\alpha}^2, \hat{M}_{\alpha\beta}^2], \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma = 1,2,3,4. \qquad (11)$$

Непосредственно из коммутационных соотношений для генераторов группы O(4) следует, что $[\hat{M}_{\alpha\beta}^2, \hat{M}_{\gamma\delta}^2] = 0$, если $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \delta$.

Для доказательства соотношений (11) достаточно сосчитать следующее выражение:

$$[\hat{M}_{\alpha\beta}^2, \hat{M}_{\beta\gamma}^2] - [\hat{M}_{\beta\gamma}^2, \hat{M}_{\gamma\alpha}^2] = \hat{M}_{\alpha\beta}[\hat{M}_{\alpha\beta}, \hat{M}_{\beta\gamma}]\hat{M}_{\beta\gamma} + \hat{M}_{\alpha\beta}\hat{M}_{\beta\gamma}[\hat{M}_{\alpha\beta}, \hat{M}_{\beta\gamma}] +$$
$$+ [\hat{M}_{\alpha\beta}, \hat{M}_{\beta\gamma}]\hat{M}_{\beta\gamma}\hat{M}_{\alpha\beta} + \hat{M}_{\beta\gamma}[\hat{M}_{\alpha\beta}, \hat{M}_{\beta\gamma}]\hat{M}_{\alpha\beta} - \hat{M}_{\beta\gamma}[\hat{M}_{\beta\gamma}, \hat{M}_{\gamma\alpha}]\hat{M}_{\gamma\alpha} -$$
$$- \hat{M}_{\beta\gamma}\hat{M}_{\gamma\alpha}[\hat{M}_{\beta\gamma}, \hat{M}_{\gamma\alpha}] - [\hat{M}_{\beta\gamma}, \hat{M}_{\gamma\alpha}]\hat{M}_{\gamma\alpha}\hat{M}_{\beta\gamma} - \hat{M}_{\gamma\alpha}[\hat{M}_{\beta\gamma}, \hat{M}_{\gamma\alpha}]\hat{M}_{\beta\gamma} =$$
$$= i[\hat{M}_{\beta\gamma}, \hat{M}_{\beta\alpha}]\hat{M}_{\alpha\gamma} + i\hat{M}_{\alpha\gamma}[\hat{M}_{\alpha\beta}, \hat{M}_{\beta\gamma}] = -\hat{M}_{\alpha\gamma}^2 + \hat{M}_{\alpha\gamma}^2 = 0.$$

Отсюда непосредственно следует, что соотношения (11) действительно выполняются. Таким образом, для коммутаторов между операторами квадратов генераторов группы O(4) имеют место следующие равенства:

$$
\begin{aligned}
&[\hat{L}_1^2, \hat{L}_2^2] = [\hat{L}_2^2, \hat{L}_3^2] = [\hat{L}_3^2, \hat{L}_1^2], \\
&[\hat{L}_1^2, \hat{N}_2^2] = [\hat{N}_2^2, \hat{N}_3^2] = [\hat{N}_3^2, \hat{L}_1^2], \\
&[\hat{L}_2^2, \hat{N}_3^2] = [\hat{N}_3^2, \hat{N}_1^2] = [\hat{N}_1^2, \hat{L}_2^2], \qquad (\mathrm{I2}) \\
&[\hat{L}_3^2, \hat{N}_1^2] = [\hat{N}_1^2, \hat{N}_2^2] = [\hat{N}_2^2, \hat{L}_3^2].
\end{aligned}
$$

Расписывая теперь суммирование в коммутаторе (I0) в явном виде и учитывая соотношения (I2), получаем

$$
\begin{aligned}
[\hat{\mathscr{L}}_2, \hat{\mathscr{L}}_3] = {} & [(a_2 - a_1)a_{34} + (a_3 - a_2)a_{14} + (a_1 - a_3)a_{24}]\cdot[\hat{L}_1^2, \hat{L}_2^2] + \\
& + [(a_2 - a_3)a_{41} + (a_4 - a_2)a_{31} + (a_3 - a_4)a_{21}]\cdot[\hat{L}_1^2, \hat{N}_2^2] + \qquad (\mathrm{I3}) \\
& + [(a_3 - a_1)a_{42} + (a_4 - a_3)a_{12} + (a_1 - a_4)a_{32}]\cdot[\hat{L}_2^2, \hat{N}_3^2] + \\
& + [(a_1 - a_2)a_{43} + (a_4 - a_1)a_{23} + (a_2 - a_4)a_{13}]\cdot[\hat{L}_3^2, \hat{N}_1^2] = 0.
\end{aligned}
$$

Так как коммутаторы в правой части выражения (I3) являются независимыми, то коэффициенты, стоящие перед ними, должны тождественно равняться нулю. Как нетрудно убедиться, получившейся системе уравнений удовлетворяют коэффициенты $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$, имеющие вид:

$$
a_{\alpha\beta} = a_\alpha \cdot a_\beta . \qquad (\mathrm{I4})
$$

Таким образом, наиболее общим набором наблюдаемых в пространстве R_3 является система следующих трёх диагональных операторов (или система операторов, эквивалентная ей):

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathscr{L}}_1 &= \hat{L}_1^2 + \hat{L}_2^2 + \hat{L}_3^2 + \hat{N}_1^2 + \hat{N}_2^2 + \hat{N}_3^2, \\
\hat{\mathscr{L}}_2 &= (a_1 + a_4)\hat{L}_1^2 + (a_2 + a_4)\hat{L}_2^2 + (a_3 + a_4)\hat{L}_3^2 + \\
&\quad + (a_2 + a_3)\hat{N}_1^2 + (a_3 + a_1)\hat{N}_2^2 + (a_1 + a_2)\hat{N}_3^2, \qquad (\mathrm{I5}) \\
\hat{\mathscr{L}}_3 &= a_1 a_4 \hat{L}_1^2 + a_2 a_4 \hat{L}_2^2 + a_3 a_4 \hat{L}_3^2 + a_2 a_3 \hat{N}_1^2 + a_3 a_1 \hat{N}_2^2 + a_1 a_2 \hat{N}_3^2.
\end{aligned}
$$

В системе диагональных операторов (I5) четыре параметра a_1, a_2, a_3 и a_4 являются независимыми (для удобства можно предположить, что имеет место неравенство $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4$). Для конкретной физической задачи эти параметры должны принимать конкретные численные значения.

Из системы операторов (I5) можно вывести все остальные возможные (или эквивалентные им) наборы диагональных операторов в пространстве R_3, если рассмотреть частные значения параметров a_1, a_2, a_3 и a_4.

I. Случай $a_1 = a_2$.

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathscr{L}}_1' &= \hat{\mathscr{L}}_1 = \hat{L}_1^2 + \hat{L}_2^2 + \hat{L}_3^2 + \hat{N}_1^2 + \hat{N}_2^2 + \hat{N}_3^2, \\
\hat{\mathscr{L}}_2' &= (a_4 - a_2)^{-1}(\hat{\mathscr{L}}_2 - 2a_2\hat{\mathscr{L}}_1) = \\
&= \hat{L}_1^2 + \hat{L}_2^2 + \hat{L}_3^2 + k_1^2(\hat{L}_3^2 + \hat{N}_1^2 + \hat{N}_2^2), \qquad (\mathrm{I6}) \\
\hat{\mathscr{L}}_3' &= [(a_4 - a_2)(a_3 - a_2)]^{-1}(\hat{\mathscr{L}}_3 - a_2\hat{\mathscr{L}}_2 + a_2^2\hat{\mathscr{L}}_1) = \hat{L}_3^2, \\
& 0 \le k_1^2 = \frac{a_3 - a_2}{a_4 - a_2} \le 1.
\end{aligned}
$$

II. Случай $a_2 = a_3$.

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathscr{L}}_1' &= \hat{\mathscr{L}}_1 = \hat{L}_1^2 + \hat{L}_2^2 + \hat{L}_3^2 + \hat{N}_1^2 + \hat{N}_2^2 + \hat{N}_3^2, \\
\hat{\mathscr{L}}_2' &= (a_4 - a_1)^{-1}(\hat{\mathscr{L}}_2 - 2a_2\hat{\mathscr{L}}_1) = \\
&= k_2'^2(\hat{L}_1^2 + \hat{L}_2^2 + \hat{L}_3^2) - k_2^2(L_1^2 + N_2^2 + N_3^2), \qquad (\mathrm{I7}) \\
\hat{\mathscr{L}}_3' &= [(a_4 - a_2)(a_1 - a_2)]^{-1}(\hat{\mathscr{L}}_3 - a_2\hat{\mathscr{L}}_2 + a_2^2\hat{\mathscr{L}}_1) = \hat{L}_1^2, \\
& 0 \le k_2^2 = \frac{a_2 - a_1}{a_4 - a_1} \le 1, \quad k_2'^2 = 1 - k_2^2.
\end{aligned}
$$

III. Случай $a_1 = a_2$ и $a_3 = a_4$.

$$\hat{\mathcal{L}}_1' = \hat{\mathcal{L}}_1 = \hat{L}_1^2 + \hat{L}_2^2 + \hat{L}_3^2 + \hat{N}_1^2 + \hat{N}_2^2 + \hat{N}_3^2,$$
$$\mathcal{L}_2' = (a_4 - a_1)^{-2}(\hat{\mathcal{L}}_3 - a_1\hat{\mathcal{L}}_2 + a_1^2\hat{\mathcal{L}}_1) = \hat{L}_3^2, \qquad (18)$$
$$\mathcal{L}_3' = (a_4 - a_1)^{-2}(\hat{\mathcal{L}}_3 - a_4\hat{\mathcal{L}}_2 + a_4^2\hat{\mathcal{L}}_1) = \hat{N}_3^2.$$

IУ. Случай $a_4 \to \infty$.

$$\hat{\mathcal{L}}_1' = \hat{\mathcal{L}}_1 = \hat{L}_1^2 + \hat{L}_2^2 + \hat{L}_3^2 + \hat{N}_1^2 + \hat{N}_2^2 + \hat{N}_3^2,$$
$$\hat{\mathcal{L}}_2' = \lim_{a_4\to\infty} a_4^{-1}\hat{\mathcal{L}}_2 = \hat{L}_1^2 + \hat{L}_2^2 + \hat{L}_3^2, \qquad (19)$$
$$\hat{\mathcal{L}}_3' = \lim_{a_4\to\infty} [a_4(a_3 - a_1)]^{-1}(\hat{\mathcal{L}}_3 - a_2\hat{\mathcal{L}}_2) = k_3'^2\hat{L}_3^2 - k_3^2\hat{L}_1^2,$$
$$0 \le k_3^2 = \frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} \le 1, \quad k_3'^2 = 1 - k_3^2.$$

У. Случай $a_4 \to \infty$ и $a_3 \to \infty$.

$$\hat{\mathcal{L}}_1' = \hat{\mathcal{L}}_1 = \hat{L}_1^2 + \hat{L}_2^2 + \hat{L}_3^2 + \hat{N}_1^2 + \hat{N}_2^2 + \hat{N}_3^2,$$
$$\hat{\mathcal{L}}_2' = \lim_{a_4\to\infty} a_4^{-1}\hat{\mathcal{L}}_2 = \hat{L}_1^2 + \hat{L}_2^2 + \hat{L}_3^2, \qquad (20)$$
$$\hat{\mathcal{L}}_3' = \lim_{a_3\to\infty}\lim_{a_4\to\infty} a_3^{-1}\cdot a_4^{-1}\mathcal{L}_3' = \hat{L}_3^2.$$

Заметим, что частные случаи $a_1 < a_2 < a_3 = a_4$, $a_1 = a_2 = a_3 < a_4$, $a_1 < a_2 = a_3 = a_4$, $a_1 = a_2 < a_3 < a_4 \to \infty$, $a_1 < a_2 = a_3 < a_4 \to \infty$ не приводят к новым наборам диагональных операторов в R_3, так как эти случаи сводятся прямо или с помощью переобозначения координатных осей в пространстве R_3 к случаям (16)-(20). Таким образом, на сфере в четырёхмерном эвклидовом пространстве существует всего лишь шесть неэквивалентных наборов наблюдаемых, определённых наборами диагональных операторов (16) - (20) и невырожденным случаем (15).

Неэквивалентные случаи систем диагональных операторов (16) - (20) в групповом отношении можно охарактеризовать некоторыми цепочками подгрупп, действующих в подпространствах пространства R_3, а именно

I. $O(4) \supset O_{12}(2)$,
II. $O(4) \supset O_{34}(2)$,
III. $O(4) \supset O_{12}(2) \otimes O_{34}(2)$, (21)
IУ. $O(4) \supset O_{123}(3)$,
У. $O(4) \supset O_{123}(3) \supset O_{12}(2)$.

Само собой разумеется, что общий случай (15) ($a_1 \ne a_2 \ne a_3 \ne a_4$) нельзя характеризовать никакой цепочкой подгрупп и, соответственно, этот случай является наиболее "демократичным" по отношению ко всем возможным подгруппам группы $O(4)$. Заметим, что в физических задачах, связанных с группой $O(4)$, применяются, как правило, полные наборы наблюдаемых, соответствующие третьей и пятой цепочкам подгрупп в (21).

Заключение

Итак, исходя из теоретико-групповых соображений, показано, что в трёхмерном пространстве постоянной положительной кривизны R_3 существует шесть неэквивалентных полных наборов наблюдаемых, т.е. в этом пространстве существует шесть различных наборов точных ("хороших") квантовых чисел, пригодных для классификации состояний. Это число совпадает с числом ортогональных криволинейных систем координат пространства R_3, в которых возможно разделение переменных в уравнении Лапласа[9]. Наиболее общему набору диагональных операторов (15) соответствует эллиптическая система координат в R_3, причём оказывается, что постоянные a_1, a_2, a_3 и a_4 из (I5) являются характеристиками самой эллиптической системы координат. Построение ортонормированной системы собственных волновых функций и определение собственных значений полного набора диагональных операторов (I5), которые являются определёнными функциями параметров a_1, a_2, a_3 и a_4, представляет собой самостоятельную задачу в связи с определёнными сложностями, встречающимися при её решении. Наборы гармонических функций для частных случаев (I6) - (20) или известны, или их построение не встречает принципиальных трудностей. Гармонические функции для наборов операторов (I6) и (I7) строятся аналогично тому, как построены сферо-конические функции в пространстве R_2 /8/. Явные выражения систем операторов (I5) - (20) в виде соответствующих дифференциальных операторов приведены в работе /II/.

Следует отметить, что наборы диагональных операторов, выраженные именно через генераторы соответствующей группы, позволяют нам давать физическую интерпретацию собственных значений этого набора, т.е. интерпретацию квантовых чисел данной физической задачи. В связи с этим представляет интерес обобщение полученных здесь результатов на общий N-мерный случай. Построение всех возможных полных наборов наблюдаемых в пространстве R_{N-1} и определение соответствующих этим наборам ортогональных криволинейных систем координат, допускающих разделение переменных в соответствующем уравнении Лапласа, позволит существенно расширить многообразие гармонических функций, которые можно использовать для решения некоторых физических задач.

Литература

I. V.A.Fock. Zs.f.Phys., 98, 145 (1935).

2. V.Bargmann. Zs.f.Phys., 99, 576 (1936).

3. M.Bander, C.Itzykson. Rev. Mod. Phys., 38, 330, 347 (1966).

4. R.J.Finkelstein. Journ. Math. Phys., 8, 443 (1967).

5. И.А.Малкин, В.И.Манько. ЯФ, 3, 372 (1966).

6. В.С.Попов. В кн. Физика высоких энергий и теория элементарных частиц. Киев," Наукова думка", 1967, стр. 702.

7. М.С.Маринов. ЯФ, 5, I32I (1967).

8. И.Лукач. ТМФ, I4, 366 (1973).

9. М.Н.Олевский. Мат. сб., 27, 379 (1950).

I0. И.Лукач, Я.А.Смородинский. Сообщение ОИЯИ Р2-7465, Дубна, 1973.

II. Я.А.Смородинский, И.И.Тугов. ЖЭТФ, 50, 653 (1966).

Рукопись поступила в издательский отдел
16 сентября 1976 года.